

Leçon 80

Etude des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants. Exemples.

Pré-requis : - Continuité, dérivabilité
- Résolution des équations différentielles du premier ordre.

Dans toute la leçon, on se place dans un corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point ; $a, b, c \in K$ ($a \neq 0$) et f une fonction continue de I dans K .

De nombreux exemples en mathématiques appliquées tels que dans la physique conduisent à la résolution d'équations différentielles. On s'intéressera dans cette leçon à l'étude et à la résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

1 – Généralités

Définition : On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** toute équation différentielle de la forme $ay'' + by' + cy = f(t)$ (E).

La fonction f est appelée le **second membre** de (E) ; et on appelle **solution** de (E) sur I , toute fonction $\varphi : I \rightarrow K$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :

$$\forall t \in I, a \varphi''(t) + b \varphi'(t) + c \varphi(t) = f(t).$$

Remarque : $t \in I$ est une variable indépendante.

Définition : L'équation $ay'' + by' + cy = 0$ (E_0) est appelé **équation homogène** (ou **sans second membre**) associée à (E).

On note $S(K)$ (resp. $S_0(K)$) l'ensemble des solutions de (E) (resp. (E_0)) sur I à valeurs dans K .

Exemples :

- 1) $y'' - 5y' + 6y = 0$
- 2) $y'' - 4y' + 4y = 0$
- 3) $y'' + \omega^2 y = 0$; avec $\omega \in \mathbb{R}^*$.

Dans la suite de la leçon (E) désigne l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = f(t)$ et (E_0) son équation homogène associée.

Remarque : ♣ La courbe représentative d'une solution y sur I est une courbe intégrale sur I .

♣ $\psi(y) = ay'' + by' + cy$ application de $\mathcal{C}^2(I)$ dans $\mathcal{C}^0(I)$. (E) s'écrit $\psi(y) = f(t)$ et cette équation est dite **linéaire** car ψ est linéaire.

Cette propriété explique certains résultats qu'on interprétera en algèbre linéaire.

♣ En pratique, on ne cherche pas toutes les solutions d'une équation différentielle mais seulement celle(s) qui vérifie(nt) certaines conditions. Par exemple, rechercher les solutions y de (E) vérifiant les deux conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$ (problème de Cauchy). On retrouve ce problème en mécanique, à l'instant t_0 , y_0 : position et y_0' : vitesse.

Proposition 1 : Structure des solutions de (E_0)
L'ensemble $S_0(K)$ est un K -espace vectoriel.

Preuve : C'est-à-dire que $S_0(K)$ est stable par combinaisons linéaires : $\forall \lambda \in K, \forall y, z \in S_0(K), \lambda y + z \in S_0(K)$; ou encore que c'est le noyau de l'application $\varphi : y \mapsto ay'' + by' + cy$.

* $S_0(K)$ est non vide car $f \equiv 0 \in S_0(K)$.

Soit $y, z \in S_0(K)$ i.e solutions de (E_0) sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors que $\lambda y + z$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I .

On a aussi : $\forall t \in \mathbb{R}, ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ et $a(\lambda y''(t) + z''(t)) + b(\lambda y'(t) + z'(t)) + c(\lambda y(t) + z(t)) = 0$.

D'où, $\forall t \in \mathbb{R}, a(\lambda y(t) + z(t))'' + b(\lambda y(t) + z(t))' + c(\lambda y(t) + z(t)) = \lambda (ay''(t) + by'(t) + cy(t)) + (az''(t) + bz'(t) + cz(t)) = 0$ donc $\lambda y + z \in S_0(K)$. ■

2 – Résolution de l'équation homogène

Définition : L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée **équation caractéristique** associée à (E), notée (E_c) .
On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

Remarque : ♣ (E_c) admet toujours deux racines complexes, distinctes ou non, r et r' .
 $az^2 + bz + c = a(z - r)(z - r')$; $r + r' = -b/a$ et $rr' = c/a$.

Proposition 2 : Soit $r \in K$, la fonction $f_r : \begin{cases} I \longrightarrow K \\ t \longmapsto e^{rt} \end{cases}$ est solution de (E_0) si, et seulement si, $ar^2 + br + c = 0$.

