LEÇON N°18 :
Équations du second degré à coefficients réels ou complexes.

Activité d'introduction :
Un rectangle a pour périmètre P = 14m et pour aire S = 12m^2.
Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?
Modélisation : Soient x et y les dimensions de ce rectangle, on a :
2(x + y) = P et x*y = S = 12
En remplaçant y par 7 – x on obtient l'équation x(7 – x) = 12 qui peut s'écrire encore $x^2 - 7x + 12 = 0$.
Comment résoudre une telle équation ?

I. Équations du second degré à coefficients réels

a) Forme canonique

Définition 1 : On appelle forme canonique de ax^2+bx+c, l'expression $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{-(b^2-4ac)}{4a}$$

b) Résolution d'une équation du second degré à coefficients réels

Définition 2 :
- Une équation du second degré à coefficients réels est une équation de la forme $ax^2+bx+c = 0$, où a, b, c ϵ R avec a≠0. Dans la suite, cette équation sera notée (E).
- Le discriminant de l'équation (E) est le nombre noté Δ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

Théorème 1 :
Afin de résoudre l'équation (E), trois cas sont à distinguer :
1) Si Δ > 0, alors l'équation (E) admet deux solutions x1 et x2 distinctes, données par les formules :

$$x1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2) Si Δ = 0, alors l'équation (E) possède une solution double :

$$x0 = \frac{-b}{2a}$$

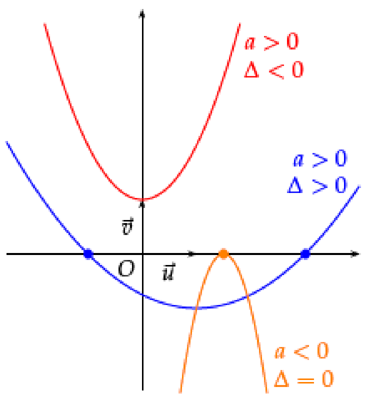
3) Si Δ < 0, alors l'équation (E) n'admet aucune solution réelle. Elle admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Remarque : pour toute solution x de l'équation $ax^2 +bx+c = 0$, on dira aussi que x est une racine de ax^2+bx+c.

c) Interprétation graphique :

Si le coefficient a de x^2 est strictement positif, (resp. strictement négatif), alors les branches de la parabole sont orientées vers le haut (resp. le bas).
Si le discriminant Δ est strictement positif, on observe bien que la représentation graphique de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ coupe l'axe des abscisses en deux points distincts : ce sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Si Δ = 0, on n'observe qu'un seul point d'intersection.
Enfin, si Δ < 0, la courbe ne vient même pas toucher l'axe des abscisses.



d) Relations entre coefficients et racines

Si $\Delta > 0$, le trinôme est factorisable dans R et on a : $ax^2+bx+c = a(x-x1)(x-x2)$
Si $\Delta = 0$, le trinôme est factorisable dans R et on a : $ax^2+bx+c = a(x-x0)^2$
Si $\Delta < 0$, le trinôme est factorisable dans C et on a : $ax^2+bx+c = a(x-z1)(x-z2)$

Théorème : on a les relations suivantes :

$$x1 + x2 = \frac{-b}{a} \qquad \text{et} \qquad x1 \times x2 = \frac{c}{a}$$

Exercice :
Les élèves d'une classe de première vont visiter un musée. Ils ont a leurs charge le coût des entrées.
Le musée a établi un tarif de groupe d'un montant de 168 €.
Un professeur récolte l'argent auprès des élèves participants.
Finalement, deux élèves ne peuvent pas venir et chacun des autres élèves doit payer 0,40 € supplémentaire.
On note x le nombre d'élèves de la classe.

1 – Exprimer, en fonction de x, le prix initialement demandé à chaque élève.
2 - En déduire le nombre d'élèves dans la classe.

II. Équations du second degré à coefficients complexes

Théorème 1 : Si $Z = a + ib \in \mathbf{C}^*$, alors l'équation $z^2 = Z$ admet deux solutions opposées dans **C**.

Théorème 2 : Soient $(a,b,c) \in C^3$ avec a non nul. Alors l'équation $az^2+bz+c = 0$ admet deux solutions dans C, données par :

1) Si $\Delta = 0$, $z0 = -b/2a$
2) Si $\Delta \neq 0$, alors :

$$z1 = \frac{-b-\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

Où δ est tel que $\delta^2 = \Delta$

Exercice :
Résoudre les équations suivantes :

1) $z^2 - 5z + 7 - i = 0$
2) $iz^2 - (3+8i)z + 13 + 13i = 0$
3) $4z^2 + 4z + 1 - 2i = 0$