Leçon n°70 : Fonctions logarithmes

Prés-requis: continuité, dérivabilité d'une fonction
définition et propriété de l'intégrale (relation d'ordre,..)
puissance rationnelle d'un nombre réel
généralisation du théorème des valeurs intermédiaires

I. Fonction logarithme népérien

Définition: On appelle fonction logarithme népérien la primitive sur l'intervalle]0,+∞[de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. On note cette fonction ln.

Remarque: Il découle directement de la définition que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^{+*}$ ln(x)= $\int_1^x \mathrm{d}t/t$

Propriétés: 1) la fonction ln est définie, continue et dérivable sur]0,+∞[et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$
2) la fonction ln est strictement croissante sur]0,+∞[
3) ln(x)<0 <=> 0<x<1 et ln(x)≥0 <=> x≥1

Dem: 1) f: t→1/t est continue sur]0,+∞[donc intégrable sur chaque intervalle fermé borné [a,b] contenu dans $]0,+\infty[$
par conséquent, ∀x >0, f est intégrable sur [0,x]
x→ln(x) dérivable sur]0,+∞[car F:x→ $\int_1^x (\frac{\mathrm{d}t}{t})$ est continue sur]0,+∞[et dérivable sur]0,+∞[, $(\ln(x))'=(\int_1^x (\frac{\mathrm{d}t}{t}))'=\frac{1}{x}$

2) $\frac{1}{x}>0$ $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ => ln strictement croissante sur]0,+∞[

3) le signe de ln(x) est fournit par le sens de variation de ln
ln(1)=0 et ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$
pour x>1, ln(x)= $\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ est strictement positive car $\frac{1}{t}$ est positive.
pour x<1, ln(x)= $\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = -\int_x^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t <0$ car $\int_x^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t>0$

II. Propriétés algébriques

Théorème: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $u:I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I.
On a ln |u| est dérivable sur I et (ln |u|)'= $\frac{u'}{u}$

Dem: Soit $x_0 \in I$, comme u est continue et ne s'annule pas en x_0, il existe un voisinage V de x_0 tel que sur $V \cap I$ la fonction u garde un signe constant, le même que $u(x_0)$.
Si $u(x_0)<0$ alors $\forall x \in V \cap I$ (ln |u(x)|)= (ln -u(x)) et (ln |u(x)|)'= $(\frac{1}{-u(x)}) \times (-u'(x))$
(par le théorème de dérivation d'une fonction composée).
De même pour $u(x_0)>0$.

Application: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $u:I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, ne s'annulant pas sur I.
On a $\forall$ a,b$\in$I $\int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)} dx$ =ln |u(x)|

Exemple 1: $\int_{-1}^{1} \frac{2x-1}{x^2-x-6} dx = [\ln|x^2-x-6|]_{-1}^{1} = \ln 6 - \ln 4$

Exemple 2: $\int_{-1}^{0} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}.\arccos(x)} dx$ =ln(pi/2)-ln(pi)

Théorème fondamentale: $\forall$ a,b$\in \mathbb{R}^{+*}$ ln(ab)=ln(a)+ln(b)

Dem: Soit a $\mathbb{R}^{+*}$on considère la fonction $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$
$x \to \ln(ax)$
f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$
et f ’(x)= $\frac{a}{ax}=\frac{1}{x}$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, f(x)=ln(x)+k, k $\in$ R.
Pour x=1 on trouve k=f(1)=ln(a).
Donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, ln(ax)=ln(a)+ln(x).

Remarque: Le logarithme népérien a été inventé par M.Neper en 1614. Le but était de changer la multiplication en addition. Ce qui a permit à l'époque de simplifier beaucoup le calcul sur les machines.

Corollaire: $\forall$ a,b$\in \mathbb{R}^{+*}$, pour tout p $\in \mathbb{Q}$
1)ln(a/b)=ln(a)-ln(b)
2)ln(1/b)= - ln(b)
3)ln(a^p)=pln(a)

Dem: 1) ln(a)=ln(b×(a/b))=ln(b)+ln(a/b) d'où ln(a/b)=ln(a)-ln(b)

2) ln(1/b)=ln(1)-ln(b)= - ln(b)

3) 1[ère] méthode : posons $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}$ $f(x)=\ln(x^p)$

$f'(x)=px^{p-1}/x^p=p/x$ => $f(x)=p.\ln(x)+k$ $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, k\in\mathbb{R}$

pour x=1, k=0

2[ème] méthode : soit $p\in\mathbb{N}$, par récurrence sur p on montre que $\ln(a^p)=p.\ln(a)$

pour $p\in\mathbb{Q}$, il suffit d'étudier le cas de $\ln(a^{1/r})$ avec $r\in\mathbb{N}$

$\ln(a)=\ln((a^{1/r})r)=r.\ln(a^{1/r})$ donc $\ln(a^{1/r})=\ln(a)/r$

III. Étude de la fonction logarithme

1) Limite aux bornes de]0,+∞[

Théorème: 1) $\lim_{x\to+\infty}(\ln(x))=+\infty$ 2) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\ln(x))=-\infty$

Dem: 1) On veut montrer que : $\forall A>0\ \exists n>0$ tq $x>n \Rightarrow \ln(x)>A$

$\ln(2)>0$, $\forall A>0\ \exists n\in\mathbb{N}$ tel que $\ln(2^n)>A$ (car $\ln(2^n)=n\ln(2)$).

