

60. Image d'un intervalle par une fonction Continue, cas d'un segment. Cas d'une fonction Continue strictement monotone.

pré requis : Notions de continuité, de limite, de monotonie, de borne supérieure, suites.

I- Image d'un intervalle par une fonction Continue

Théorème (1) (valeurs intermédiaires)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et f continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$

Alors $\forall \lambda$ entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$

preuve $a \leq b$ supposons $f(a) < f(b)$.

cas 1 $\lambda = f(a)$ (ou $f(b)$) alors $c = a$ (resp $c = b$) convient

cas 2 $\lambda \in]f(a), f(b)[$, soit $E = \{x \in [a, b] / f(x) \leq \lambda\}$

$a \in E$ et b majore E donc E non vide majoré $\Rightarrow$ admet une borne supérieure $c \in [a, b]$

$c = \sup A \Rightarrow \exists (x_n) \subset A$ tel que $x_n \rightarrow c$

Donc f étant Continue $f(x_n) \rightarrow f(c)$

et $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in A \Leftrightarrow f(x_n) \leq \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(c) \leq \lambda \quad (1)$

De même en prenant (u_n) suite d'éléments de $[a, b]$ tel que $u_n > c$,

Alors f étant Continue $u_n \rightarrow c \Rightarrow f(u_n) \rightarrow f(c)$

Or $u_n > c \quad \forall n \in \mathbb{N}, \Rightarrow f(u_n) \geq \lambda \Rightarrow f(c) \geq \lambda \quad (2)$

D'où (1) et (2) $\Rightarrow f(c) = \lambda$

■

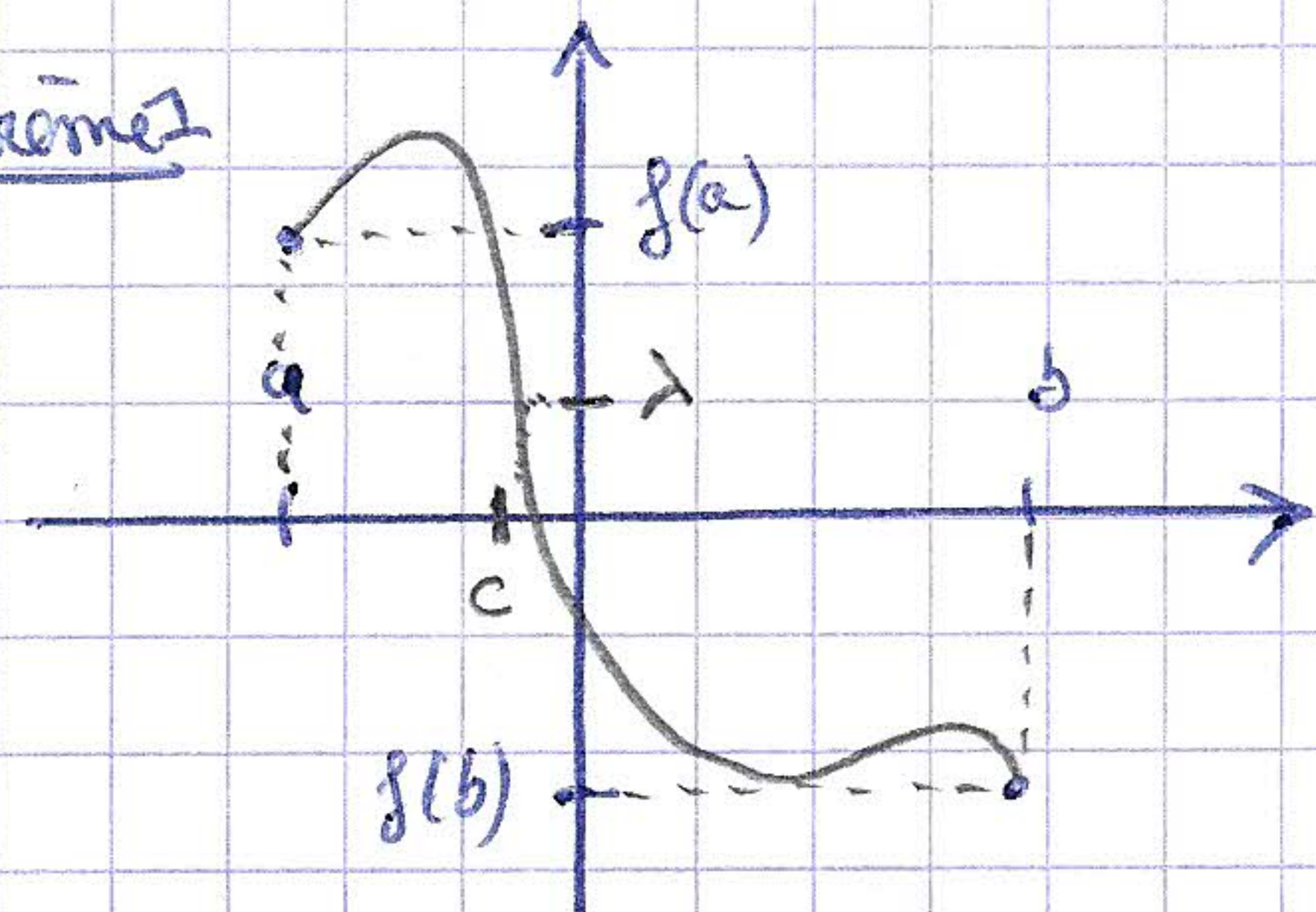
Théorème (2) Soit f Continue sur $]a, b[$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $a < b$

