

56

Etude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et une condition initiale. d'exposé pourra être illustrée par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation de la calculatrice.

pré-requis : Suites convergentes et divergentes, croissante, décroissante, majorée, minorée, suites extraites... ($\mathbb{R}$ complet)
Théorème des valeurs intermédiaires
égalité des accroissements finis.

transparent { cadre : Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et une application $f: I \rightarrow I$ avec $f(I) \subset I$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ une telle suite est appelée suite récurrente. De plus avec ces conditions, la suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I- Généralité

1) Monotonie de la suite (u_n) :

Théorème 1 * si f est croissante sur I alors (u_n) est monotone

• si $u_1 - u_0 \geq 0$ (u_n) est croissante

• si $u_1 - u_0 \leq 0$ (u_n) est décroissante

* si f est décroissante sur I alors (u_n) n'est pas monotone.

dem: * $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$, si f est croissante alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $u_n - u_{n-1}$. Et par récurrence on peut montrer que $u_{n+1} - u_n$ a même signe que $u_1 - u_0$. (ex $u_1 < u_2$ $f \nearrow$ dc $f(u_1) < f(u_2) \Leftrightarrow u_2 < u_3$)
* si f est décroissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n$ est de signe opposé $u_n - u_{n-1}$.

2) Limite éventuelle de la suite (u_n)

proposition 1: Si (u_n) converge vers l et si f est continue en l

alors soit $l \in I$ et $f(l) = l$
soit l est une extrémité de I

dem Soient a et b les extrémités de I avec $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$.

①

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a \leq u_n \leq b$ (car u_n est défini comme sa car $f(x) \in I$)

donc par passage à la limite $a \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq b$

Alors si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ est un élément de I ou une de ses extrémités.

De plus si (u_n) converge vers $l \in I$ alors $f(u_n)$ converge vers $f(l)$ par continuité de f au point l . (c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$.)

or $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(u_n) = u_{n+1}$ donc $f(l) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

d'où $\boxed{f(l) = l}$ c'est-à-dire l est un point fixe de f .

3) Représentations graphiques

oral { On munit le plan d'un repère.
On peut représenter les premiers termes de la suite (u_n) sans les calculer grâce à la courbe représentative Γ de $y = f(x)$ et Δ de $y = x$.

méthode de construction.

- transparence {
- 1) On place u_0 sur l'axe des abscisses
 - 2) On place le point $A_0 \in \Gamma$ d'abscisse u_0
 - 3) On place le point $B_0 \in \Delta$ de même ordonnée que A_0
 - 4) on place u_1 d'abscisse de B_0 sur l'axe des abscisses
 - 5) on recommence cette étape à partir de u_1 ...

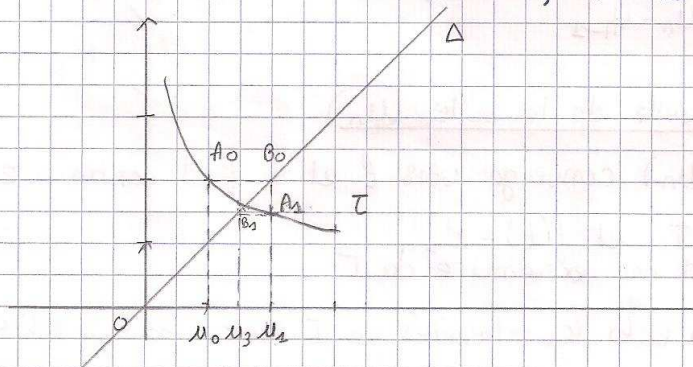
exemples ① • (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$

cette suite converge vers le nombre d'or $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

calculatrice : • intervalle fenêtre $x \in [0, 3]$
 $y \in [0, 3]$

u_1

- mode séquence
- F7 web ; trace



- (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 5u_n + 9 \end{cases}$

(u_n) Diverge.

calculatrice u_2

II- Cas où f est croissante

Remarque : La suite (u_n) est monotone, elle admet donc toujours une limite finie ou infinie.

