Leçon 65: Inégalité des accroissements finis. Exemples d'applications à l'étude de suites et de fonctions. Calculatrice.

Pré-requis: -***Théorème de Rolle***: Soit f :[a,b]$\rightarrow \Re$,avec a,b$\in \Re$ (a<b), continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b[tel que f(a)=f(b) alors il existe un c $\in$]a,b[tel que f '(c)=0.

***Dem*:** Soit f une fonction continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b[tel que f(a)=f(b).[a,b] est un intervalle fermé borné. Or toute fonction continue sur un fermé borné est bornée et atteint ses bornes. Alors m $\leq$f(x)$\leq$ M. De plus f passe par m en c et par M en d.
1er cas: m=M alors la fonction est constante sur [a,b], f(x)=m=M alors f '(x)=0 et donc tout point de]a,b[convient.
2ème cas:m$\neq$M, f(a)=f(b) alors si M est atteint en a alors m ne sera jamais atteint (ni en a ni en b). Donc il existera un point c dans [a,b] où f atteint cet extremum. Alors f '(c)=0

- suite de Cauchy: $\forall \varepsilon>0,\exists n_0\in N,\forall (p,q)\in N^2$ (p>n_0 et q>n_0) => $|u_p-u_q|<\varepsilon$ (ou TVI selon le Thm du point fixe qu'on choisi)
- continuité, dérivabilité.

I. Théorème des accroissements finis

Soit I=[a,b] avec a,b$\in \Re$ (a<b)

Théorème 1: Soit f :I$\rightarrow \Re$ une application continue sur I et dérivable sur]a,b[. Alors il existe au moins un point c$\in$]a,b[tel que f(b)-f(a)=(b-a)f '(c) ie f '(c) = $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (b$\neq$a)

Remarque: Il n'y a pas forcément unicité du point c.

Dem:Considérons la fonction suivante g:I$\rightarrow$R

$$x \mapsto f(b)-f(x)+(b-x)*\frac{(f(a)-f(b))}{b-a}$$

Comme f est continue sur I et dérivable sur]a,b[alors g est continue sur I comme somme de fonctions continues sur I et dérivable sur]a,b[comme somme de fonctions dérivables sur]a,b[.

$$g(a)=f(b)-f(a)+(b-a)*\frac{(f(a)-f(b))}{b-a}=0$$

$$g(b)=f(b)-f(b)+(b-b)*\frac{(f(a)-f(b))}{b-a}=0$$

alors g(a)=g(b). Toutes les hypothèses du théorèmes de Rolle dont vérifiées, ainsi il existe un c $\in$]a,b[tel que g'(c)=0.

On a $g'(x)=-f'(x)-\frac{(f(a)-f(b))}{b-a}$ en particulier pour c$\in$]a,b[on a $g'(c)=-f'(c)-\frac{(f(a)-f(b))}{b-a}$
et donc d'après le théorème de Rolle g'(c)=0 donc $f'(c)=\frac{(f(b)-f(a))}{b-a}$ (b$\neq$a) ie f(b)-f(a)=(b-a)f '(c)

Interprétation graphique:(transparent) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $(b\neq a)$ représente la pente de la droite passant par les points $A(a,f(a))$ et $B(b,f(b))$; $f'(c)$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe Γ représentant f au point $C(c,f(c))$.
Dire qu'il existe un $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ c'est dire qu'il existe au moins un point de Γ tel qu'en ce point sa tangente est parallèle à (AB).

Dessin:(transparent)

II. Inégalité des accroissements finis

Théorème 2: Soient f et g définies et continues sur I et dérivable sur]a,b[telle que pour tout $t\in]a,b[$, $f'(t)\leq g'(t)$ alors pour tout $x,y\in I$ avec $x<y$ on a $f(y)-f(x)\leq g(y)-g(x)$.

Dem: Soit $h(x)=g(x)-f(x)$ et $x,y\in I$ tel que $x<y$. g est bien continue sur I et dérivable sur]a,b[, alors d'après le théorème des accroissements finis il excite un $c\in]a,b[$ tel que pour $(x\neq y)$ $\frac{h(y)-h(x)}{y-x}=h'(c)=g'(c)-f'(c)\geq 0$ donc $h(x)\leq h(y)$ ie $f(y)-f(x)\leq g(y)-g(x)$.

Corollaire 1: Soit $f:I\rightarrow\mathfrak{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur]a,b[. S'il existe m et $M\in\mathfrak{R}$ tels que, pour tout $t\in]a,b[$, $m\leq f'(t)\leq M$ alors pour tout $x,y\in I$ $m\leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\leq M$, $(x\neq y)$.

