

Leçon 64: Comparaison des fonctions: Domination, Prépondérance, Équivalence

Exemples et Applications

Prerequis - Fonctions d'une variable réelle: limites, continuité, dérivabilité

- Fonctions usuelles: $\sin$, $\cos$, $\exp$, $\ln$, x^x

- Voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$

Toute partie de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle ^{ouvert} contenant a si $a \in \mathbb{R}$
 $]b, +\infty[$ ou $]-\infty, b[$ si $a = \pm \infty$

Cadre Soit D un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in \bar{\mathbb{R}}$ un point adhérent à D .

On note $V(a)$ l'ensemble des voisinages de a .

Soit f, g, h, l des fonctions définies sur D .

I) Définitions

Définition 1 (i) On dit que f est dominée par g (ou que g domine f) au voisinage de a si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists V \in V(a) \quad \forall x \in V \cap D \quad |f(x)| \leq M |g(x)|$$

On note $f = o_a(g)$

(ii) On dit que f est négligeable devant g (ou g prépondérante devant f) au vois. de a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in V(a) \quad \forall x \in V \cap D \quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

On note $f = o_a(g)$

(iii) On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si

$$f \cdot g = o_a(g) \quad \text{et on note } f \sim g.$$

Proposition 1 (i) $f = o_a(g) \Leftrightarrow \exists V \in V(a)$ et $\exists b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée tq $\forall x \in V \cap D \quad f(x) = b(x) \cdot g(x)$

(ii) $f = o_a(g) \Leftrightarrow \exists V \in V(a)$ et $\exists \varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ tq $\forall x \in V \cap D \quad f(x) = \varepsilon(x) \cdot g(x)$

(iii) $f \sim g \Leftrightarrow \exists V \in V(a)$ et $\exists \varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ tq $\forall x \in V \cap D$,
 $f(x) = (1 + \varepsilon(x)) \cdot g(x).$

□ (i) $f = O_a(g)$ - Soit donc $M \in \mathbb{R}$ et $\forall \epsilon \in V(a)$ tq $\forall x \in V \cap D$, $|f(x)| \leq M |g(x)|$.

Posons $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $b(x) = \begin{cases} f(x)/g(x) & \text{si } (x \in V) \text{ et } (g(x) \neq 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (alors $f(x) = 0$)

Ainsi b est une fonction bornée par $\pm M$ et tq $\forall x \in V \cap D$, $f(x) = b(x) \cdot g(x)$

(ii) Poser $\epsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\epsilon(x) = \begin{cases} f(x)/g(x) & \text{si } (x \in V) \text{ et } (g(x) \neq 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(iii) Esq de (ii)

□

Rq: Lorsque sur V , $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in V \cap D$, alors (i) $\Leftrightarrow f/g$ bornée sur V

(ii) $\Leftrightarrow f/g \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

(iii) $\Leftrightarrow f/g \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$

Exemples - $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| \leq |x|$ alors $\forall a \in \mathbb{R}_+$ $\sin x = O_a(x)$

- En $+\infty$, $x^2 = o_0(x^3)$ et en 0 , $x^3 = o_0(x^2)$

- Tout polynôme est équivalent à son terme de + haut degré en $+\infty$

de + bas degré en 0 .

$(1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2})$ - $\ln(1+x) \sim x$

II) Domination et Prépondérance

A - Propriétés

Propriété 1 Notons 1 la fonction constante égale à 1

(i) f est dominée par la fonction nulle ssi $\exists V \in V(a)$ tq f s'annule en tout point de $V \cap D$

(ii) $f = O_a(1) \Leftrightarrow \exists V \in V(a)$ sur lequel f est bornée

(iii) $f \sim L = o_a(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

□ Appliquons def □

Proposition 2 (i) La relation O_a est réflexive et transitive

(ii) La relation o_a est transitive

□ (i) $\forall a$ bien $V \in V(a)$ tq $\forall x \in V \cap D \quad |f(x)| \leq |f(x)|$ donc $f = O_a(f)$

* Soit $f = O_a(g)$ et $g = O_a(h)$ - Soit donc $(M_1, M_2) \in \mathbb{R}$ et $(V_1, V_2) \in V(a)$ tel que

$\forall x \in V_1 \cap D \quad |f(x)| \leq M_1 \cdot |g(x)|$ et $\forall x \in V_2 \cap D \quad |g(x)| \leq M_2 \cdot |h(x)|$