Preuve : $\Rightarrow$ Si $t \longmapsto e^{rt}$ solution de (E_0) , $ar^2 e^{rt} + br e^{rt} + c e^{rt} = 0$, comme $e^{rt} \neq 0$, $ar^2 + br + c = 0$.
 $\Leftarrow$ Si $ar^2 + br + c = 0$, ($e^{rt} \neq 0$) donc $ar^2 e^{rt} + br e^{rt} + c e^{rt} = 0$, i.e e^{rt} solution de (E_0) . ■

a) Solutions complexes de (E_0) pour $(a,b,c) \in K^* \times K^2$

Théorème 1 : Les solutions complexes de (E_0) sont :

- 1) Si $\Delta \neq 0$, (E_c) a deux racines complexes r et r' (distinctes) :
 $S_0(\mathbb{C}) = \{ t \in I \longmapsto C e^{rt} + C' e^{r't} \mid (C, C') \in \mathbb{C}^2 \}$.
- 2) Si $\Delta = 0$, (E_c) a une racine double complexe r :
 $S_0(\mathbb{C}) = \{ t \in I \longmapsto (Ct + C') e^{rt} \mid (C, C') \in \mathbb{C}^2 \}$.

Preuve : Dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_c) admet deux solutions complexes r et r' (distinctes ou non) ; donc d'après la proposition précédente $t \longmapsto e^{rt}$ est solution de (E_0) .

Pour avoir toutes les solutions y de (E_0) , on change de fonction inconnue en posant : $y(t) = e^{rt} u(t) \Leftrightarrow u(t) = e^{-rt} y(t)$.

On obtient par dérivation : $y'(t) = e^{rt} (u'(t) + r u(t))$ et $y''(t) = e^{rt} (u''(t) + 2r u'(t) + r^2 u(t))$.

En reportant et en simplifiant par e^{rt} qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on constate que y est solution de (E_0) ssi u solution de
 $a u''(t) + (2ar + b) u'(t) + (ar^2 + br + c) u(t) = 0$.

Comme $ar^2 + br + c = 0$ et $r + r' = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow 2ar + b = a(r - r')$, on obtient $a u''(t) + a(r - r') u'(t) = 0 \Leftrightarrow u''(t) + (r - r') u'(t) = 0$.

- 1) Si $\Delta \neq 0$, les racines r et r' sont distinctes et la résolution de $u'' + (r - r') u' = 0$ équation linéaire du premier ordre en u' , donne
 $u' : u'(t) = \lambda \exp((r - r')t)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, puis $u : u(t) = \frac{-\lambda}{r - r'} \exp((r - r')t) + C$; avec $(\lambda, C) \in \mathbb{C}^2$. En posant $C' = \frac{-\lambda}{r - r'} \in \mathbb{C}$, on obtient $u(t) = C' \exp((r - r')t) + C$. Finalement $\exists C, C' \in \mathbb{C}$, $u(t) = C' \exp((r' - r)t) + C$ et $y(t) = C e^{rt} + C' e^{r't}$.
- 2) Si $\Delta = 0$, les racines r et r' sont égales et l'équation devient $u''(t) = 0$, d'où $\exists C, C' \in \mathbb{C}$, $u(t) = Ct + C'$ et $y(t) = (Ct + C') e^{rt}$. ■

Remarque : ♣ En langage algébrique, on dit que l'ensemble des solutions forme un plan vectoriel de dimension 2 (car celles-ci sont combinaisons linéaires de deux fonctions non proportionnelles).

♣ Les solutions à valeurs réelles de (E_0) sont des solutions à valeurs complexes caractérisées par le fait qu'elles sont égales à leurs conjugués (car $S_0(\mathbb{R}) \subset S_0(\mathbb{C})$).

b) Solutions réelles de (E_0) pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$

Théorème 2 : Les solutions réelles de (E_0) sont :

- 1) Si $\Delta > 0$, (E_c) a deux racines réelles distinctes r et r' :
 $S_0(\mathbb{R}) = \{ t \in I \longmapsto C e^{rt} + C' e^{r't} \mid (C, C') \in \mathbb{R}^2 \}$.
- 2) Si $\Delta = 0$, (E_c) a une racine double réelle r :
 $S_0(\mathbb{R}) = \{ t \in I \longmapsto (Ct + C') e^{rt} \mid (C, C') \in \mathbb{R}^2 \}$.
- 3) Si $\Delta < 0$, (E_c) a deux racines complexes conjuguées $\lambda + i\omega$ et $\lambda - i\omega$:
 $S_0(\mathbb{R}) = \{ t \in I \longmapsto e^{\lambda t} (C \cos(\omega t) + C' \sin(\omega t)) \mid (C, C') \in \mathbb{R}^2 \}$.