Dem: Soit $f:I\rightarrow\mathfrak{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur]a,b[tel que pour tout $t\in]a,b[$ $f'(t)\leq g'(t)$ avec $g(t)=Mt$ et $h'(t)\leq f'(t)$ avec $h(t)=mt$. En appliquant le théorème 2 on obtient alors que pour tout $x,y\in I$ avec $x<y$ et $x\neq y$,$h(y)-h(x)\leq f(x)-f(y)\leq g(y)-g(x)$ ce qui équivaut à $m(y-x)\leq f(x)-f(y)\leq M(y-x)$ ie $m\leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\leq M$

Interprétation graphique:(transparent) Pour tout $x\in]a,b[$, on a $m\leq f'(x)\leq M$, c'est à dire qu'en tout point de la courbe Γ représentant la fonction f, la pente de la tangente est comprise entre m et M.
On fait donc passer par A une droite D_m de pente m et D_M de pente M et par B une droite D'_m de

pente m et D'_M de pente M.
L'inégalité des accroissements finis s'interprète en disant que sur]a,b[Γ est comprise dans le parallélogramme formé des 4 points d'intersections des ses 4 droites.

<u>Dessin:</u>(transparent)

<u>Corollaire 2:</u> Soit I un intervalle ouvert de $\Re$, et $f:I\rightarrow\Re$ une application continue et dérivable sur I. S'il existe un M>0 tel que pour tout $x\in I$, $\|f'(x)\|\leq M$ alors pour tout x et $y\in I$, $\|f(x)-f(y)\|\leq M\|x-y\|$.

<u>Dem:</u> Déduit directement du corollaire 1

III. <u>Applications</u>

1. <u>A l'étude de fonctions</u>

- <u>Encadrement:</u>

<u>Exercice 1:</u>(transparent) Montrer que pour tout $x\in]-\Pi/2, \Pi/2[$, $|\tan(x)|\geq|x|$.

<u>Solution</u>: Soit $f:]-\Pi/2, \Pi/2[\rightarrow\Re$
$t \mapsto \tan(t)$

f est continue sur $]-\Pi/2, \Pi/2[$ et dérivable sur $]-\Pi/2, \Pi/2[$. On a $f'(t)=1+\tan^2(t)$ donc pour tout $t\in]-\Pi/2, \Pi/2[$, $f'(t)\geq1$. Appliquons l'inégalité des accroissements finis entre 0 et x avec $g'(x)=1$ alors $g(x)=x$ alors, pour $x\in]-\Pi/2, \Pi/2[\setminus\{0\}$, on a $\tan(x)-\tan(0)\geq x-0$ et donc $|\tan(x)|\geq|x|$.

<u>Exercice2:</u>(transparent) Montrer que pour tout $x\geq -1/2$ on a $0\leq|x-\ln(1+x)|\leq x^2$

<u>Solution:</u> Pour tout x > -1, posons $f(x)=x-\ln(1+x)$, on a $f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$

ainsi pour tout $x\geq -1/2$ on a $f'(x)\leq 2|x|$ donc $f'(x)\leq g'(x)$ avec $g(x)= \begin{cases} x^2 \text{ si } x\in[0,+\infty[\\ -x^2 \text{ si } x\in[-1/2, 0]\end{cases}$

on a alors $|f'(x)|\leq g'(x)$ et par le théorème 2 appliqué entre 0 et x avec $x\geq -1/2$

on a $|f(x)-f(0)|\leq g(x)-g(0)$ ce qui nous donne donc $0\leq|x-\ln(1+x)|\leq x^2$

Exercice 3:(transparent) En considérant la fonction $f(x)=x-\sin(x)$et en dérivant 3 fois cette fonction, montrer que pour tout $x \geq 0$, $x-\frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x$

Solution: $f'(x)=1-\cos(x)$, $f''(x)=\sin(x)$,$f'''(x)=-\cos(x)$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante. De plus f(0)=0 alors f est positive donc pour $x \geq 0$ $\sin(x) \leq x$.
$-1 \leq f'''(x) \leq 1$ (ie $|f'''(x)| \leq 1$) alors d'après le théorème 2 appliqué entre 0 et x($x \geq 0$) on a $-x \leq f''(x) \leq x$ car $f''(0)=0$. En répétant l'opération on obtient $\frac{-x^2}{2} \leq f'(x) \leq \frac{x^2}{2}$ .On recommence une dernière fois, ce qui nous donne $-\frac{x^3}{3!} \leq f(x) \leq \frac{x^3}{3!}$

on a donc bien pour tout $x \geq 0$, $x-\frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x$

- Variations d'une fonction

Théorème 3: Soit $f:I\to\Re$, une application continue sue I et dérivable sur]a,b[:   1. f est constante sur I ssi $\forall\ x\in I\ f'(x)=0$.   2. f est croissante sur I ssi $\forall\ x\in I\ f'(x)\geq 0$.   3. f est décroissante sur I ssi $\forall\ x\in I\ f'(x)\leq 0$.