Ainsi $\exists V: V_1 \cap V_2$ et $M = M_1 \cdot M_2$ tq $\forall x \in V \cap D \quad |f(x)| \leq M \cdot |h(x)|$

□ (ii) cf (i)

Propriété 2 (i) $f = o_a(g) \Rightarrow f = o_a(h)$

(ii) $f = o_a(g)$ et $g = o_a(h) \Rightarrow f = o_a(h)$

(iii) $f = o_a(g)$ et $g = o_a(h) \Rightarrow f = o_a(h)$

□ (i) clair

(ii) Soit $\varepsilon > 0$ et $\forall \varepsilon \in \mathcal{V}(a)$ tq $\forall x \in V_n D$ $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$

Soit $\eta \in \mathbb{R}$ et $\forall \eta \in \mathcal{V}(a)$ tq $\forall x \in V_\eta D$ $|g(x)| \leq \eta |h(x)|$

Posons $\varepsilon' = \varepsilon \cdot \eta$ (qqq puisque ε qq), $\forall x \in V_n \cap V_\eta D$ $|f(x)| \leq \varepsilon' |h(x)|$

(ii) idem

□

Theoreme 1 (i) Si $f = o_a(h)$ et $g = o_a(h)$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $f + \lambda g = o_a(h)$

(ii) Si $f = o_a(h)$ et $g = o_a(h)$ alors $f \cdot g = o_a(h \cdot h)$

(iii) Si $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est tq $\lim_{t \rightarrow a} u(t) = b$ alors $f = o_a(g) \Rightarrow f \circ u = o_b(g \circ u)$

Rqve : Meme resultat avec 0.

□ (i) Soit $V, W \in \mathcal{V}(a)$ et $\eta, N \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in V \cap D$ $|f(x)| \leq \eta |h(x)|$
 $\forall x \in W \cap D$ $|g(x)| \leq N |h(x)|$

$\Rightarrow \forall x \in V \cap W \cap D$ $|f(x) + \lambda g(x)| \leq |f(x)| + |\lambda| \cdot |g(x)| \leq (\eta + |\lambda|N) \cdot |h(x)|$

(ii) m methode

(iii) $\lim_{t \rightarrow b} \frac{f \circ u(t)}{g \circ u(t)} = \lim_{t \rightarrow b} \left(\frac{f}{g} \circ u \right)(t) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = 0$ donc $f \circ u = o_b(g \circ u)$

□

Proposition 3 Soit f une application derivable sur $V \cap D$ voisinage d'un point a et $f(a)$ existe.

Si sur V , $f'(x) \in o_a(x-a)^n$, $n \in \mathbb{N}$, alors $f(x) - f(a) \in o_a(x-a)^{n+1}$

□ Soit $\varepsilon > 0$. $\forall x \in V$, $|f'(x)| \leq \varepsilon |x-a|^n$.

Si $x > a$, $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \leq \varepsilon (x-a)^{n+1} = \varepsilon |x-a|^{n+1}$

Si $x < a$, $|f(x)| \leq \varepsilon |x-a|^n$ d'où

$|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \leq \varepsilon (x-a)^{n+1} = \varepsilon |x-a|^{n+1}$

D'où finalement $(f(x) - f(a)) = o((x-a)^{n+1})$

□

Rqve On n'a pas de resultat sur la derivation - (ex: $f: x^2 \sin \frac{1}{x} = o_a(x)$ mais $f' \neq o_a(1)$)

Exemple: $-\sin x = o_0(-x) \Rightarrow \cos x - 1 = o_0(-x^2)$

B-Exemples et Application

Proposition $\forall x > 0$ et $\forall \beta \in \mathbb{R}$, on a: (i) $(\ln x)^\beta = o_\infty(x^\alpha)$

$$(ii) x^\beta = o_\infty(e^{\alpha x})$$

□

(i) S.B.1 $\forall u > 0$, $\ln u_1 < u$

$$\Rightarrow \forall x > 0, \ln(x^{1/2}) < x^{1/2} \Rightarrow x^{-\alpha} \ln x < \frac{2}{\alpha} x^{-\alpha/2}$$

$$\text{D'où } \forall x > 1, 0 < \frac{\ln x}{x^\alpha} < \frac{2}{\alpha} x^{-\alpha/2} \xrightarrow{\infty} 0 \quad \text{donc } \ln x = o(x^\alpha) \text{ si } \alpha > 0$$