De plus, comme ln est strictement croissante et comme la suite nln(2) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$: pour tout $x>2^n$ $\ln(x)>A$ (car $\ln(x)>\ln(2^n)>A$)

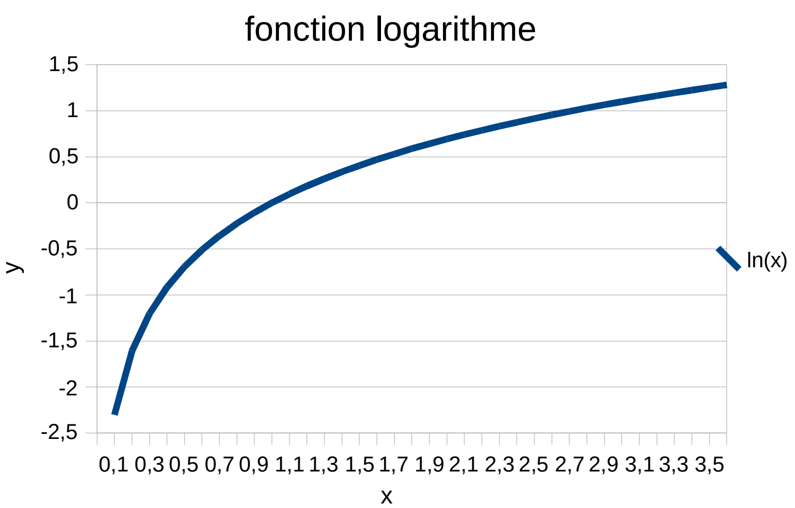
donc $\lim_{x\to+\infty}(\ln(x))=+\infty$

2) On a $\forall x>0$ $\ln(x)=-\ln(1/x) \Leftrightarrow -\ln(x)=\ln(1/x)$ d'où $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\ln(x)) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\left(\ln\frac{1}{x}\right)$

En posant $y=\frac{1}{x}$ on a $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\ln(x)) = \lim_{y\to\infty} -(\ln(y))=-\infty$

2) Représentation graphique:

Graphe : *sur calculatrice*



Remarque: Le graphe de la fonction ln est situé en dessous de ses tangentes car la fonction ln est concave(sa dérivée seconde est négative ou nul : $(\ln(x))''=\frac{-1}{x^2}<0$).

Exemple : la tangente en 1 a pour équation y=x-1 *la tracer sur la calculatrice*

3) Le nombre e et quelques limites.

On a vu que la fonction ln est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Avec les deux limites précédentes, on en déduit que ln est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$ (généralisation du théorème des valeurs intermédiaires), ce qui donne un sens à la définition suivante :

Définition: L'unique réel strictement positif dont le logarithme népérien est égal à 1 est noté e

Proposition:
1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x)=0$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$

Dem: 1) $\forall t\geqslant 1$ on a $\frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{\sqrt{t}}$ donc $\forall x\geqslant 1$ réel et par positivité des fonctions et les relations d'ordre sur les intégrales on a $\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ qui par calcul nous donne

$\ln(x)\leqslant 2\sqrt{x}-2$

comme x>0, on a : $0\leqslant\frac{\ln(x)}{x}\leqslant\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x}$

et $\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x}$ *tend vers* $+0$ *quand* x *tend vers* $+\infty$

donc par le théorème des gendarmes on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$

2) Posons $X=\frac{1}{x}$ pour x $\to 0^+$ X $\to+\infty$ d'où $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln(\frac{1}{X})}{X}=\lim\limits_{X\to+\infty}-\frac{\ln(X)}{X}=0$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x}=\ln(1)'=1$

4) Posons X=1+x pour x$\to$0 X$\to$1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(X)}{(X-1)}=1$

IV. Fonctions logarithmes en base a.

Définition: Soit $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, la fonction $\log_a : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ est appelé fonction logarithme en base a.
$x \to \ln(x)/\ln(a)$
Si a=10, on la note $\log_{10}$ et on l'appelle fonction logarithme décimal.