Preuve : 1) Si $\Delta > 0$, (E_c) a deux racines réelles distinctes r et r' , supposons $r < r'$.

Les solutions complexes sont : $\forall t \in I$, $y(t) = C e^{rt} + C' e^{r't}$, $C, C' \in \mathbb{C}$. Les solutions sont à valeurs réelles (ou égales à leurs conjuguées) ssi : $\forall t \in I$, $C e^{rt} + C' e^{r't} = \overline{C e^{rt} + C' e^{r't}} = \overline{C} e^{rt} + \overline{C'} e^{r't} \Rightarrow (C - \overline{C}) e^{rt} = (\overline{C'} - C') e^{r't} \Rightarrow (C - \overline{C}) = (\overline{C'} - C') e^{(r' - r)t}$; comme l'égalité est vraie pour tout $t \in I$, on a $C = \overline{C}$ et $C' = \overline{C'}$.

Inversement, si $C = \overline{C}$ et $C' = \overline{C'}$, l'égalité précédente est vérifiée.

Les solutions réelles sont donc définies par : $(C, C') \in \mathbb{R}^2$, $y(t) = C e^{rt} + C' e^{r't}$.

2) On traitera de manière similaire le cas $\Delta = 0$.

3) Si $\Delta < 0$, (E_c) a deux racines complexes conjugués $\lambda \pm i\omega$ avec $(\lambda, \omega) \in \mathbb{R}^2$.

Les solutions complexes sont de la forme suivante : $(C, C') \in \mathbb{R}^2$, $y(t) = C \exp((\lambda + i\omega)t) + C' \exp((\lambda - i\omega)t)$.

Ces solutions sont réelles ssi $e^{\lambda t} (C \exp(i\omega t) + C' \exp(-i\omega t)) = e^{\lambda t} (\overline{C'} \exp(i\omega t) + \overline{C} \exp(-i\omega t))$

Ce qui implique $(C - \overline{C'}) \exp(2i\omega t) + (C' - \overline{C}) = 0$. On a $C' = \overline{C}$ en additionnant les égalités obtenues en faisant $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2\omega}$.

Inversement, si $C' = \overline{C}$, l'égalité précédente est vérifiée.

Comme $C' = \overline{C}$, il existe donc deux réels α, β tels que $C = \alpha + i\beta$ et $C' = \alpha - i\beta$.

Les solutions réelles sont donc définies par l'expression suivante où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$y(t) = e^{it} ((\alpha + i\beta) \exp(i\omega t) + (\alpha - i\beta) \exp(-i\omega t)) \Rightarrow y(t) = e^{it} (2\alpha \cos(\omega t) - 2\beta \sin(\omega t)). \blacksquare$$

Remarque : En langage algébrique, on dit que l'ensemble des solutions forme un plan vectoriel de dimension 2 (car celles-ci sont combinaisons linéaires de deux fonctions non proportionnelles).

Exemples : 1) $y'' - 5y' + 6y = 0$. L'équation caractéristique (E_c) $r^2 - 5r + 6 = 0$ admet deux solutions distinctes 2 et 3. Donc $S_0(K) = \{t \in I \mid \lambda e^{2t} + \mu e^{3t} \mid (\lambda, \mu) \in K^2\}$.

2) $y'' - 4y' + 4y = 0$. (E_c) admet une solution double 2 ; d'où $S_0(K) = \{t \in I \mid (\lambda t + \mu) e^{2t} \mid (\lambda, \mu) \in K^2\}$.

3) $y'' + \omega^2 y = 0$; avec $\omega \in \mathbb{R}^*$. (E_c) $r^2 + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -\omega^2 \Leftrightarrow r = \pm i\omega$ donc deux racines complexes conjuguées. D'où $S_0(\mathbb{R}) = \{t \in I \mid \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t) \mid (\lambda, \mu) \in K^2\}$.