Supposons que $f(x) = P$ admette un nombre fini de solutions Rangées dans l'ordre croissant $l_1, l_2, \dots, l_p$ ($p \geq 1$) et f une fonction continue.

Alors plusieurs cas se présentent :

1^{er} cas : $\exists i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $u_0 = l_i$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$

$u_n = l_i$ donc (u_n) est stationnaire et converge vers l_i .

2^{ème} cas : $\exists i \in \{1, \dots, p-1\}$ tel que :

* $u_0 \in]l_i, l_{i+1}[$: or f est croissante et $f(l_i) = l_i$

donc $l_i < u_n < l_{i+1}$.

Alors. Soit (u_n) est croissante et de plus majorée donc (u_n) converge vers l_{i+1} .

• Soit (u_n) est décroissante et de plus minorée donc (u_n) converge vers l_i .

* $u_0 \in]-\infty, l_1[$ or f est croissante et $f(l_1) = l_1$

donc $u_n < l_1$.

Alors. Soit (u_n) est croissante et majorée donc (u_n) converge vers l_1 . (un croissante, majorée $\Rightarrow u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l_1$)

• Soit (u_n) est décroissante mais non minorée donc (u_n) diverge vers $-\infty$.

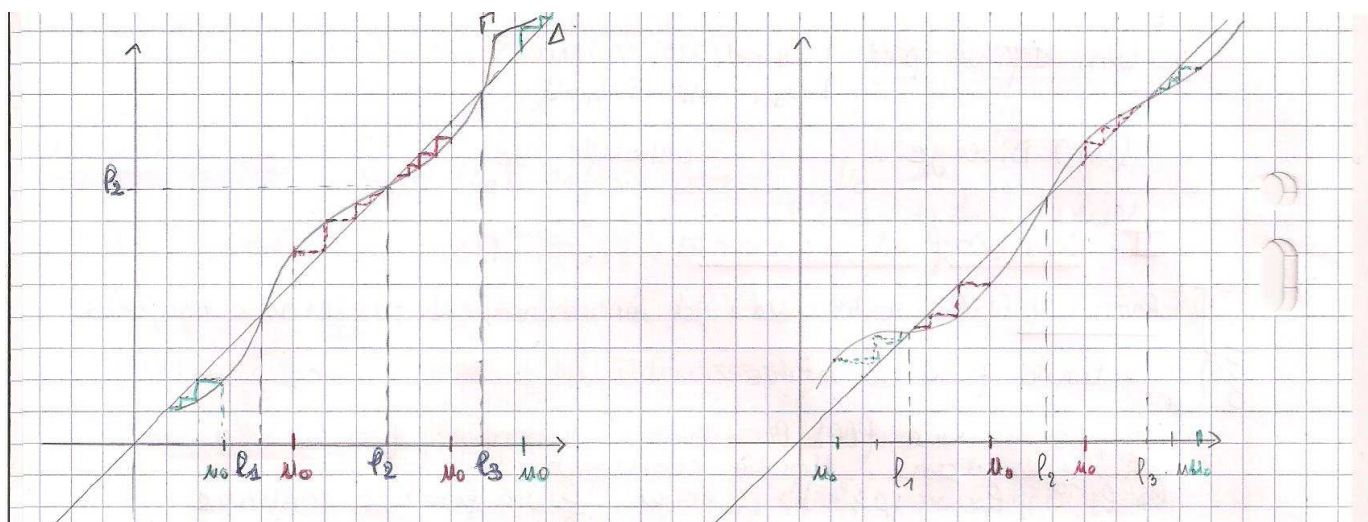
dire que c'est analogue : * $u_0 \in]l_p, +\infty[$ or f est croissante et $f(l_p) = l_p$

donc

$l_p < u_n$.

Alors. Soit (u_n) est croissante mais non majorée donc (u_n) diverge vers $+\infty$.

• Soit (u_n) est décroissante et minorée donc (u_n) converge vers l_p .



