# Leçon 53 : Suites Convergentes – Opérations Algébriques – Composition par une Application Continue – Limites et Relation d'ordre

Pré Requis : Corps des Réels (notamment l'axiome de la borne supérieure) et des Complexes.
Application continue en un point.
On rappelle qu'une suite réelle (ou complexe) est une application $u: P \to \mathbb{R}\ (ou\ \mathbb{C})$ où $P \subseteq \mathbb{N}$.
$n \to u(n)$
On la note $(u_n)_{n\in P}$ ou plus simplement $(u_n)$ et on désigne par $u_n$ son terme général.
On rappelle également que $(v_n)$ est une sous-suite de $(u_n)$s'il existe une application strictement croissante $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $v_n = u_{\varphi(n)}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

On s'intéresse aux suites réelles.

## I) Suites Convergentes

### *I-1) Suite convergente*

Définition 1 : Une suite $(u_n)$ est convergente s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$ (L)
Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Théorème-Définition 1 : Le réel $l$ s'il existe est unique. On l'appelle la limite de la suite $(u_n)$ et noté $l = lim\, u_n$. On dit que $(u_n)$ converge vers $l$.

*Démonstration : Supposons $l$ et $l'$ verifiant (L) et tel que $l < l'$.*
*Posons $\varepsilon = (l' - l)/3$. Alors $\exists\ N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$*
*$\exists\ N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l'| \leq \varepsilon$*
*Posons N= max ($N_1, N_2$).*
*Alors $\forall n \geq N\ u_n \in [l - \varepsilon; l + \varepsilon] \cap [l' - \varepsilon; l' + \varepsilon] = \emptyset$ par définition de $\varepsilon$ : Absurde.■*

Exemple : La suite $(u_n)$ définie par $u_n = 1/n^2$ converge vers 0.
La suite $(v_n)$ définie par $v_n = \frac{2n^2+n+1}{n^2+3}$ converge vers 2.

Théorème 2 : La suite réelle $(u_n)$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ ssi toute sous-suite de $(u_n)$ converge vers $l$.

*Démonstration : Condition suffisante puisque $(u_n)$ est une sous-suite d'elle-même.*
*Réciproquement, supposons que $(u_n)$ converge vers $l$ et soit $(u_{\varphi(n)})$ une sous-suite de $(u_n)$.*
*Par hypothèse, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$.*
*Or $\varphi(n) \geq n\ \forall n \in \mathbb{N}$ (on peut le montrer par récurrence) et on a alors : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - l| \leq \varepsilon$ d'où $l = lim\, u_{\varphi(n)}$.■*

Exemple : La suite $(u_n)$ définie par $u_n = (-1)^n$ diverge. En effet $\forall k \in \mathbb{N}\ u_{2k} = 1\ et\ u_{2k+1} = -1$.

Théorème 3 : (i) Toute suite convergente est bornée.
(ii) Toute suite croissante (resp. décroissante) converge ssi elle est majorée (resp. minorée). Dans ce cas, elle converge vers Sup $u_n$.

*Démonstration :(i) $|u_n| \leq |l| + \varepsilon$ dès que $n \geq N$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$.*
*Ainsi $\forall n \in \mathbb{N} |u_n| \leq Max(|u_0|, |u_1| \dots |u_{N-1}|, |l| + \varepsilon)$.*
*(ii) Soit $U = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$. U est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$; elle admet donc une borne supérieure S dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}: n \geq p \Rightarrow S - \varepsilon < u_p \leq u_n \leq S \Rightarrow |u_n - S| \leq \varepsilon$.*
*Donc $(u_n)$ converge vers S.■*

Exemple : $(u_n)$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est croissante et majorée par 2 ; $(u_n)$ converge (Attention $l \neq 2$).

Remarque : Réciproque de (i) fausse (ex : $(-1)^n$).

*I-2) Suite de Cauchy*

Définition 2 : Une suite $(u_n)$ est dite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n, m \geq N \Rightarrow |u_n - u_m| \leq \varepsilon \text{ (C)}$$

Théorème 4 : Toute suite de Cauchy est bornée.

