

# Leçon 55 Étude des suites de termes généraux $a^n$ , $n^b$ et $n!$ . Croissances comparées.

Exemples de comparaison de suites aux suites précédentes. Calculatrice.

Prérequis : Suites, Convergence de suites  
Fonctions exponentielles, logarithmes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0, \text{ binôme de Newton}$$

## I - Suites de Référence

### I-1 Suite géométrique $a^n$

Def (1) Soit  $a \in \mathbb{C}$ . La suite définie par  $u_n = u_1 \cdot a^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$  où  $u_1 \in \mathbb{C}$  est appelée suite géom. de raison  $a$ .

Prop  $(u_n)$  géom. de raison  $a \Leftrightarrow u_{n+1} = a u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Exercice (1) 1200 € est placé sur un compte rémunéré à 3%. Soit  $u_n$  la somme sur le compte, au bout de l'année  $n+1$ .

(1) mon  $(u_n)$  est géométrique (de raison 1,03)

(2) Calculer  $u_{10}$ , l'argent accumulé au bout de 10 ans.

Si dans la suite on suppose  $u_1 = a$  et on a  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a^n)_{n \in \mathbb{N}}$   
proposition (1)

(i) si  $|a| > 1$  la suite DV et  $|a| \rightarrow +\infty$

(ii) si  $|a| = 1$  la suite est bornée, DV  
 $a \neq 1$

(iii) si  $a = 1$  la suite est constante = 1

(iv) si  $|a| < 1$  la suite CV vers 0.

Preuve (i) si  $|a| > 1$  alors  $|a| = 1+b$  où  $b > 0$

$$\text{et } |a^n| = |a|^n = (1+b)^n = 1 + nb + \binom{n}{2}b^2 + \dots + b^n \geq 1 + nb \rightarrow +\infty$$

(iv)  $a \neq 0 \Rightarrow b = \frac{1}{|a|} > 1$  et  $b^n \rightarrow +\infty$

$$|a^n| = |a|^n = \frac{1}{b^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow a^n \rightarrow 0$$

□

Corollaire (2) si  $|a| < 1$   $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1 + a + a^2 + \dots + a^n) = \frac{1}{1-a}$

Exercice (2):  $a > b > 0$   $w_n = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$  limite?  $w_n = \frac{a^{n+1} (1 + (\frac{b}{a})^{n+1})}{a^n (1 + (\frac{b}{a})^n)} \rightarrow a$

### I-2 Suite puissance

Def (2) Soit  $b \in \mathbb{R}$ . La suite  $u_n = n^b$  est appelée suite puissance

□

prop° (2) (i)  $b > 0$  la suite  $(n^b)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et DV

(ii)  $b = 0$  la suite est Cste  $= 1$

(iii)  $b < 0$  la suite est décroissante  $\rightarrow 0$

preuve:  $\ln(n^b) = b \ln n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\substack{\text{si } b > 0 \Rightarrow e^{b \ln(n^b)} \rightarrow +\infty \\ \text{si } b \leq 0 \Rightarrow e^{b \ln(n^b)} \rightarrow 0}}$

### I - 3 Suite factorielle

Def° (3) la suite  $u_n = n!$  est appelée suite factorielle

prop (3) la suite  $(n!)$  est croissante et  $\rightarrow +\infty$

preuve  $n! \geq n$

prop° (4) Soit  $S_n$  l'ensemble des permutations d'un ensemble à  $n$  éléments

Alors  $|S_n| = n!$

### II - Comparaison de Croissance

Def° (4) On dit que la suite  $(u_n)$  est négligeable devant  $(v_n)$

si  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n > N \quad |u_n| \leq \varepsilon \cdot |v_n|$  noté  $u_n = o(v_n)$  ou  $u_n \ll v_n$

Prop (5) la relation "négligeable devant" est transitive

Rq si  $v_n$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang alors  $u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$

Rq on dit que  $v_n$  tend plus vite vers l'∞  
si  $u_n, v_n \rightarrow +\infty$

Thm (1) (Critère d'Alémbert pour les suites) Supposons  $u_n \neq 0$  à partir d'un certain rang

si  $\left| \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \right| \rightarrow l$  Alors (i)  $|l| > 1 \Rightarrow |u_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

(ii)  $|l| < 1 \Rightarrow u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

preuve

(i)  $\left| \frac{u_{n+m}}{u_n} \right| \rightarrow l < 1$  Soit  $\varepsilon > 0$  tq  $k = l + \varepsilon < 1$  Alors  $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0 \quad |u_{n+2}| \leq k |u_n|$

et par récurrence :  $0 \leq |u_{n_0+m}| \leq k^m |u_{n_0}| \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Or avec le prop° (1)  $\Rightarrow k^m \rightarrow 0$  d'où par encadrement  $(u_{n_0+m})_m \rightarrow 0$

ie:  $(u_n) \rightarrow 0$

(ii)  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow l > 1$  Soit  $K \in ]1, l[$  Alors  $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \quad |u_{n+1}| > K |u_n|$

et par récurrence on a :  $|u_{n_0+m}| \geq K^m |u_{n_0}|$

On  $K^m \rightarrow +\infty$  car  $K > 1$  d'où  $(u_n) \rightarrow +\infty$

Théorème (2) Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^+$

(i) Si  $|a| > 1$ ,  $b > 0$  Alors  $n^b \ll a^n \ll n!$

(ii) Si  $|a| < 1$ ,  $b < 0$  Alors  $\frac{1}{n!} \ll a^n \ll \frac{1}{n^b}$

preuve (i)  $u_n = \frac{n^b}{a^n}$   $\ln u_n = b \ln n - n \ln a = n \left( \frac{b \ln n}{n} - \ln a \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$