Exercice : Déterminer les solutions réelles et complexes des équations différentielles suivantes :

1) $y'' + y' + y = 0$

2) $y'' - i y' = 0$.

Solution : 1) $(E_c) : r^2 + r + 1 = \left(r + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(r + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc $r = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $r' = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\Delta \neq 0$ dans $\mathbb{C}$).

Les solutions complexes de l'équation homogène : $y'' + y' + y = 0$ sont donc les fonctions :

$$y(t) = \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \left(C \exp\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C' \exp\left(-i\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \text{ avec } (C, C') \in \mathbb{C}^2.$$

Les solutions réelles, i.e celles qui sont égales à leurs conjugués sont :

$$y(t) = \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \left(C \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C' \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \text{ avec } (C, C') \in \mathbb{R}^2 (\Delta < 0 \text{ dans } \mathbb{R}).$$

Dans les deux cas, on voit que les solutions tendent vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$ puisque on a : $|y(t)| \leq (|C| + |C'|) \exp\left(-\frac{t}{2}\right)$.

2) $(E_c) : r^2 - i r = 0 \Leftrightarrow r(r - i) = 0$. Donc $r = 0$ ou $r = i$. On en déduit $S_0(\mathbb{C}) = \{t \in I \mid \lambda_1 + \lambda_2 e^{ix} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\}$.

Cherchons les solutions réelles : soit λ_1, λ_2 fixés tels que $\forall x \in I, y_0(x)$ soit réel.

On a : $y_0(x) = \lambda_1 + \lambda_2 (\cos x + i \sin x)$; d'où $\text{Im}(y_0(x)) = \text{Im}(\lambda_1) + \text{Im}(\lambda_2) \cos x + \text{Re}(\lambda_2) \sin x$. Donc $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 = 0$.

Finalement $S_0(\mathbb{R}) = \{t \in I \mid \lambda_1 \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}\}$. ♦

3 – Résolution de (E)

a) Solution générale de (E)

Définition : On appelle **solution particulière** de (E), une solution de (E).

Proposition 3 : Structure des solutions de (E)

L'ensemble $S(K)$ des solutions de (E) sur I est l'ensemble de la somme d'une solution particulière y_p sur I de (E) et d'une solution y_0 sur I de (E_0) .

Preuve : Puisque y_p est une solution particulière de (E) sur I , $\forall t \in I, ay_p''(t) + by_p'(t) + cy_p(t) = f(t)$ (1).

* Désignons par $y_0 \in S_0(K)$, i.e solution de (E_0) , $\forall t \in I, ay_0''(t) + by_0'(t) + cy_0(t) = 0$ (2).

Par addition de (1) et (2), $\forall t \in I, a(y_p''(t) + y_0''(t)) + b(y_p'(t) + y_0'(t)) + c(y_p(t) + y_0(t)) = f(t)$.

Donc $y = y_p + y_0$ solution de (E) $\Rightarrow y_p + S_0(K) \subset S(K)$.

* Désignons par $y \in S(K)$, i.e solution de (E) sur I , $\forall t \in I, ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$ (3).

Par soustraction de (3) par (1), $a(y''(t) - y_p''(t)) + b(y'(t) - y_p'(t)) + c(y(t) - y_p(t)) = 0$.

Donc $y_0 = y - y_p$ est solution de (E_0) et $y = y_p + y_0 \in y_p + S_0(K)$. Donc $S(K) \subset S_0(K) + y_p$ i.e $S(K) = y_p + S_0(K)$. ■

Remarque : En langage algébrique, on dit que l'ensemble $S = y_p + S_0$ des solutions de (E) forme un espace affine contenant y_p et de direction S_0 .

Proposition 4 : Principe de superposition des solutions

Soit $g : I \rightarrow K$ une fonction continue et $(E_g) : ay'' + by' + cy = g(t)$.

Si y et y_g sont solutions sur I de (E) et (E_g) , alors pour $(\lambda, \mu) \in K^2$, $\lambda y + \mu y_g$ est solution sur I de $ay'' + by' + cy = \lambda f(t) + \mu g(t)$.

Preuve : On a par hypothèse, $\forall t \in I, ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$ et $\forall t \in I, ay_g''(t) + by_g'(t) + cy_g(t) = g(t)$.