(Transparent (juste les grandes lignes))

exemple ②
calculer: u_{n+1}

$x \in (0, 5)$
 $y \in (0, 5)$

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^+ \\ u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

soit $f(x) = \frac{1}{6}(x^2 + 8)$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(x) = \frac{1}{3}x > 0$

donc f est croissante, donc (u_n) est monotone et son sens de variation dépend du signe de $u_1 - u_0$.

cherchons les points fixes:

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}x^2 - x + \frac{4}{3} = 0$$

$$\Delta = \frac{1}{9}$$

$$l_1 = 2 \text{ et } l_2 = 4$$

le signe de $u_1 - u_0$ dépend de la position de u_0 par rapport à 2 et 4.

1^{er} cas: $u_0 \in [0, 2]$, $u_1 \geq u_0$ donc par récurrence $u_{n+1} \geq u_n$ de plus $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [0, 2]$ alors (u_n) est croissante et majorée par 2 donc (u_n) converge vers un réel $l \in [0, 2]$ or $l = 2$ ou $l = 4$ donc ici $l = 2$

2^{ème} cas: $u_0 \in [2, 4[$, une étude similaire montre que (u_n) est décroissante et minorée par 2 donc elle converge vers un $l \in [2, u_0[\subset [2, 4]$ d'où $l = 2$.

3^{ème} cas: $u_0 = 4$ la suite est constante (stationnaire) donc converge vers 4.

4^{ème} cas: $u_0 \in]4, +\infty[$, (u_n) est croissante, si (u_n) convergerait vers l on aurait $l \geq u_0 > 4$ ce qui contredit $l = 2$ ou $l = 4$.

ainsi (u_n) est croissante et divergente.

Remarque: la convergence de (u_n) dépend de son 1^{er} terme

III cas où f est décroissante:

proposition 2: si f est décroissante et continue sur I alors il existe un unique point fixe sur I . (i.e. $f(x) \in I$: cadre)

(traitee) dem: posons $h(x) = f(x) - x$, h est continue sur I comme somme de fonction continue. f est décroissante sur $I = (a, b)$ et $x \mapsto -x$ est décroissante sur I , donc h est décroissante sur I comme somme de fonctions décroissantes. Or d'après le thm des valeurs intermédiaires (f continue sur I alors $\forall a, b \in I \forall x$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists c$ compris entre a et b tel que $f(c) = x$). Donc $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$ donc $f(a) \geq x \geq f(b)$ et donc $h(a) = f(a) - a \geq 0$ et $h(b) = f(b) - b \leq 0$ alors $0 \in h$. unicité évidente. Donc $f(x) = x$ admet une solution ℓ unique sur I .

Théorème 2: si f est décroissante sur I , alors les suites (u_n) et (u_{2n+1}) sont monotones et de variations contraires.

(traitee) dem: Posons $g = f \circ f$, or f est décroissante et la composée de 2 fonctions décroissantes est croissante donc g est croissante. Regardons (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .

$$\begin{cases} u_4 - u_2 = g(u_2) - g(u_0) \\ u_5 - u_3 = g(u_3) - g(u_1) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{or } g \text{ est croissante donc d'après} \\ \text{le théorème 1 } (u_{2n}) \text{ et } (u_{2n+1}) \\ \text{sont monotones.} \end{array}$$

De plus $u_3 - u_1 = f(u_2) - f(u_0)$ or f est décroissante donc d'après le théorème 1 (u_n) n'est pas monotone, Alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont de variations contraires.

proposition 3: (u_n) converge $\Leftrightarrow (u_{2n})$ et (u_{2n+1}) sont adjacentes

dem: $\Rightarrow$ Soit (u_n) une suite convergente vers ℓ , or toute suite extraite converge vers la même limite, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} - u_{2n+1} = 0$. De plus d'après le théorème 2 on sait que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont de variations contraires. Donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

$\Leftarrow$ Soient (u_{2n}) et (u_{2n+1}) deux suites adjacentes.

$$\begin{array}{l} \text{Alors } (u_n) \\ (u_{2n+1}) \end{array} \quad \begin{array}{l} \exists \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n > N_1 \quad |u_{2n} - \ell| < \varepsilon \\ \exists \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n > N_2 \quad |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon \end{array}$$

Soit $\varepsilon > 0$, soit $N = 2 \max(N_1, N_2) + 1$. Alors

$\forall n \geq N$ on a $|u_n - l| < \varepsilon$.