D'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  par comparaison de limite

$u_n = \frac{a^n}{n!}$  Soit  $E(a)$  la partie entière de  $a$

Alors  $u_n = \frac{a}{n} \underbrace{\left( \frac{a}{n-1} \dots \frac{a}{E(a)+1} \right)}_{< 1} \underbrace{\left( \frac{a}{E(a)} \dots \frac{a}{1} \right)}_{\leq a \times \dots \times a} \leq \frac{a}{n} a^{E(a)} \rightarrow 0$

(ii)  $u_n \ll v_n \Leftrightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = 0 \Leftrightarrow \lim \frac{\frac{1}{v_n}}{\frac{1}{u_n}} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{v_n} \ll \frac{1}{u_n}$   
( $u_n, v_n > 0$ )

Thm (3) (i)  $\alpha, b \in \mathbb{R}^+$   $a \in \mathbb{C}$  tq  $|a| > 1$   $\beta \in \mathbb{C}$  tq  $|\beta| < |a|$   
 $(\ln n)^\alpha \ll n^b \ll e^{\beta n} \ll a^n \ll n! \ll n^n$

(ii)  $\alpha, b \in \mathbb{R}^-$   $a \in \mathbb{C}$  tq  $|a| < 1$   
 $(\ln n)^\alpha \gg n^b \gg a^n \gg \frac{1}{n!} \gg \frac{1}{n^n}$

preuve (i)  $u_n = \frac{(\ln n)^\alpha}{n^b}$   $\ln u_n = \alpha \ln(\ln n) - b \ln n = \ln n \left( \alpha \frac{\ln \ln n}{\ln n} - b \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$   
par comparaison des limites  $u_n \rightarrow 0$

$u_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1) \dots 2 \cdot 1}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$

exple (1)  $u_n = \frac{10^n}{n!}$

$u_1 = 10$   
 $u_2 = 50$   
 $u_7 = 1984 \dots$

croît jusqu'à  $u_7 = 1984$  puis  $\rightarrow 0$

exple (2)  $u_n = \frac{14^n}{\sqrt{n!}}$

$u_n = \left( \frac{(\sqrt{17})^n}{n!} \right)^{1/2} \Rightarrow \text{car } \frac{\sqrt{n}^n}{n!} \rightarrow 0$

d'où  $u_n \rightarrow 0$

## III - Comparaison de suites aux suites de référence & Application

méthode : factoriser par le

$$v_n = \frac{2^n + n^5}{7^n + n^8} = \frac{2^n (1 + \frac{n^5}{2^n})}{7^n (1 + \frac{n^8}{7^n})} = \left(\frac{2}{7}\right)^n \frac{(1 + \dots)}{(1 + \dots)} \rightarrow 0$$
  
 car  $\frac{2}{7} < 1$

$$w_n = \frac{3n! - n^{10}}{n! - 10^n} = \frac{3n! (1 - \frac{n^{10}}{3n!})}{n! (1 - \frac{10^n}{n!})} \rightarrow 3$$

prop°

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$   
 $\beta \geq 2$

la suite de terme général  $u_n = \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta}$  converge

preuve

$\alpha \in \mathbb{R}, \beta \geq 2 \Rightarrow \beta - 2 \geq 0$

et on a (thm 3)  $(\ln n)^\alpha \ll n^{\beta-2}$

$\Rightarrow \exists N > 0, \forall n \geq N, (\ln n)^\alpha \ll n^{\beta-2}$

( $\varepsilon=1$ )  $\Rightarrow \frac{(\ln n)^\alpha}{n^{\beta-2}} \ll 1$

$\Rightarrow 0 \ll \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} \ll \frac{1}{n^2}$

Par comparaison avec la suite de référence de  $\sum \left(\frac{1}{n^2}\right)$

la suite des  $\frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta}$  CV

prop° (Développement en série de l'exp)

$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$

preuve : (a)  $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n$  où  $R_n = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$  par récurrence

(b)  $|R_n| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leq \frac{1}{n!} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{1} e^t dt \leq \frac{1}{n!} e^x \int_0^x (x-t)^n dt$   
 $\leq \frac{1}{n!} \left[ -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} e^x \quad \forall t \in [0, x] \quad e^t \leq e^x$

si  $x \leq 0$   $|R_n| \leq \frac{1}{n!} \int_x^0 |(x-t)^n| dt \quad \forall t \in [x, 0], e^t$

car  $\forall t \in [x, 0], e^t \leq 1$

$$\leq \frac{1}{n!} \int_x^0 (t-x)^n dt$$

$$\leq \frac{1}{n!} \left[ \frac{(t-x)^{n+1}}{n+1} \right]_x^0 = \frac{1}{n!} \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot (-x)^{n+1} e^{|x|}$$

Conclusion  $\forall x \in \mathbb{R} \quad |R_n| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$

(c) (Théorème 1)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  d'où  $R_n \rightarrow 0$

Donc  $S_n$  CV vers  $e^x$