Multiplions par λ et μ , sommions et utilisons la linéarité de la dérivation :

$$a(\lambda y''(t) + \mu y_g''(t)) + b(\lambda y'(t) + \mu y_g'(t)) + c(\lambda y(t) + \mu y_g(t)) = \lambda f(t) + \mu g(t).$$

Donc $\lambda y + \mu y_g$ est solution de l'équation différentielle indiquée. ■

Remarque : On peut généraliser, i.e si $f = \sum_{k=1}^n f_k$ et si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on dispose d'une solution particulier y_k de l'équation $ay'' + by' + cy = f_k$, alors $\sum_{k=1}^n y_k$ est solution particulière de (E).

b) Problème de Cauchy

Théorème 3 : Théorème de Cauchy-Lipchitz

Soit $(t_0, y_0, y_0') \in I \times K^2$. Il existe une unique solution ϕ de (E) sur I vérifiant $\phi(t_0) = y_0$ et $\phi'(t_0) = y_0'$.

Preuve : On obtient cette solution en faisant le changement de fonction inconnue $y(t) = e^{rt} u(t)$ où r racine de (E_c) et en déterminant u et y à l'aide des conditions initiales.

On pose $y(t) = e^{rt} u(t) \Rightarrow u(t) = e^{-rt} y(t)$. On obtient par dérivation : $y'(t) = e^{rt} (u'(t) + r u(t))$ et $y''(t) = e^{rt} (u''(t) + 2r u'(t) + r^2 u(t))$. En reportant et en tenant compte de $ar^2 + br + c = 0$, puis en simplifiant par e^{rt} on constate que y est solution de (E) ssi u est solution de $(E') : au''(t) + (2ar + b)u'(t) = e^{-rt} f(t)$; u' solution d'une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre : $u(t) = e^{rt} y(t)$, $u'(t) = e^{-rt} (y'(t) - ry(t))$, il est équivalent de chercher :

* une solution y de (E) telle que $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0'$

* une solution u de (E') telle que $u(t_0) = e^{-rt_0} y_0, u'(t_0) = e^{-rt_0} (y_0' - r y_0)$.

Comme il existe une seule solution u' de (E') telle que $u'(t_0) = e^{-rt_0} (y_0' - r y_0)$, comme l'intégration de u' compte tenu de la condition d'intégration $u(t_0) = e^{-rt_0} y_0$ donne aussi une unique solution sur I, le résultat est prouvé. ■

Remarque : La seule solution telle que $y(t_0) = y'(t_0) = 0$ est la solution nulle.

Exercice : Déterminer les solutions réelles de $y'' + 4y' + 4y = 18 \cosh t$ (*), avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Solution : $(E_c) : r^2 + 4r + 4 = 0$. On a $\Delta = 16 - 16 = 0$, donc $r = -\frac{4}{2} = -2$ racine double.

Donc $y(t) = (Ct + C') e^{-2t}$, $C, C' \in \mathbb{R}$.

Avec la méthode précédente, on pose $y(t) = e^{-2t} u(t)$.

$y'(t) = e^{-2t} (u'(t) - 2u(t))$ et $y''(t) = e^{-2t} (u''(t) - 4u'(t) + 4u(t))$. En reportant dans (*), on a

$$u''(t) = 18 \cosh t e^{2t} = 9(e^{3t} + e^t).$$

Par intégration, on en déduit $u'(t) = 9 \left(\frac{e^{3t}}{3} + e^t \right) + a = 3e^{3t} + 9e^t + a$, avec $a \in \mathbb{R}$ donc $u(t) = e^{3t} + 9e^t + at + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

D'où $y(t) = e^{-2t} u(t) = e^t + 9e^{-t} + (at + b)e^{-2t}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Comme $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

On trouve $y(0) = 1 + 9 + b \Leftrightarrow b = -10$. $y'(t) = e^t - 9e^{-t} + a e^{-2t} - 2(at + b)e^{-2t}$ donc $y'(0) = -8 + a - 2b \Leftrightarrow a = -12$. ♦

Remarque : Si $a, b, c, y_0, y_0' \in \mathbb{R}$, et si f est à valeurs réelles, on peut vérifier que la solution ϕ du problème de Cauchy est à valeurs réelles. La méthode proposée conduit à une solution a priori complexe, mais on voit par conjugaison $\bar{y}$ solution du même problème de Cauchy. Par unicité, cette solution est donc égale à son conjugué, ce qui établit qu'elle est réelle.

c) Cas où le second membre est particulier

Proposition 5 : Second membre sous la forme exponentielle-polynôme

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, P une fonction polynôme à coefficients dans K et l'équation différentielle linéaire $(E') : a y'' + b y' + c y = e^{\lambda t} P(t)$.