*Démonstration : Choisissons m=N dans la définition précédente alors*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |u_n - u_N| \leq \varepsilon \Rightarrow |u_n| \leq |u_N| + \varepsilon$$

*D'où* $\forall n \in \mathbb{N}\ |u_n| \leq Max((|u_0|, |u_1| \dots |u_{N-1}|, |u_N| + \varepsilon)$. ■

Théorème 5 : Une suite converge dans $\mathbb{R}$ ssi elle est de Cauchy.

*Démonstration : (⇒) Soit* $(u_n)$ *convergente dans* $\mathbb{R}$ *alors*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon/2$$

*et par l'inégalité triangulaire*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n, m \geq N \Rightarrow |u_n - u_m| \leq |u_n - l| + |l - u_m| \leq \varepsilon$$

*D'où* $(u_n)$*est de Cauchy.*

*(⇐) Soit* $(u_n)$ *de Cauchy dans* $\mathbb{R}$ *et* $x \in \mathbb{R}$.

*Posons* $F(x) = \{n \in \mathbb{N} | u_n \leq x\}$ *et* $E = \{x \in \mathbb{R} | F(x) fini\}$. *E n'est pas vide puisque* $(u_n)$*est bornée et E est majoré.*

*E admet donc une borne supérieure S dans* $\mathbb{R}$. *Montrons que* $\lim u_n = S$.

*Soit* $\varepsilon$*>0. (C) donne alors* $\exists m \in \mathbb{N}\ n \geq m \Rightarrow |u_n - u_m| \leq \varepsilon/2$

*Donc si* $u_m - \varepsilon/2 \in E$ *alors* $u_m - \varepsilon/2 \leq S$ *et* $u_m + \varepsilon/2$ *majore E (sinon il existe* $x > u_m + \varepsilon/2$ *tel que* $F(x)$*soit fini ce qui contredit l'inégalité précédente) donc* $S \leq u_m + \varepsilon/2$ *d'où* $|u_m - S| \leq \varepsilon/2$.

*Ainsi* $\exists m \in \mathbb{N}\ n \geq m \Rightarrow |u_n - S| \leq |u_n - u_m| + |u_m - S| \leq \varepsilon$ *et donc* $(u_n)$ *converge vers S.* ■

Exemple : La suite $(u_n)$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ n'est pas convergente.

En effet, $\sum_{k=N}^{2N} 1/k \geq \sum_{k=N}^{2N} 1/2N = 1/2$ montre que $(u_n)$ n'est pas de Cauchy.

## II) Opérations Algébriques

Théorème 6 : Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles convergentes respectivement vers $l$ et $l'$. Alors :

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , la suite $(u_n + \lambda v_n)$ converge vers $l + \lambda l'$.

(ii)La suite $(u_n . v_n)$ converge vers $l . l'$.

(iii)Si $l' \neq 0$ alors $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang $N_0$ et $({}^{u_n}/_{v_n})_{n \geq N_0}$ converge vers $l/l'$.

(iv) La suite $(|u_n|)$ converge vers $|l|$.

*Démonstration : Soit* $\varepsilon > 0$. $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$ *et* $n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l'| \leq \varepsilon$.

*Posons* $N = max\ (N_1, N_2)$.

*(i)Supposons* $\lambda \neq 0$. *Si* $n \geq N$ *alors :*

$$|(u_n + \lambda v_n) - (l + \lambda l')| \leq |u_n - l| + |\lambda||v_n - l'| \leq (1 + |\lambda|)\varepsilon$$

*Or (1+*$|\lambda|$*) est une constante d'où la convergence.*

*(ii) Si* $n \geq N$ *alors :*

$$|u_n . v_n - l . l'| \leq |u_n - l| . |v_n| + |l| . |v_n - l'| \leq (|v_n| + |l|) . \varepsilon \leq (M + |l|) . \varepsilon$$

*La dernière inégalité étant due au fait que* $(v_n)$ *soit bornée car convergente.*

*(iii)Si* $l' \neq 0$, $|l'/2| > 0$ *et donc* $\exists N_0$ *tel que* $n \geq N_0 \Rightarrow |v_n - l'| \leq |l'/2|$ .