tel que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

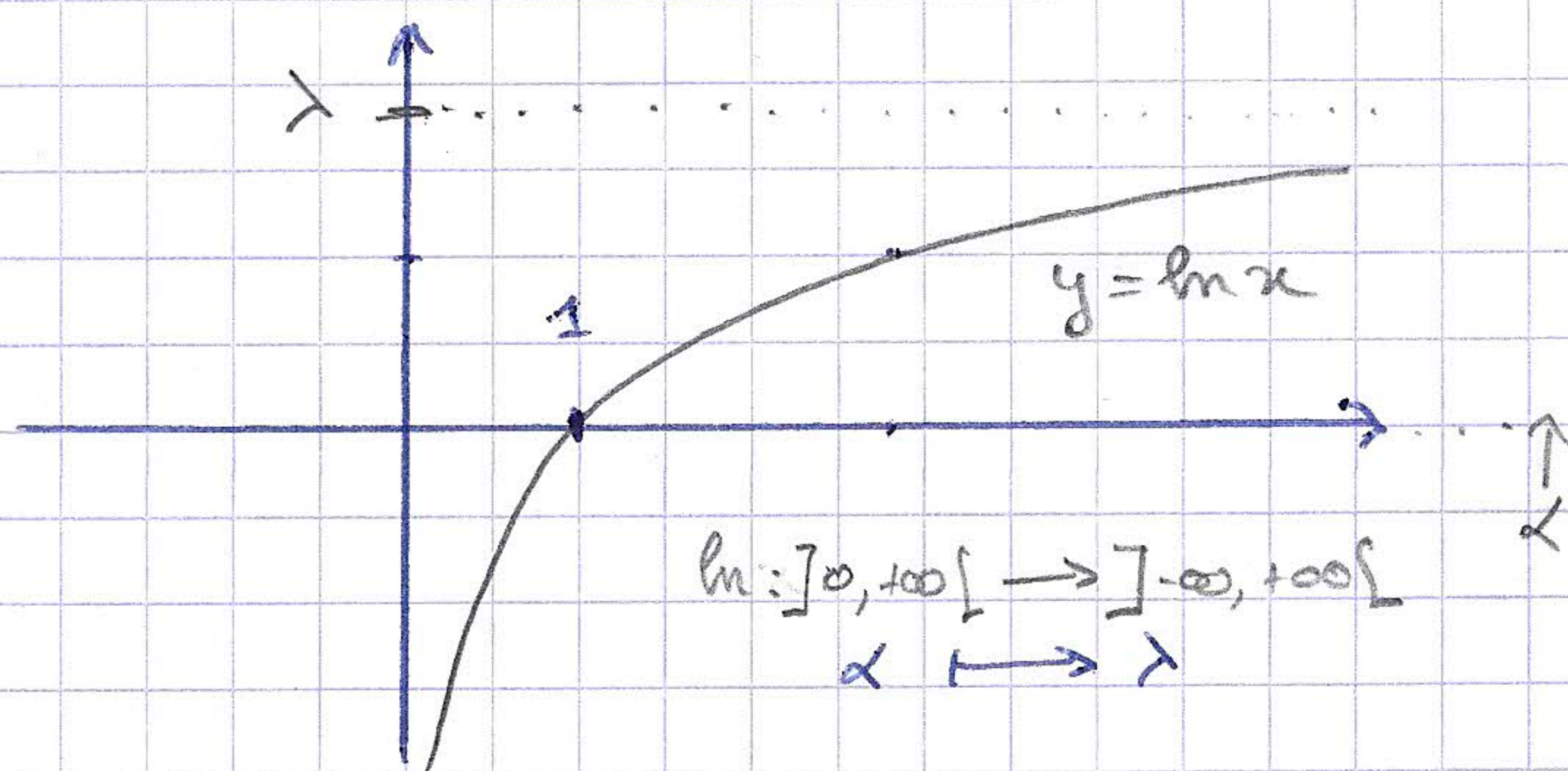
Alors Pour tout $\lambda \in]c, d[$, il existe un $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = \lambda$