Alors (E') a au moins une solution particulière de la forme $t \mapsto e^{\lambda t} Q(t)$ où Q est une fonction-polynôme à coefficients dans K , de degré égal à :

1/ $d^\circ Q = d^\circ P$, si $a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0$ (la fonction polynôme Q est unique)

2/ $d^\circ Q = d^\circ P + 1$, si λ est racine simple de $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, mais Q n'est pas unique.

3/ $d^\circ Q = d^\circ P + 2$, si λ est racine double de $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, mais Q n'est pas unique.

Preuve : $P(t) = p_n t^n + \dots + p_1 t + p_0$ avec $d^\circ P = n$, donc $p_n \neq 0$.

On cherche une solution du type $y = e^{\lambda t} (Q(t))$, de sorte qu'on ait : $y'(t) = e^{\lambda t} (Q'(t) + \lambda Q(t))$ et $y''(t) = e^{\lambda t} (Q''(t) + 2\lambda Q'(t) + \lambda^2 Q(t))$

En reportant dans (E), on obtient après simplification par $e^{\lambda t} \neq 0$, $aQ''(t) + (2a\lambda + b)Q'(t) + (a\lambda^2 + b\lambda + c)Q(t) = P(t)$.

Supposons $a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0$: le membre de gauche est de degré n ssi $d^\circ Q = n$ donc $Q(t) = q_n t^n + \dots + q_1 t + q_0$.

L'égalité précédente équivaut à la suivante : $a \sum_{k=2}^n k(k-1)q_k t^{k-2} + (2a\lambda + b) \sum_{k=1}^n k q_k t^{k-1} + (a\lambda^2 + b\lambda + c) \sum_{k=0}^n q_k t^k = \sum_{k=0}^n p_k t^k$.

En posant $j = k - 2$; $j = k - 1$; $j = k$; $j = k$, puis en identifiant les coefficients des deux membres, on obtient :

$$\begin{cases} (a\lambda^2 + b\lambda + c)q_n = p_n \\ (a\lambda^2 + b\lambda + c)q_{n-1} + (2\lambda a + b)nq_n = p_{n-1} \\ (a\lambda^2 + b\lambda + c)q_{n-2} + (2\lambda a + b)(n-1)q_{n-1} + a_n(n-1)q_n = p_{n-2} \\ \dots \\ (a\lambda^2 + b\lambda + c)q_0 + (2\lambda a + b)q_1 + 2a q_2 = p_0 \end{cases}$$

Comme $a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0$, la première ligne détermine q_n , l'autre q_{n-1} , ... On en déduit qu'il existe un polynôme Q et un seul répondant au problème.

On traitera de façon analogue le cas où λ est racine simple ou double de P . ■

Exercice : Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle $(E_1) : y'' + y' + y = 2 \cos t$.

Solution : On cherche d'abord une solution particulière de (E_1) .

Comme $2 \cos t = e^{it} + e^{-it}$; on cherche une telle solution en superposant deux solutions particulières des deux équations $y'' + y' + y = e^{it}$ et $y'' + y' + y = e^{-it}$. D'après la proposition 5, on peut chercher de telles solutions sous les formes $t \mapsto C e^{it}$ et $t \mapsto C e^{-it}$; ce qui conduit aux solutions $-i e^{it}$ et $i e^{-it}$.

Par superposition, $t \mapsto -i(e^{it} - e^{-it}) = 2 \sin t$ est solution de $y'' + y' + y = 2 \cos t$. Comme la solution générale de l'équation est somme de cette solution particulière et de la solution générale déjà obtenue de l'équation homogène, les solutions sont :

$$y(t) = 2 \sin t + \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) \right) \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Voici une représentation de quelques courbes intégrales de l'équation (E_1) . On remarque que, quelles que soient les conditions initiales choisies, leur comportement asymptotique est le même.