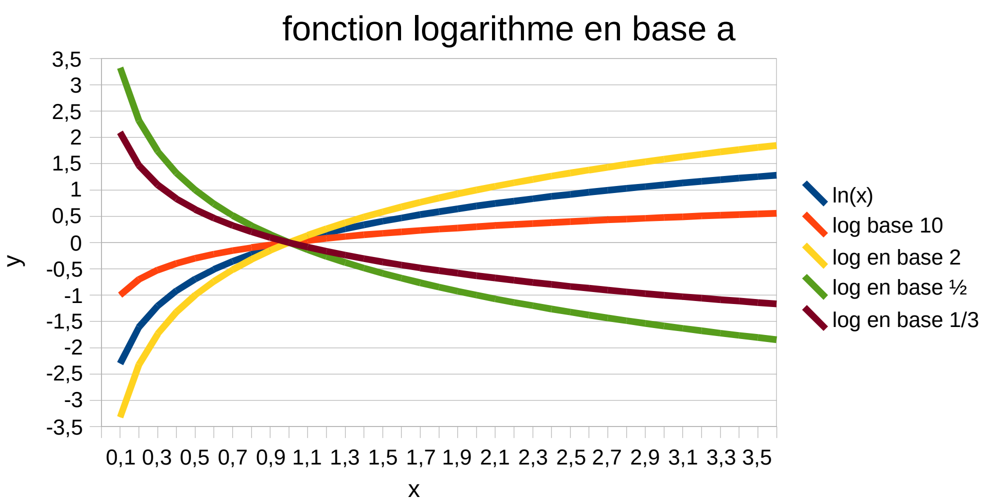
Remarque: 1) $\log_a(a)=1$
2) la fonction ln est la fonction logarithme de base e

Propriétés: 1) $\log_a(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivé $\frac{1}{(x\ln(a))}$
2) $\log_a(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ si a>1 et décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ si 0<a<1

3) $\forall$ x, y $\in \mathbb{R}^{+*}$ $\log_a(xy)=\log_a(x)+\log_a(y)$

Dem: 1) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ $\log_a(x)=\frac{\ln(x)}{(\ln(a))}$ ln(x) est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $\log_a(x)$ aussi
2) $x \in \mathbb{R}^{+*}$ donc le signe de $(\log_a(x))'$ ne dépend que de ln(a).
Si a>1 $\log_a(x)'>0$ => $\log_a(x)$ est strictement croissante
Si 0<a<1 $\log_a(x)'<0$ => $\log_a(x)$ est strictement décroissante
3) Soient $x,y \in \mathbb{R}^{+*}$ $\log_a(xy)=\frac{\ln(xy)}{(\ln(a))} = \frac{\ln(x)+\ln(y)}{(\ln(a))}=\log_a(x)+\log_a(y)$

Graphe: *sur calculatrice*



V. Application **Encadrement de e**

Définition: La bijection réciproque de la fonction logarithme népérien est apelée fonction exponentielle de base e et est noté exp.

Propriété: Pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$, on a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(1+n)}$

Exemple: Pour n=10^4, on a : e ∈[2,71815;2,71842]

Dem: 1) Montrons que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$

∀ X ∈ $\mathbb{R}^{+*}$ ln(X)⩽X-1, car X-1 est une tangente et que ln(X) est concave

en particulier cela reste vrai pour $X=1+\frac{1}{n}$ avec n ∈$\mathbb{N}^*$ d'où: $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$

donc $\exp\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = 1+\frac{1}{n} \leqslant \exp\left(\frac{1}{n}\right)$ (car la fonction exp est strictement croissante : même sens de variation que sa fonction réciproque)

De plus, pour tout x ∈ $\mathbb{R}^{+*}$ et n ∈$\mathbb{Q}$: on a ln(x^n)=n.ln(x) donc exp(ln(x^n))=exp(n.ln(x))
C'est à dire x^n=exp(n.ln(x))

Donc, en particulier, pour $x=\exp\left(\frac{1}{n}\right)$, on a $\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=\exp\left(n.\frac{1}{n}\right)=e$ **[1]**

D'où le résultat : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$

2) Montrons que $e \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(1+n)}$

D'après le schéma ci-contre, ∀x ∈ $\mathbb{R}^+$ $x\times\left(\frac{1}{x+1}\right) \leqslant \int_1^{1+x}\left(\frac{dt}{t}\right)$

x+1>0 donc $x\leqslant(x+1)\times\ln(1+x)$

En particulier, pour $x=\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}\leqslant\left(\frac{1}{n}+1\right)\times\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}\right)$

D'où $\exp\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant\left(\frac{1}{n}+1\right)^{1+\frac{1}{n}}$ car la fonction exp est croissante

Donc, d'après **[1]**, on a e$\leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(1+n)}$