Interprétation graphique

Théorème 1



Théorème 2



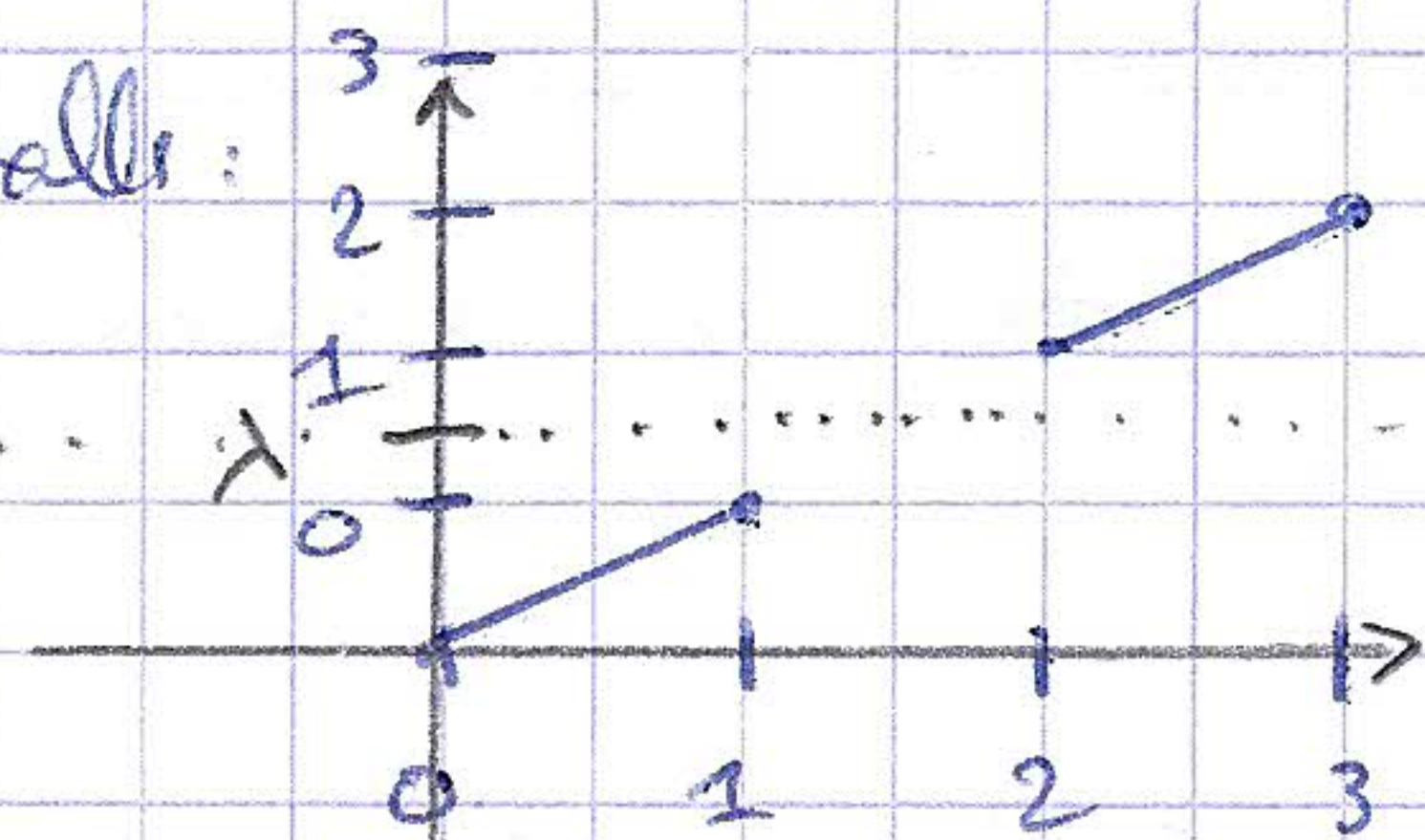
Théorème (3) Énoncé équivalent au théorème (1)