(brielle)

Exemple ③: Soit (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$I =]0, +\infty[$

$\boxed{u_1}$ $\begin{matrix} x \in (0, 3] \\ y \in (0, 3] \end{matrix}$

Soit $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$, f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ donc f est décroissante.

points fixes: $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \quad \Delta = 5$

$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ or $x_2 \notin \mathbb{R}_+^*$ donc l'unique point fixe

de f est x_1 .

Soit $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n})$ et $u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1})$
 $(u_2 = f(u_1) \quad u_2 = f \circ f(u_0)) \quad (u_3 = f(u_2) \quad u_3 = f \circ f(u_1))$

comme f est décroissante on sait d'après la proposition 3 que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotone et de variations contraires.

ici (u_{2n}) est croissante car $u_2 - u_0 > 0$
 et (u_{2n+1}) est décroissante car $u_3 - u_1 < 0$

$x = f \circ f(x)$ donc $g = f \circ f$ admet le même point fixe que f sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme f est décroissante si $u_0 \in]0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$ alors $u_1 \in]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$

Alors (u_{2n}) est croissante et majorée par x_1 donc converge vers x_1 ,
 (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par x_1 donc converge vers x_1 .

(u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont donc adjacentes et alors d'après la proposition 3 (u_n) converge vers x_1 qui est le nombre d'or.

Remarque

Exemple ④: (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -2u_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\boxed{u_1}$ zoom standard

$f(x) = -2x$ est bien décroissante.

(u_{2n}) est croissante car $u_2 - u_0 > 0$

(u_{2n+1}) est décroissante car $u_3 - u_1 < 0$

le seul point fixe est $l = 0$

or $u_0 \in]0, +\infty[$ donc $u_n \in]-\infty, 0]$

alors (u_{2n}) est non majoré et (u_{2n+1}) est non minoré
 donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ne sont pas adjacentes et donc

(u_n) Diverge.

IV. Utilisation du théorème du point fixe

Théorème 3: Soit I un intervalle fermé, si $f: I \rightarrow I$ ($f(I) \subset I$) est k -contractante (i.e. $\exists k \in]0, 1[$ tel que $\forall (x, y) \in I^2$ $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$), Alors toute suite récurrente converge vers un point ℓ qui est l'unique point fixe de f sur I .

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$

dem. (J'ai donné l'idée mais il faut mieux la faire)

* Existence: Puisque f est contractante, f est continue et de plus $f(I) \subset I$ donc f vérifie les hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires. alors ℓ existe.

* Unicité: Soient ℓ_1 et ℓ_2 2 points fixes de f .
 $|\ell_1 - \ell_2| = |f(\ell_1) - f(\ell_2)| \leq k |\ell_1 - \ell_2| < |\ell_1 - \ell_2|$ car $k \in]0, 1[$.
Donc absurde.
Alors il y a unicité.

* (u_n) converge vers un point fixe ℓ : on travaille dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est complet donc on peut montrer que la suite (u_n) est de Cauchy pour montrer que (u_n) converge.

une suite est de Cauchy si $\forall \varepsilon \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall p > q \geq n_0 \Rightarrow |x_p - x_q| < \varepsilon$.

f est contractante alors on a $\forall p \in \mathbb{N}^* |u_{p+1} - u_p| \leq k |u_p - u_{p-1}|$

Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}^* |u_p - u_{p-1}| \leq k^{p-1} |u_1 - u_0|$

initialisation: $p=1$ $|u_1 - u_0| \leq |u_1 - u_0|$
l'assertion est vraie pour $p=1$.