Dem: 1. => si $\forall\ x\in I\ f'(x)=0$, prenons $a,b \in I$ alors le théorème des accroissements finis appliquer à f nous dit $\exists\ c \in\ ]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$. En particulier prenons x=c alors $f'(c)=0$ et donc $f(b)-f(a)=0$ donc $f(a)=f(b)$ et f est constante.

<= f est constante<=> à f croissante et f décroissante <=>$f'(x) \geq 0$ et $f'(x)\leq 0$ <=> $f'(x)=0$

2. et 3. =>même méthode que 1.

<=Supposons f croissante sur I,soit $x\in\ ]a,b[$ il existe un $c\in I\backslash\{x\}$ tel que $\frac{f(c)-f(x)}{c-x} \geq 0$ (car f est croissante) et alors par passage à la limite quand c tend vers x on obtient $f'(x) \geq 0$

De meme pour une fonction décroissante.

Exercice 4:(transparent) Etudier les variations de $f:[-2,2] \to \Re$
$x \mapsto x^3-x^2-x+1$

Solution:f est dérivable et continue sur [-2,2], $f'(x)=3x^2-2x-1$

$f'(x)=0 \iff x1=-1/3$ et $x2=1$
$f'(x) > 0 \iff x > x1$ et $x < x2$
$f'(x) < 0 \iff x1 < x < x2$

tableau de signe et de variations.

- Prolongement de la dérivée en une borne

Théorème 4: Soit f une fonction continue sur I et dérivable sur]a,b[, si $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}}$ f '(x) existe et vaut L alors f est dérivable à droite en a et f_d'(a)=L (idem à gauche).

Dem: Pour tout ε > 0, il existe un h > 0 tel que pour tout x ∈]a,a+h[, L-ε ≤ f '(x) ≤ L+ε. On applique le théorème 2 entre a et a+h ce qui nous donne L-ε $\leq \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq$ L+ε. Puisque c'est vrai pour tout ε > 0 on conclut par passage à la limite lorsque h tend vers 0 que L-ε ≤ f '(a) ≤ L+ε.

et donc f_d'(a)=L (idem à gauche)

2. A l'étude de suites

- Par le théorème du point fixe:

Théorème du point fixe: Soit I un intervalle non vide fermé et f une fonction de I dans I de classe C^1 sur I.
S'il existe $k \in]0,1[$ tel que pour tout $x \in I, |f'(x)| < k$
Alors : pour tout $u_0 \in I$, la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, converge vers l'unique point fixe l de f sur I.
De plus : $\forall n \in N, |u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$

Dem: $\forall n \in N, |u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$

D'après le théorème des accroissements finis (applicable à f sur $[u_n, l]$)
$\exists c_n \in]u_n, l[$ tel que $f(u_{n-1}) - f(l) = u_n - l = f'(c_n)(u_{n-1} - l)$
Donc $|u_n - l| = |f'(c_n)||u_{n-1} - l| \leq k|u_{n-1} - l|$
De proche en proche, on obtient le résultat

- La propriété des valeurs intermédiaires donne directement l'existence du point fixe.
- Unicité du point fixe : par l'absurde
  Supposons que l_1 et l_2 soient deux points fixes de f
  $|l_1 - l_2| = |f(l_1) - f(l_2)| \leq k|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$: contradiction
- $(u_n)_{n\in N}$ est de Cauchy ($\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, t.q. \forall p > q \geq n_0 : |u_p - u_q| < \varepsilon$)
  $|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq k|u_n - u_{n-1}|$ donc $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$

$$|u_{n+p} - u_n| \leq |u_{n+p} - u_{n+p-1}| + \ldots + |u_{n+1} - u_n| \leq (k^{n+p-1} + \ldots + k^n)|u_1 - u_0| \leq \frac{k^n - k^{n+p}}{1-k}|u_1 - u_0|$$

$$\leq \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0| \qquad \text{or } \lim_{n\to+\infty} \frac{k^n}{1-k} = 0$$

Donc $(u_n)_{n\in N}$ est de Cauchy, donc converge.