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f continue de $I \rightarrow \mathbb{R}$ alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$

Contre-exemple: (1) f est continue sur une réunion d'intervalles:

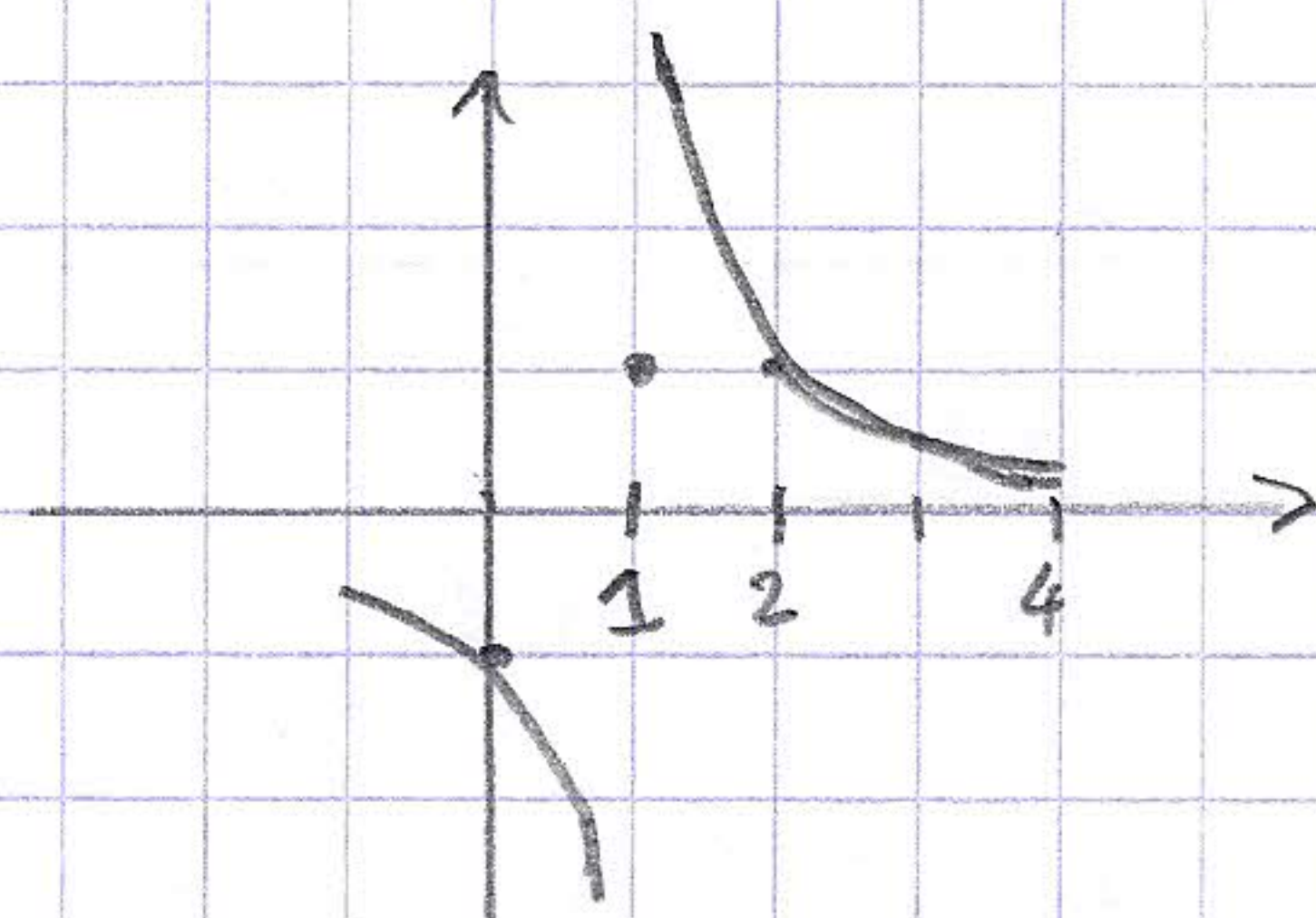
$$f(x) = x \text{ sur } [0, 1] \cup [2, 3]$$

