Leçon 62 :

Fonctions dérivées. Opérations algébriques. Dérivées d'une fonction composée. Exemple.

Cadre : Les fonctions numériques f définies sur un intervalle $E \subset \mathbb{R}$ ouvert et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Prérequis : * Notions de limite et de continuité pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. (opérations algébriques et théorème de composition des aplications continues).

* Notion de dérivabilité en un point d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: soit $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in E$ non isolé. on dit que f est dérivable en a si, et seulement si $x \in E \setminus \{a\} \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

admet une limite finie en a que l'on notera $f'(a)$ ou encore si et seulement si
$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \mathcal{E}(x)(x-a)$ avec $\lim\limits_{a} \mathcal{E} = 0$

* si f est dérivable en a, alors elle est continue en a.
* Notion de dérivée à gauche et de dérivée à droite.

I) fonction dérivée d'ordre 1 :

Définition 1 : Soit E un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. $f : E \to \mathbb{R}$ et E_1 l'ensemble des points de E en lesquels f est dérivable.
si E_1 est non vide alors l'aplication $x \in E_1 \mapsto f'(x)$ est apelée la fonction dérivée de f (ou dérivée d'ordre 1 de f) et noté f' (ou encore $f^{(1)}$).

Rmq : E_1 peut être vide. C'est le cas de la fonction discontinue en tout point de E comme :

$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exemples 1 :

	fonction	fonction dérivée :
a)	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto C$ (constante)	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto 0$.
b)	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $x \longmapsto x$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1$.
c)	$\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$.
d)	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x}{\lvert x \rvert}$.
e)	$\mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
f)	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto n \cdot x^{n-1}$
g)	En admettant que la fonct° sinus est dérivable en 0 avec $(\sin)'(0) = 1$: • $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. $x \longmapsto \sin(x)$ • $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \longmapsto \cos(x)$	 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \cos x$. $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \longmapsto -\sin x$.

Proposition : Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Rmq : la réciproque est fausse : Exple : $f : x \longmapsto |x|$. en 0.

II) Opérations algébriques :

Notons $D(E)$ l'ensemble des applications de E dans $\mathbb{R}$ qui sont dérivables sur E.

Théorème 1 : Soient f et g deux éléments de $D(E)$. Alors

1) $f+g \in D(E)$ et $(f+g)' = f'+g'$.

2) $f \cdot g \in D(E)$ et $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

4) soit $a \in E$ tel que $g(a) \neq 0$, alors il existe un intervalle I_a ouvert centré en a tel que $\frac{f}{g}$ soit définie sur $I_a \cap E$ et $\frac{f}{g} \in D(E \cap I_a)$ avec

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

3) si g ne s'annule pas sur E alors il existe un intervalle I_a ouvert centré en a tel que $\frac{1}{g}$ soit définie sur $I_a \cap E$ et $\frac{1}{g} \in D(E \cap I_a)$ avec

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}.$$

Corollaire 1 : Si f est un élément de $D(E)$ et λ un réel, alors

1) $\lambda f \in D(E)$ et $(\lambda f)' = \lambda \cdot f'$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f^n \in D(E)$ et $(f^n)' = n f^{n-1} \cdot f'$.

Preuve : (1) utiser le thm 1. (2) et (2) par récurrence.

Conséquence 2 : les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et les fonctions rationnelles le sont sur leur ensemble de définition.

Conséquence 1 : $D(E)$ est un sous-espace vectoriel des applications de E dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2 : L'application $x \in E \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ où $E = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \}$ est dérivable sur E et $(\tan)' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$.

Exercice 1 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$$ en dérivant de deux manières différentes : $(1+x)^n$.

III) Dérivée d'une fonction composée.

Théorème 2 : Soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : F \to \mathbb{R}$, avec $f(E) \subset F$ et a un point de E.
Si f est dérivable en a et g dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$.

Conséquence 3 : Si $f \in D(E)$ tel que $f(E) \subset E$ et $g \in D(E)$ alors $g \circ f \in D(E)$.