* Si $\beta < 0$: immédiat

$$\text{* Si } \beta > 0: \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \left(\frac{\ln x}{x^{\alpha/\beta}} \right)^\beta \xrightarrow{\infty} 0 \quad \text{donc } (\ln x)^\beta = o_\infty(x^\alpha)$$

(ii) Immédiat si $\beta \leq 0$

$$\text{Si } \beta > 0, \frac{x^\beta}{e^x} = \exp(\beta \ln x - x) = \exp x \left(\beta \frac{\ln x}{x} - 1 \right) \xrightarrow{\infty} 0 \quad \text{donc } x^\beta = o_\infty(e^x)$$

$$\text{Pour (i)} \quad \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = \left(\frac{x^{\beta/\alpha}}{e^x} \right)^\alpha \xrightarrow{\infty} 0 \quad \text{donc } x^\beta = o_\infty(e^{\alpha x})$$

□

Corollaire 1 $\forall x > 0, \forall \beta \in \mathbb{R} \quad |\ln x|^\beta = o(x^{-\alpha})$

$$\square \forall x \in]0, 1[: x^\alpha |\ln x|^\beta = x^\alpha (-\ln x)^\beta = \frac{(\ln 1/x)^\beta}{1/x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

□

Exercice Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[(\ln(x/2))^5 + 4x^3] \cdot [\ln(1+x)]^2}{(1+x)^4 \cdot e^{x/2}}$

$$(\ln x)^2 = o_\infty(x^4) \Rightarrow (\ln(1+x))^2 = o_\infty((1+x)^4)$$

$$x^3 = o_\infty(e^{x/2})$$

$$(\ln(x/2))^5 = o_\infty(e^{x/2})$$

$$\left. \begin{array}{l} (\ln x)^2 = o_\infty(x^4) \Rightarrow (\ln(1+x))^2 = o_\infty((1+x)^4) \\ x^3 = o_\infty(e^{x/2}) \\ (\ln(x/2))^5 = o_\infty(e^{x/2}) \end{array} \right\} \Rightarrow (\ln(x/2))^5 + 4x^3 = o_\infty(e^{x/2}) \Rightarrow (\ln(1+x))^2 \cdot [(\ln(x/2))^5 + 4x^3] = o_\infty((1+x)^4 \cdot e^{x/2})$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1} \cdot (1) = 0$$

III) Equivalence

Proposition 5 La relation $\sim$ est une relation d'équivalence (ds l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^0$ de $D \rightarrow \mathbb{R}$)

$$\square * f - f = 0 = o(f) \quad \text{dc } f \sim f$$

$$* \text{ Soit } f \sim g \quad \text{ie } f - g = o(g)$$

$$\text{Alors } \forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a) \text{ tq } \forall x \in V \cap D \Rightarrow |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

$$\text{Or } |g(x)| \leq |f(x)| + |f(x) - g(x)|$$

$$\text{D'où } |f(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} |f(x)|$$

$$\text{Si } \varepsilon \rightarrow 0, \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{donc } f - g = o(f) \quad \text{ie } g \sim f$$

$$* \text{ Si } f - g = o(g) \quad \text{et } g - h = o(h)$$

$$f - h = f - g + g - h = o(g) + o(h)$$

$$\text{Or si } g - h = o(h) \Rightarrow g = o(h) \quad \text{donc } o(g) \Rightarrow o(h)$$

$$\text{D'où } f - h = o(h)$$

□

$$\text{Rqve } f \sim g \Rightarrow f = o_a(g) \quad \text{et } g = o_a(f)$$

Propriété 3 Si $f \sim g$ alors (i) $\exists V \in \mathcal{V}(a)$ sur lequel f et g ont même zéros et même signe

$$(ii) \text{ Si } \lim_{t \rightarrow a} g(t) = l \in \mathbb{R} \quad \text{alors } \lim_{t \rightarrow a} f(t) = l.$$

$$\square \text{ Soit } V \in \mathcal{V}(a) \text{ tq } \forall x \in V \cap D \quad f(x) = (1 + \varepsilon(x)) \cdot g(x) \quad \text{et } |\varepsilon(x)| \leq 1/2$$

$$(i) \text{ Ainsi } (1 + \varepsilon(x)) > 0 \text{ sur } V \text{ et donc } f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \quad (\text{donc avec } >)$$

$$(ii) \text{ Puisque } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0, \quad \lim_a f = \lim_a g$$