- I est fermé et f est continue sur I donc .

Remarque:ici on utilise un intervalle fermé borné donc on peut donner un autre enoncé du thm du point fixe qui n'utilise pas les suites de cauchy.Mais le TVI pour la démo de l'existence

Autre énoncé: Soit I un intervalle fermé borné, et f:I→I une application classe C^1 sur I . S'il existe $k\in]0,1[$ tel que pour tout $x\in I, |f'(x)|<k$

Alors : pour tout $u_0\in I$, la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$, converge vers l'unique point fixe l de f sur I .

De plus : $\forall n\in N, |u_n-l|\le k^n|u_0-l|$

Dem: Existence: Puisque f est contractante, f est continue et de plus f(I)$\subset$ I alors f vérifie les hypothèses du TVI alors l existe.

Unicité: même chose qu'au dessus

_$(u_n)_{n\in N}$ converge vers l: Si $(u_n)_{n\in N}$ converge vers l a fortiori $(u_{n+1})_{n\in N}$ aussi.De plus par continuité de f, f($(u_n)_{n\in N}$) converge vers f(l). Puisque (u_{n+1}) =f($(u_n)_{n\in N}$) et par unicité de la limite on a l=f(l).

Exercice 5:(transparent) Algorithme de Héron d'Alexandrie:

Soit (u_n), n appartenant à N, une suite définie pas $u_o=1$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}*(u_n+\frac{2}{u_n})$, I=[1,2].

- Conjecturer la limite à la calculatrice (calculatrice x∈ [1,10] et y ∈ [0,2]) sur un tableur et un graphique.

- Soit f:I→I une application continue sur I et dérivable sur]1,2[,
  $x\mapsto \frac{1}{2}*(x+\frac{2}{x})$

on peut alors appliquer le corollaire 2. Pour tout x ∈ I on a $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}$

$|f'(x)|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}\right|$ et $|f'(x)|\le 1/2$ or $1/2>0$ alors d'après le corollaire 3 on a pour tout u_n et $u_{n-1}\in$ I et pour tout n∈ N, $0\le f(u_n)-f(u_{n-1})\le (1/2)*(u_n-u_{n-1})$

alors $0\le u_{n+1}-u_n\le (1/2)^n*(u_1-u_0)$ or $u_0=1$ et $u_1=1,5$

d'où $0\le u_{n+1}-u_n\le (1/2)^n*(1,5-1)$

$0\le u_{n+1}-u_n\le (1/2)^n*(1/2)$

$0\le u_{n+1}-u_n\le (1/2)^{n+1}$

La suite (u_n) est de Cauchy donc elle converge et a pour limite L, la détermination de L ce fait par la résolution de f(x)=x (d'après le théorème du point fixe).

$f(x)=x \iff \frac{1}{2}*(x+\frac{2}{x})=x \iff x=\sqrt{2}$

Donc (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Exercice 6:(transparent) Etudier la suite définie pas u_o=1 et $u_{n+1} = (2+u_n)^{\frac{1}{2}}$, I=[1,3].

Soit Soit $f: I \to I$ une application continue sur I et dérivable sur]1,2[,

$x \mapsto (2+x)^{\frac{1}{2}}$

g est continue sur I et dérivable sur I; g'(x)= $\frac{1}{2\sqrt{2+x}}$ et |g'(x)| $\leq \frac{1}{2\sqrt{3}}$ (<1) alors d'après l'inégalité des accroissements finis on a u_n et $u_{n-1} \in$ I et pour tout n$\in$ N,

$0 \leq g(u_n)-g(u_{n-1}) \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(u_n-u_{n-1})$

alors $0 \leq u_{n+1}-u_n \leq (\frac{1}{2\sqrt{3}})^n (u_1-u_0)$ or u_0= 1 et $u_1=\sqrt{3}$

d'où $0 \leq u_{n+1}-u_n \leq (\frac{1}{2\sqrt{3}})^n (\sqrt{3}-1)$

La suite (u_n) est de Cauchy donc elle converge et a pour limite L, la détermination de L ce fait par la résolution de f(x)=x (d'après le théorème du point fixe).

f(x)=x <=> x =2.

Donc (un) converge vers 2.

