LECON 52 : Suites monotones, suites adjacentes Approximation d'un nombre réel Développement décimal

Pré-requis : suites réelles majorées, minorées, convergentes axiome de la borne supérieur (toute partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée admet une borne supérieure).

Notation : on notera (U_n) la suite réelle $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I/ Suites monotones

Def 1 : i) une suite réelle (U_n) est croissante (resp décroissante) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (resp $u_{n+1} \leq u_n$).

ii) une suite réelle (U_n) est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.

Etude pratique de la monotonie :

- signe de $u_{n+1} - u_n$
- pour une suite à termes positifs, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
- par récurrence
- s'il s'agit d'une suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$

→ Si f est croissante alors (U_n) est monotone

→ Si f est décroissante, alors $f\circ f$ est croissante et les suites v et w définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont monotones.

Thm 1 : toute suite réelle croissante (resp. décroissante) majorée (resp. minorée) est convergente.

Exercice 1 : Soit la suite (U_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$

1) Montrer que (U_n) est croissante et que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \leq 2$.

2) En déduire que (U_n) converge et calculer sa limite (On appelera nombre d'or la limite de (U_n)).

II/ Suites adjacentes

Def 2 : Deux suites (U_n) et (V_n) sont dites adjacentes si (U_n) est croissante (V_n) est décroissante et $\lim (v_n - u_n) = 0$.

Thm 2 : Si (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.

Lemme 1 : Si (U_n) et (V_n) sont adjacentes, alors $\forall n, p \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n \leq v_p.$$

□ thm 2

(U_n) et (V_n) sont adjacentes donc prenons par exemple (U_n) croissante et (V_n) décroissante. (U_n) est croissante et majorée $\forall n \in \mathbb{N}$ par v_0 donc converge vers un réel l. (V_n) est décroissante et minorée $\forall n \in \mathbb{N}$ par u_0 donc converge vers l'.
D'après la définition de suites adjacentes, on doit avoir
$\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = l' - l = 0$

$\Rightarrow l = l'$ ☒

Exercice 2 : 1) On pose $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$
Montrer que (U_n) et (V_n) sont adjacentes.
(On notera e leur limite commune)

2) On pose $u_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ et $v_n = 2^n \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$
Montrer que (U_n) et (V_n) sont adjacentes
(On notera que la limite commune de ces deux suites est π).

III / Approximation d'un réel

Thm 3 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et telle que $f(a) f(b) < 0$, alors grâce à la méthode de dichotomie, on peut conclure que f admet au moins une racine dans l'intervalle $[a,b]$.

□ On utilise le principe de dichotomie

On définit deux suites (U_n) et (V_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{si } f(u_n) f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) < 0$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = v_n \quad \text{si } f(u_n) f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) > 0$$

Rq : si $f(u_n) f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) = 0$ alors $\frac{u_n + v_n}{2}$ est la racine cherchée

(U_n) et (V_n) sont respectivement croissante et décroissante et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - v_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$

$\lim \frac{b-a}{2^n} = 0$ donc $\lim |u_n - v_n| = 0$

(U_n) et (V_n) sont donc des suites adjacentes qui convergent vers une même limite dans $[a,b]$ que l'on note ℓ.

f est continue donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(U_n) = f(\ell) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(V_n)$

En passant à la limite dans $f(U_n)f(V_n) \leq 0$ on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} f(U_n)\, f(V_n) \leq 0 \Rightarrow (f(\ell))^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow f(\ell) = 0 \quad \blacksquare.$$

Corollaire : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue, alors pour tout réel u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = u$.

Exemple : On cherche à approcher $\sqrt{2}$. Pour cela, on considère la fonction $f : x \to x^2 - 2$.
(faire tourner le programme de dichotomie avec f).

2) Developpement décimal

Proposition : Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $a_n = 10^{-n}[10^n x]$ et $b_n = a_n + 10^{-n}$

i) Alors les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent vers x

ii) Il existe une suite $(d_n)_{n\geq 0}$, où $d_0 \in \mathbb{Z}$, $d_i \in \{0,1,\dots,9\}$ pour $i \geq 1$, ($d_0 = [x]$ et pour tout $n \geq 1$, $d_n = [10^n x] \bmod 10$) telle que pour tout $n \geq 0$, $a_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{d_i}{10^i}$

(iii) On a $x = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \frac{d_i}{10^i}$ et on écrit $x = d_0, d_1 d_2 \dots d_n \dots$
ce qui s'appelle l'écriture décimale de x.