*Il s'en suit que* $-|l'/2| \leq v_n - l' \leq |l'/2|$.

*Donc si* $l' < 0$ *alors* $v_n \leq \frac{3l'}{2} < 0$ *et si* $l' > 0$ *alors* $v_n \geq \frac{l'}{2} > 0$ *donc* $v_n \neq 0$

*De plus, si* $n \geq N$, $\left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{l}{l'}\right| \leq \frac{|u_n . l' - v_n . l|}{|v_n . l'|} \leq \frac{|u_n . l' - l . l'| + |l . l' - v_n . l|}{|v_n . l'|} \leq \frac{|l'| + |l|}{|v_n . l'|} . \varepsilon$

*Ainsi,* $\forall n \geq N_0, |v_n| \geq \left|\frac{l'}{2}\right| \Rightarrow \forall n \geq max(N, N_0) \left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{l}{l'}\right| \leq 2\frac{|l'|+|l|}{|l'|^2}.\varepsilon.$

*(iv)* $\forall n \in N \; ||u_n| - |l|| \leq |u_n - l| \leq \varepsilon$ *d'où la convergence.* ■

Remarque : (i) montre que l'ensemble des suites réelles convergentes est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
(i) et (ii) montre que c'est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Exercice : Soit $(u_n)$ une suite réelle. On suppose que la suite $(v_n)$ définie par $v_n = \frac{7u_n}{5u_n - 3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ converge vers 4.
Montrer que $(u_n)$ converge vers 12/13.

Exercice : Soit $(u_n)$ *et* $(v_n)$ deux suites réelles convergentes ; montrer que la suite $(w_n)$ définie par min $(u_n, v_n)$ est convergente.

## III) Composition par une application continue

Théorème 7 : Soit *D* une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in D$, et $f: D \to \mathbb{R}$ une application continue en $x_0$.
Si $(u_n)$ est une suite de points de *D* qui converge vers $x_0$alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.

*Démonstration : Si f continue en* $x_0$*alors* $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0$ *tel que* $\forall x \in D \; |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$
*De plus,* $lim\, u_n = x_0$ *alors* $\exists N \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geq N \Rightarrow |u_n - x_0| \leq \eta.$
*Donc* $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geq N \Rightarrow |f(u_n) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ *d'où la convergence de* $(f(u_n))$ *vers* $f(x_0)$. ■

Exemple :a)$\lim \ln((n+4)/(n+8)) = 0$

b) Il est impossible de prolonger la fonction $f: x \to \sin(\frac{1}{x})$ par continuité en 0.
Dans le cas contraire, il existerait $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to 0} f(x) = l$ et pour toute suite $(u_n)$ à valeurs positives convergeant vers 0 $\lim f(u_n) = l$
Or pour $u_n = 1/(\frac{\pi}{2} + n2\pi)$ , on a $\lim f(u_n) = 1$ tandis que pour $v_n = 1/(-\frac{\pi}{2} + n2\pi)$, on obtient $\lim f(v_n) = -1$

Proposition 1 : Soient *D* une partie de $\mathbb{R}$ et $f: D \to D$ continue sur *D.*
Soit $(u_n)$ définie par recurrence par $u_0 \in D$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si $(u_n)$converge vers $l \in D$ alors $l$ est solution de l'équation $f(l) = l$.

*Démonstration : Si* $(u_n)$ *converge vers l alors a fortiori* $(u_{n+1})$ *également. De plus par le théorème précédent,* $(f(u_n))$ *converge vers* $f(l)$. *Puisque* $u_{n+1} = f(u_n)$ *par unicité de la limite, on a* $l = f(l)$. ■

Exemple : Soit $u_0 \in [0,1]$ *et* $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(u_n)$ converge vers 0.