- Rapidité de convergence:

Proposition : Avec les hypothèses du théorème précédent :

Si $f'(l)=0$, alors la convergence de $(u_n)_{n\in N}$ est rapide

Si $0<|f'(l)|<1$, alors la convergence de $(u_n)_{n\in N}$ est géométrique de coefficient $|f'(l)|$

Dem: $\lambda_n = \left|\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\right| = \left|\frac{f(u_n)-f(l)}{u_n-l}\right| = |f'(c_n)|$ où $c_n \in]u_n,l[$ d'après le théorème des accroissements finis

Et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = l$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(c_n) = f'(l)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = f'(l) = \lambda$ coefficient de convergence qui d'après la leçon 57 nous donne le résultat souhaité.

Lorsqu'il existe, λ est appelé coefficient de convergence de la suite.

Si $\lambda = 1$, la convergence est dite lente

Si $0<\lambda<1$, la convergence est dite géométrique de coefficient λ

Si $\lambda = 0$, la convergence est dite rapide

Suite de l'exercice 6: Dans cette exercice f '($\sqrt{2}$)=0 donc la suite $(u_n)_{n\in N}$ converge rapidement.

- Par comparaison (ou encadrement):

Exercice 7:(transparent) Étude de la suite $(u_n)_{n\in N}$, $u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}$

Soit $f : [x,x+1] \to \Re$, $x \in [0,+\infty[$
$t \mapsto \ln(t)$

f est continue sur $[x,x+1]$ et dérivable sur $[x,x+1]$ donc sur $]x,x+1[$. On a $f'(t)=\frac{1}{t}$ $t \neq 0$ et $t \in [x,x+1]$ alors $\frac{1}{x+1}\leq f'(t)\leq\frac{1}{x}$. Ainsi d'après l'inégalité des accroissements finis on a $\frac{1}{x+1}\leq f(x+1)-f(x)\leq\frac{1}{x}$ ie $\frac{1}{x+1}\leq\ln(x+1)-\ln(x)\leq\frac{1}{x}$. Par passage à la somme on obtient alors $\sum_{x=n}^{2n}\frac{1}{x+1}\leq\sum_{x=n}^{2n}(\ln(x+1)-\ln(x))\leq\sum_{x=n}^{2n-1}\frac{1}{x}$ <=> $\sum_{x=n+1}^{2n}\frac{1}{x}\leq\ln(2n)-\ln(n)\leq\sum_{x=n+1}^{2n}\frac{1}{x}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}$ <=> $u_n \leq \ln(2) \leq u_n +\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}$

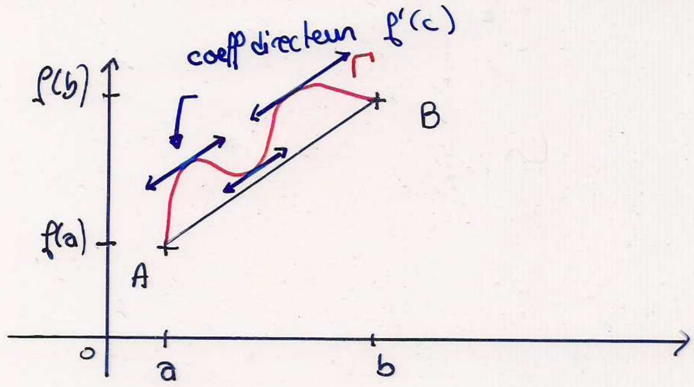
Alors a fortiori $u_n \leq \ln(2) \leq u_n +\frac{1}{n}$ d'où $0\leq \ln(2)- u_n\leq \frac{1}{n}$

Et par passage à la limite on a $\lim_{n\to 0}(\ln(2)-u_n)=0$ donc $\lim_{n\to 0}(u_n)=\ln(2)$.

Interprétation graphique :

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $(b \neq a)$ Représente la pente de la droite passant par les point $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$. $f'(c)$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe Γ représentant f au point $C(c, f(c))$.

Dire qu'il existe un $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ c'est dire qu'il existe au moins un point de Γ tel qu'en ce point sa tangente est parallèle à (AB).



interprétation graphique

Pour tout $x \in]a,b[$, on a $m \leq f'(x) \leq M$, c'est-à-dire qu'en tout point de la courbe Γ, la pente de la tangente est comprise entre m et M. On fait donc passer par A une droite D_m de pente m et D_M de pente M et par B une droite D'_m de pente m et D'_M de pente M.

L'inégalité des accroissements finis s'interprète en disant que sur $]a,b[$ Γ est comprise dans le parallélogramme formé des 4 points d'intersections de ces 4 droites.