Alors $\lambda = 1,5$ n'a pas d'antécédent.



(2) f n'est pas continue:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x \in [-1, 4] \setminus \{1\} \end{cases}$$



$\lambda = 0$ n'a pas d'antécédent par f

Corollaire (1) Si f continue sur un intervalle I dans $\mathbb{R}$, alors $\forall a, b \in I$, $a < b$ tel que $f(a)f(b) \leq 0$, Alors $\exists c \in [a, b]$, tel que $f(c) = 0$

Rq (1) L'intervalle I et $f(I)$ ne sont pas forcément de même nature

↳ ex: $f: x \mapsto x^2$ $f([1, 2]) = [1, 4]$

Rq (2) donné par le théorème n'est pas forcément unique: $f: x \mapsto x^2$ $f(1) = f(-1) = 1$

II - Image d'un segment par une fonction continue.

Définition (1) Un segment I est un intervalle fermé borné, $I = [a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$

Proposition (1) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue Alors (1) f borné sur $[a, b]$

(2) f atteint ses bornes

Preuve Soit $\pi \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la borne supérieure de $f([a, b])$

Soit (π_n) suite d'éléments de $f([a, b])$ strictement croissante tel que $\pi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi$

Soit X_n l'ensemble non vide des $x \in [a, b]$ tel que $f(x) \geq \pi_n$

et π_n la borne supérieure de X_n , π_n est limite d'éléments de X_n et f continue $\Rightarrow f(\pi_n) \geq \pi_n$

De plus $X_{n+1} \subset X_n$ (Suite décroissante) $\Rightarrow (\pi_n)$ suite décroissante de $[a, b]$, converge vers

un $x \in [a, b]$ Or $\pi_n \leq f(\pi_n) \leq \pi$ et $\pi_n \rightarrow \pi$ d'où $f(x) = \pi$

théorème (4) l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

III - Cas d'une fonction continue, strictement monotone

I un intervalle ^{ouvert}

lemme (1) si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone

Alors f continue sur $I \Leftrightarrow f(I)$ est un intervalle

théorème (5) si f continue, strictement monotone $I \rightarrow \mathbb{R}$

Alors (1) f est bijective sur $f(I)$

(2) la bijection réciproque f^{-1} est (a) strictement monotone sur $f(I)$, de même sens de variation

(b) continue sur $f(I)$.

preuve (1) Soit $b \in f(I)$, alors $\exists a \in I$ tel que $b = f(a)$

unicité de a : Soient $a_1, a_2 \in I$ tels que $a_1 \neq a_2$ alors $f(a_1) < f(a_2)$ ou $f(a_1) > f(a_2)$ car f est strictement monotone, d'où $f(a_1) \neq f(a_2)$.