Hérédité: supposons l'assertion vraie à un rang p fixé (par ex. $(p-1)$) montrons qu'elle est vraie au rang $p+1$.

$$|u_{p+1} - u_p| \leq k |u_p - u_{p-1}| \leq k \times k^{p-1} |u_1 - u_0| \leq k^p |u_1 - u_0|$$

donc l'assertion est vraie au rang $p+1$.

conclusion: $\forall p \in \mathbb{N}^* |u_p - u_{p-1}| \leq k^{p-1} |u_1 - u_0|$

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad p > q \geq 0 \quad |u_{p+q} - u_p| = |u_{p+q} - u_{p+q-1}|$$

$$\begin{aligned} |u_{p+q} - u_p| &\leq |u_{p+q} - u_{p+q-1}| + \dots + |u_{p+1} - u_p| \\ &\leq k^{p+q-1} |u_1 - u_0| + k^{p+q-2} |u_1 - u_0| + \dots + k^p |u_1 - u_0| \\ &\leq (k^{p+q-1} + \dots + k^p) |u_1 - u_0|. \end{aligned}$$

on reconnaît une suite géométrique de raison $0 < k < 1$.
 $(k^{p+q-1} + \dots + k^p) = k^p (1 + \dots + k^{q-1}) = k^p \frac{1 - k^q}{1 - k}$

$$\text{Alors } |u_{p+q} - u_p| \leq k^p \frac{1 - k^q}{1 - k} |u_1 - u_0|.$$

$$|u_p - u_q| \leq \frac{k^p}{1-k} |u_1 - u_0|$$

(car k^{p-1} négligeable)

$$\text{or } \lim_{p \rightarrow +\infty} k^p = 0 \quad \text{car } 0 < k < 1$$

Donc $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p, q > n_0, |u_p - u_q| \leq \varepsilon$
Donc (u_n) est de Cauchy et donc (u_n) converge.

Supposons que (u_n) converge vers ℓ , comme f est continue, ℓ satisfait l'équation $f(\ell) = \ell$ donc ℓ est un point fixe sur I fermé.

Et on a vu avant qu'il était unique.

* $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$: ce montre par récurrence comme celle faite précédemment.

Corollaire 1: (utile pour montrer que f est contractante)

Soit I fermé, $f: I \rightarrow I$ continue sur I fermé et dérivable sur I ouvert. De plus s'il existe un $k \in]0, 1[$ tel que $|f'(x)| \leq k$ $\forall x \in I$, alors le théorème du point fixe s'applique.

dem: f est $\mathcal{C}^1$ sur I ouvert, on peut donc appliquer l'égalité des accroissements finis.

$\forall x, y \in I \quad \exists c \in]x, y[$ tel que $|f(x) - f(y)| = |x - y| |f'(c)|$
or $\exists k \in]0, 1[$ et un $c \in]x, y[$ tel que $|f'(c)| \leq k < 1$
d'où $|f(x) - f(y)| \leq k |x - y|$ et donc f est k -contractante.

Définition 1: un point fixe ℓ de f est dit attirant s'il existe un intervalle J ouvert contenant ℓ tel que $\forall u_0 \in J$ la suite (u_n) converge vers ℓ .

Définition 2: un point fixe ℓ de f est dit répulsif lorsqu'il existe un intervalle J ouvert contenant ℓ tel que pour tout $u_0 \in J, u_0 \neq \ell$ alors $\exists N$ tel que $u_n \notin J \quad \forall n > N$.

proposition 4: si f est de classe $\mathcal{C}^1$ admet un point fixe alors:

1) si $|f'(\ell)| < 1$ ℓ est attirant

2) si $|f'(\ell)| > 1$ ℓ est répulsif

(car autour de ℓ on peut trouver un intervalle plus petit où on peut appliquer le corollaire 1 et donc (u_n) CV)

si pas le tps de faire (*) le remplacer par ce qui suit :

Proposition 4: (Remarque)

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et admet un point fixe ℓ alors :

1) si $|f'(\ell)| > 1$ ℓ est dit répulsif c'est-à-dire que (u_n) ne converge jamais vers ce point fixe.

2) si $|f'(\ell)| < 1$ ℓ est dit attractif c'est-à-dire que si u_n converge, elle convergera vers ce point fixe.

De plus dans ce cas si $|f'(\ell)| = 0$ alors (u_n) convergera rapidement, sinon elle convergera géométriquement.