□

Theoreme 2 Si $f \sim h$ et $g \sim u \Rightarrow f \cdot g \sim h \cdot u$

$$\square \text{ Soit } \varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et } V \in \mathcal{V}(a) \quad \text{tq } f(x) = (1 + \varepsilon(x)) \cdot h(x) \quad \forall x \in V \cap D$$

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tq } g(x) = (1 + \varphi(x)) \cdot u(x) \quad |$$

$$\text{Ainsi } f(x) \cdot g(x) = (1 + \varphi(x)) \cdot h(x) \cdot u(x) \quad \forall x \in V \cap D$$

$$\text{où } \varphi(x) = \varepsilon(x) + \varphi(x) + \varepsilon(x) \cdot \varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \quad \text{d'où le résultat}$$

□

$$\text{Rqve } + \text{ n'est pas compatible avec } \sim : \begin{matrix} 1+t \sim 1 \\ -1 \sim -1 \end{matrix} \quad \text{Or } t \not\sim 0$$

Corollaire 2 Soit V voisinage de a

(i) Si $f \sim g$ et $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in V$ alors $f(x) \neq 0$ et $1/f \sim 1/g$

(ii) Si $f \sim h$ et $g \sim u$ tq $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in V$ alors $f/g \sim h/u$

(iii) Si f et g sont strictement positives sur $V \cap D$ alors $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f^\alpha \sim g^\alpha$

□ (i) Si $g \neq 0$, f aussi d'après proposition précédente

$$f \sim g \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = 1 \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{1/f}{1/g} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g}{f} = 1 \quad \text{d'où} \quad 1/f \sim 1/g$$

(ii) Clair

(iii) Par récurrence si $\alpha \in \mathbb{N}$

Si on $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^\alpha}{g^\alpha} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)^\alpha = 1 \Rightarrow f^\alpha \sim g^\alpha$

□

Theoreme 3 Soit $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $u(t) \xrightarrow{t \rightarrow a} b$ alors $f \sim g \Rightarrow f \circ u \sim g \circ u$

□ $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f \circ u(t)}{g \circ u(t)} = \lim_{t \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \circ u \right)(t) = \lim_{x \rightarrow b} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = 1$

□

Corollaire 4 $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{t}\right) \sim g\left(\frac{1}{t}\right)$ et $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(at) \sim g(at)$

Proposition 6 (i) Si $f \sim g$ et si $\frac{1}{\ln(g)}$ est bornée alors $\ln f \sim \ln g$

□ On a $\frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = \frac{\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x)\right)}{\ln(g(x))} = \frac{\ln\left(\frac{f}{g}\right) + \ln(g)}{\ln(g)} = \frac{\ln\left(\frac{f}{g}\right)}{\ln(g)} + 1$

De plus, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow a} \ln\left(\frac{f}{g}\right) = 0$

Donc $\frac{\ln(f/g)}{\ln(g)} \rightarrow 0$ puisque $\frac{1}{\ln(g)}$ bornée et $\frac{\ln(f)}{\ln(g)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$

□

(ii) $\lim_{x \rightarrow a} (f-g)(x) = 0 \Rightarrow e^f \sim e^g$

□ $\lim_{x \rightarrow a} (f-g) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} e^{(f-g)} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^f}{e^g} = 1$

□

Rqes : $\ln(1+2x) \sim 2x \not\sim x \sim \ln(1+x)$ or $1+2x \not\sim 1+x$

$e^{x+1} \not\sim e^x$

or $x+1 \not\sim x$

IV) Applications

1- Lien avec la dérivabilité

Propriété 4 Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$. Alors:

$$f(x) - f(a) \sim (x-a) \cdot f'(a)$$

Exemples: $e^x - 1 \sim x$

$\sin x \sim x$

$\sinh x \sim x$ $\ln(1+x) \sim x$

2- Calcul de limites

L'équivalence de fonctions permet de traiter certaines F.I. de limites $0/0$, ∞/∞ , $0 \times \infty$.

Exemple 1 Au voisinage de $+\infty$, la fonction rationnelle est équivalente au quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur. Par exemple,

$$f(t) = \frac{4t^3 + 2t + 5}{t^2 + 2t - 1} \sim \frac{4t^3}{t^2} = 4t \rightarrow +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = +\infty$$

Exemple 2 Montrer que $\frac{(e^{x^2} - 1)x \cos x}{\sin 2x \cdot \ln^2 x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}$

$$f(t) \sim \frac{x^2 \cdot x}{2x \cdot x^2} = \frac{1}{2}$$