Exemples 3 : 1) $f \in D(E)$. En composant $f : E \to \mathbb{R}^*$ avec $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ on retrouve la dérivation de $\frac{1}{f}$ qui est : $\frac{-f'}{f^2}$.

2) Soit $f : E \to \mathbb{R}_+$; pour tout point a de E en lequel f est dérivable et non nulle, l'application $h : x \in E \mapsto \sqrt{f(x)}$ est dérivable en a et $h' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$.

3) • Soit E une partie de $\mathbb{R}$ telle que si $x \in E$ alors $-x \in E$. Si f est dérivable en $-a$ alors $g : x \in E \mapsto f(-x)$ est dérivable en a et $g'_{|a} = -f'_{|-a}$.

• on déduit que la dérivée d'une fonction dérivable paire (resp impaire) est impaire (resp paire).

IV) Dérivée d'ordre supérieur :

Définition 2 : Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
on dit que f est dérivable à l'ordre n sur E (ou admet une dérivée d'ordre n, ou encore une dérivée n-ième) s'il existe des applications $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ dérivables sur E, telles que :

$$\begin{cases} f_0 = f \\ f_{k+1} = f_k' \quad \text{pour tout } k \in [\![0, n-2]\!]. \end{cases}$$

La dérivée d'ordre n est alors $(f_{n-1})'$: on note $f^{(n)}$.

Rmq : 1) f est dérivable à l'ordre n sur E si, et seulement si f est dérivable à l'ordre n en tout point de E.

2) $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, on suppose f dérivable à l'ordre $(n+m)$. Alors on a : $f^{(n+m)} = {f^{(n)}}^{(m)}$ en prenant pour convention $f^{(0)} = f$.

Exemple 4 : 1) Soit $p \in \mathbb{N}$. L'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^p$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ (càd : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f admet une dérivée d'ordre n sur $\mathbb{R}$) et pour tout entier naturel k, on a pour tout

x réel : $f^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{p!}{(p-k)!} \cdot x^{p-k} & \text{si } 0 \leq k \leq p \\ 0 & \text{si } k > p. \end{cases}$

avec la convention $0^0 = 1$ et $0! = 1$.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. l'application $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\} \mapsto \dfrac{1}{x-\alpha}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$. et pour tout n : on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-\alpha)^{n+1}}$$

Notation : $D^n(E)$ l'ensemble des applications de E dans $\mathbb{R}$, ayant une dérivée d'ordre n sur E.

Rmq : $D^n(E)$ est un s.e.v de l'ensemble des applications de E dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1 : (formule de Leibniz).
Si f et g sont deux éléments de $D^n(E)$ alors il en est de même pour $f.g$ et :

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

Exercice 2 : Déterminer la dérivée d'ordre n de $f(x) = x^2 \cdot e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution : par la formule de (Leibniz)

$$(x^2 \cdot e^{\alpha x})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} \cdot (e^{\alpha x})^{(n-k)}.$$

$$= x^2 \alpha^n e^{\alpha x} + n \cdot 2x \cdot \alpha^{n-1} e^{\alpha n} + \frac{n!}{2!\,(n-2)!} \cdot 2 \cdot \alpha^{n-2} \cdot e^{\alpha x}$$

$$= x^2 \alpha^n \cdot e^{\alpha x} + 2n \cdot \alpha^{n-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot x + n(n-1) \cdot \alpha^{n-2} \cdot e^{\alpha x}$$

Complement : (preuves :).

Exemple 1 :

a et b) ◇ La fonction dérivée de la fonction constante est nulle et celle de l'identité vaut 1.

Démonstration. • Soient $f : x \in E \mapsto c$ avec c une constante et $a \in E$, alors

$$\forall x \in E \setminus \{a\}, \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0,$$

d'où le résultat.

• Soient $f : x \in E \mapsto x$ et $a \in E$, alors

$$\forall x \in E \setminus \{a\}, \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 1,$$

d'où le résultat. ■

c) ◇ La fonction dérivée de $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \in \mathbb{R}^* \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

Démonstration. Soient $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$ et $a \in E$, alors

$$\forall x \in E \setminus \{a\}, \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = -\frac{1}{xa},$$

d'où le résultat. ■

d ◇ La fonction dérivée de $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ est $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{x}{|x|}$.