(2a) Supposons f strictement croissante, Soient $x, y \in f(I)$, $x < y$

Soient $a, b \in I$ tel que $f^{-1}(x) = a$ $f^{-1}(y) = b$

Alors $x < y \Rightarrow f(a) < f(b) \Rightarrow a < b$ car f strict croissante.

$x < y \Rightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$

d'où f^{-1} strictement croissante.

(2b)

$f(I)$ est un intervalle car I l'est et f continue

De plus f est bijective donc $f^{-1}(f(I)) = I$

Or I intervalle $\Rightarrow$ (lemme 1) f^{-1} est continue

■

IV - Applications

* Approximation des zéros d'une fonction continue

f continue de $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

→ Par dichotomie : Si $f(a) < 0, f(b) > 0$

Abs d'après le théorème (1)

des valeurs intermédiaires, f s'annule entre a et b

→ On construit les suites : $a_{n-1} + b_{n-1}$ Si $f\left(\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}\right) < 0$

$$a_0 = a$$

$$b_0 = b$$

et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n =$$

$$a_{n-1}$$

Si non

$$b_n =$$

$$\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

$$\text{Si } f\left(\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}\right) > 0$$

Si non

On obtient 2 suites adjacentes qui convergent vers un zéro de f .

→ À l'aide de la calculatrice :

On divise l'intervalle $[a, b]$ avec un pas de 10^{-2} et on repère les changements de signe.

* Construction du tableau de variation

Le signe de f' donne les variations de f .

On recherche les points où f' s'annule, si f' change de signe, ça ne peut être qu'en ces points :

ex: f' s'annule en $-2, -1, 0$ et 1 définie sur $[-3, 2]$

x	-3	-2	-1	0	1	2
f'	+	0	+	0	-	0
f		↗	↗	↘	↗	↘

* Étude des fonctions réciproques

→ $x \mapsto \ln x$ est continue strictement croissante $]0, +\infty[\rightarrow]-\infty, +\infty[$

Donc la fonction réciproque $e: x \mapsto e^x$ continue strictement croissante $]0, +\infty[\rightarrow]-\infty, +\infty[$

→ cos: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ continue strict croissante donc arccos: $[-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

est continue strict croissante.

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone
et continue

alors elle admet la réciproque

$$f^{-1}: f(I) \rightarrow I$$

qui est str. monotone de $\hat{m}$ sens
et continue

Dém Str. monotone $\rightarrow$ injective

$f(I)$ intervalle selon thm de valeurs
intermédiaires

donc $f: I \rightarrow f(I)$ bijection

$f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ existe et est définie

sur un intervalle
et monotone, $\hat{m}$ sens que f

f^{-1} continue :

fixons $x_0 \in I$, montrons continue en x_0 :

supposons $f \nearrow$

$y_0 := f(x_0)$ prenons l'intervalle $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$

$$y_1 := f(x_0 - \varepsilon)$$

$$y_2 := f(x_0 + \varepsilon)$$

$$y_1 \leq y_0 \leq y_2$$

$$d := \min(y_0 - y_1, y_2 - y_0)$$

$$\text{alors } |y - y_0| < d \Rightarrow y \in]y_1, y_2[$$

$$\text{et } f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2)$$

$$\text{d'où } |y - y_0| < d \Rightarrow x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$$

alors $|y - y_0|$

Propriété de Darboux de la dérivée

Si f dérivable sur $[a, b]$ alors

$\forall \lambda$ entre $f'(a)$ et $f'(b)$

il existe $c \in [a, b]$ t. que

$$f'(c) = \lambda$$

Dém

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & x \neq a \\ f'(a) & x = a \end{cases}$$

φ continue ; cas où λ entre

$$f'(a) = \varphi(a) \text{ et } \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\exists c \in [a, b] \text{ t. que } \varphi(c) = \lambda$$

utiliser thm de Rolle

Cas où λ entre $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ et $f'(b)$

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} & x \neq b \\ f'(b) & x = b \end{cases}$$

même raisonnement