## IV) Limites et Relation d'ordre

### *IV-1) Théorème des gendarmes*

Proposition 2 : Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites convergentes vers $l$ *et* $l'$ et si à partir d'un certain rang N, on a $u_n \leq v_n$ alors $l \leq l'$.

*Démonstration : Supposons* $l' > l$ *et posons* $\varepsilon = (l - l')/2$.
*Alors* $\exists N$ *tel que* $n \geq N \Rightarrow l - \varepsilon \leq u_n$ *et* $v_n \leq l' + \varepsilon$.
*Puisque* $l - \varepsilon = l' + \varepsilon = (l + l')/2$, *on a* $n \geq N \Rightarrow v_n \leq (l + l')/2 \leq u_n$ *: Absurde.* ■

Remarque : Même si $u_n < v_n$ on aura toujours $l \leq l'$ (exemple : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ *et* $v_n = 1 + \frac{1}{n}$).

Théorème des gendarmes: Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites convergentes de même limite $l \in \mathbb{R}$.
Soit $(w_n)$ une suite réelle telle qu'à partir d'un certain rang $n_0$ on ait $u_n \leq w_n \leq v_n$
Alors $(w_n)$ est une suite convergente et on a $\lim w_n = l$.

*Démonstration : Soit $\mathcal{E}>0$ fixé. De la convergence de $(u_n)$ et $(v_n)$, on tire :*
$$\exists N \; tel \; que \; n \geq N \Rightarrow l - \varepsilon \leq u_n \; et \; v_n \leq l + \varepsilon$$
*Alors on a $n \geq max(N, n_0) \Rightarrow l - \varepsilon \leq u_n \leq w_n \leq v_n \leq l + \varepsilon$ d'où $|w_n - l| \leq \varepsilon$ et la convergence de $(w_n)$.■*

Exemple : Soit $(w_n)$ définie par $w_n = n.\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$.
Si $1 \leq k \leq n$, on a $\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$ puis en sommant de 1 à n, $\frac{n^2}{n^2+n} \leq w_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$
d'où $\lim w_n = 1$.

*IV-2) Suites adjacentes*

Définition 3 : Deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si leur différence $(u_n - v_n)$converge et a pour limite 0.

Proposition 3 : Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.

*Démonstration : Supposons $(u_n)$ croissante et $(v_n)$ décroissante et ainsi $(u_n - v_n)$ est croissante.*
*Puisque $(u_n - v_n)$ converge vers 0, $u_n - v_n \leq 0 \Rightarrow u_n \leq v_n$.*
*De plus, $\forall n, p \in \mathbb{N} \; u_n \leq v_p$.*
*(Si $\exists N, P \in \mathbb{N} \; tel \; que \; u_N > v_P \; alors \; v_n \leq v_P < u_N \leq u_n \forall n \geq max(N, P)$*
*$et \; alors \; 0 < |u_N - v_P| \leq |u_n - v_n| : \; Absurde$)*
*Donc $(u_n)$ croissante et majorée donc convergente vers $l$.*
*De même $(v_n)$ décroissante et minorée donc convergente vers $l'$.*
*Or $lim \; v_n - u_n = 0$ donc $lim \; u_n = lim \; v_n$ i.e. $l = l'$.■*

Exemple : Les suites $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}) + \frac{1}{n!}$ sont adjacentes et convergent vers $e$[1].

## V) Suites complexes

Proposition 4: Soit $(u_n)$ une suite complexe et $l \in \mathbb{C}$. Alors $\lim u_n = l \Leftrightarrow \lim \Re(u_n) = \Re(l) \; et \lim \Im(u_n) = \Im(l)$.

*Démonstration : On a (⇒) par les inégalités $|\Re(z)| \leq |z|$ et $|\Im(z)| \leq |z|$ vraies pour tout $z \in \mathbb{C}$ et (⇐) par l'inégalité $|z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|$■*

Remarque : Ainsi l'étude de la convergence d'une suite complexe se ramène à l'étude de deux suites réelles. De plus, tous les théorèmes et propositions ne faisant intervenir de relations d'ordre restent vrais dans $\mathbb{C}$.