(*) Remarque : si $0 < |f'(\ell)| < 1$ (u_n) converge géométriquement vers ℓ .
si $|f'(\ell)| = 0$ (u_n) converge rapidement vers ℓ .

(pas traité)
Exemple (5)

(u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$I = [1/2, 1]$

$f(x) = \frac{1}{1+x}$ définie sur I et dérivable sur I $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$

f est décroissante et continue elle admet donc un unique point fixe. $f(x) = x \Leftrightarrow \ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

De plus $f(I) = [\frac{2}{3}, \frac{1}{2}]$ donc $f(I) \subset I$.

et $\forall (x, y) \in I^2$ $|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right| = \left| \frac{y-x}{(1+x)(1+y)} \right| \leq \frac{1}{4} |y-x|$
 $0 < \frac{1}{4} < 1$
donc f est $\frac{1}{4}$ -contractante.

Donc (u_n) converge vers $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ car toutes les hypothèses du Théorème du point fixe sont vérifiées. 2

on aurait pu voir aussi que $|f'(\ell)| < 1$ et donc que ℓ est attractif. Et donc que la convergence est géométrique.

(traité)

Exemple (6) Algorithme de Héron d'Alexandrie.

(u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad I = [1, 2]$$

(1/5) $x \in [1, 2]$
 $y \in [0, 2]$

$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ f est continue et dérivable sur I .

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{2x^2} = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{2x^2} \quad \text{donc } f \text{ est décroissante sur } [1, \sqrt{2}] \text{ et croissante sur } [\sqrt{2}, 2]$$

$$f(I) = \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \subset [1, 2] \quad \text{donc } f \text{ est stable par } I.$$

De plus $\forall (x, y) \in I^2 \quad |f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(y + \frac{2}{y}\right) \right|$
 $\leq \left| \frac{1}{2}(x - y) \right| + \left| 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \right| \leq \frac{1}{2}|x - y| + 2\left|\frac{y - x}{xy}\right| \quad \text{or } \frac{y - x}{xy} < 1.$

donc $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$ donc f est contractante.

Alors le théorème du point fixe s'applique.

Resolvons $f(x) = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Donc (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

De plus $|f'(\sqrt{2})| = \frac{1}{2} - \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = 0$ donc (u_n) converge

Rapidement.

$$u_0 = 1 \quad u_1 = 1,5 \quad u_2 = 1,4167 \quad u_3 = 1,414215686$$

$$u_4 = 1,4142135623$$

$$\sqrt{2} \approx 1,4142135623 \text{ à } 10^{-10} \text{ pres } \approx u_4.$$

(pas au 10¹⁰ mais on s'en doute bien d'en parler)

exemple 4: suites homogénéiques:

(u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n} \end{cases}$

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} \quad I =]-\infty, \frac{1}{u_0}] \quad \begin{matrix} x \in (-1, 1) \\ y \in (-1, 1) \end{matrix}$$

$f(x) = \frac{x}{3 - 2x}$ est continue et dérivable

$f'(x) = \frac{3}{(3 - 2x)^2} > 0$ donc f croissante.

$f(I) = \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \subset I$ et les points fixe sont $x = 1$ et $x = 0$.

si $u_0 = 1$ (ou 0) la suite (u_n) est constante et égale à 1 (ou 0).

sinon posons $\bar{u}_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 0}{u_{n+1} - 1} \leftarrow \text{point fixe} = \frac{u_n}{3u_n - 3} = \frac{1}{3} \frac{u_n}{u_n - 1} = \frac{1}{3} \bar{u}_n.$

Ainsi $\bar{u}_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ donc $\bar{u}_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \bar{u}_0$.

Donc $\frac{u_n}{u_n - 1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{u_0}{u_0 - 1}$ $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n u_0}{u_0 - 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n u_0}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

or $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Donc (u_n) converge vers 0.

détail:
 $u_n \times (u_0 - 1) = (u_n - 1) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n u_0$
 $u_n(u_0 - 1) - \left(\frac{1}{3}\right)^n u_0 = -\left(\frac{1}{3}\right)^n u_0$
 $u_n = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n u_0}{u_0 - 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n u_0}$