Démonstration. Il suffit de rappeler la définition de $|x|$:

$$|x| := \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

■

e) ◇ La fonction dérivée de $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$ et $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Démonstration. Soient $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$ et $a \in E$, alors

$$\forall x \in E \setminus \{a\}, \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

d'où le résultat. ■

f) ◇ La fonction dérivée de $x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est $x \in \mathbb{R} \mapsto nx^{n-1}$.

Démonstration.

• $a \neq 0$. $\forall x \in E = \mathbb{R}$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = \dfrac{a^n\left[\left(\frac{x}{a}\right)^n - 1\right]}{a\left(\frac{x}{a} - 1\right)} = a^{n-1}\dfrac{\left(\frac{x}{a}\right)^n - 1}{\frac{x}{a} - 1}$. ■

$= a^{n-1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x}{a}\right)^k = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \cdot a^{n-1-k} \xrightarrow[x \to a]{} n \cdot a^{n-1}$

• $a = 0$. $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{x^n}{x} = x^{n-1} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

Ainsi $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

9) ◇ En admettant que la fonction sinus est dérivable en 0 avec $(\sin)'(0) = 1$, on a alors:

$$(\sin)' : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos x \text{ et } (\cos)' : x \in \mathbb{R} \mapsto -\sin x.$$

Démonstration. Posons pour tout h non nul,

$$\tau := \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h},$$

on a alors par les formule trigonométriques que:

$$\tau = \frac{\sin a \cos h + \cos a \sin h - \sin a}{h} = \sin a \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \cdot \frac{\sin h}{h},$$

comme $\cos h - 1 = -2\sin^2 \frac{h}{2}$, on obtient

$$\tau = -\sin a \cdot \sin \frac{h}{2} \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} + \cos a \frac{\sin h}{h},$$

qui admet pour limite $\cos a$. On établit le second résultat de la même façon. ∎

Thm 1 : *Démonstration.* Soit $a \in E$,

1.) évident.

2.) Pour tout $x \in E \setminus \{a\}$,

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

et on conclut en rappelant que g est continue en a.

3 et 4) g est continue et non nulle en a d'où l'existence de I_a où g est non nulle.
$\forall x \in (I_a \cap E) \setminus \{a\}$,

$$\frac{1}{x-a}\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right) = -\frac{1}{g(x)g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Donc $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$ et on conclut grâce à 2. en remarquant que $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$. ∎

Thm 2 : *Démonstration.* Soit h la fonction définie sur F par

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} & \text{si } y \neq f(a) \\ g'(f(a)) & \text{si } y = f(a) \end{cases},$$

elle est continue sur F et

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = h(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

La continuité de f en a et celle de h en $f(a)$ assure le résultat. ∎

proposition 1. *Démonstration.* Le résultat est clair pour $n = 0$ et pour $n = 1$, il résulte de $(fg)' = f'g + fg'$.

Soit $n \geq 1$, supposons la proposition vérifiée au rang $n - 1$: Si f et g appartiennent à $\mathcal{D}^n(E)$ alors $f'g + fg' \in \mathcal{D}^{n-1}(E)$ c'est-à-dire $(fg)' \in \mathcal{D}^{n-1}(E)$ et donc $(fg)^{(n)}$ existe.

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n)} &= ((fg)')^{(n-1)} \\
&= (f'g)^{(n-1)} + (fg')^{(n-1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^{k} f^{(k+1)} g^{(n-1-k)} + \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \\
&\qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} f^{(k)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \\
&= \underbrace{\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}}_{= \mathrm{C}_n^n} f^{(n)} g + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} + \mathrm{C}_{n-1}^{k})}_{= \mathrm{C}_n^k} f^{(k)} g^{(n-k)} + \underbrace{\mathrm{C}_{n-1}^{0}}_{= \mathrm{C}_n^0} f g^{(n)}
\end{aligned}$$

∎