Remarque : cette décomposition n'est pas unique. En effet $1 = 0,9999\dots$

Exemple (au transparent) :

$$\pi \simeq 3,141$$

Pour $n \in \{0,1,2\}$: $a_0 = [3,14] = 3$ $\qquad b_0 = 3+1 = 4$
$a_1 = 10^{-1}[10 \times 3,14] = 3,1$ $\qquad b_1 = 3,1 + 0,1 = 3,2$
$a_2 = 10^{-2}[100 \times 3,14] = 3,14$ $\qquad b_2 = 3,14 + 0,01 = 3,15$

$d_0 = [3,14] = 3$
$d_1 = [10 \times 3,14] \bmod 10 = 1$
$d_2 = [100 \times 3,14] \bmod 10 = 4$

Pour $n = 2$, on a bien $a_2 = \sum\limits_{i=0}^{2} \frac{d_i}{10^i}$

3) Approximation de π

Au transparent) Méthode d'Archimède

Posons $u_n = 2^n \sin(\pi/2^n)$ et $v_n = 2^n \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

Pour calculer (u_n) et (v_n), on ne fait pas appel aux fonctions sinus ou tangente mais on introduit la suite auxiliaire

$$c_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

qui se calcule de façon autonome par récurrence. On obtient que $c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+c_n}{2}}$ grâce à la formule $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$.

On obtient grâce à la formule $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ que

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{c_{n+1}} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{c_{n+1}}.$$

Finalement, en posant $c_1 = 0$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \geq 1$

$$\cdot\ c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+c_n}{2}} \ ;\ u_{n+1} = \frac{u_n}{c_{n+1}} \ ;\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{c_{n+1}}$$

(Montrer à l'aide du tableur de la calculatrice que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent vers π).

COMPLEMENTS : démonstration + corrigé exercices

Théorème 1 :

□ Soit $l = \sup(U_n)$. Montrons que la suite (U_n) converge vers l.
Par hypothèse, (U_n) est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ (i)
et (U_n) est majorée donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant l$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $l = \sup(U_n)$, $l - \varepsilon$ n'est pas un majorant de (U_n) donc $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $l - \varepsilon \leqslant u_{N_0}$
D'après (i), $\forall n \geqslant N_0$, $u_n \geqslant u_{N_0}$ donc $\forall n \geqslant N_0$

$$l - \varepsilon \leqslant u_{N_0} \leqslant U_n \leqslant l \leqslant l + \varepsilon$$

$$\Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon \qquad \boxtimes$$

Lemme 1 :

□ Supposons par l'absurde qu'il existe deux entiers N et P tel que $u_N > v_P$. D'après les hypothèses, (U_n) est croissante et (v_n) est décroissante. Pour tout $n \geqslant \max(N, P)$, on a

$$v_n < v_P < u_N < u_n$$

$$\Rightarrow \quad 0 < |u_N - v_P| \leqslant |u_n - v_n|$$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - v_n| = 0 \Rightarrow \lim |u_N - v_P| = 0$

Absurde $\boxtimes$.

Exercice 1 :

1) • $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$

f dérivable sur $]-1, +\infty[$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} > 0$

donc $f \nearrow$ sur $]-1, +\infty[$ et donc (U_n) est monotone.
Or $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ donc (U_n) est croissante.

• Par récurrence : initialisation au rang $n = 0$ $\quad u_0 = 0 \leqslant 2$

Supposons $HR(n)$: " $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2$ " vraie au rang n.

$$u_n \leqslant 2$$
$$\Rightarrow u_n + 1 \leqslant 3 \Rightarrow \sqrt{1 + u_n} \leqslant \sqrt{3} \leqslant 2 \Rightarrow u_{n+1} \leqslant 2$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$ donc est toujours vraie.

2) (U_n) est croissante et majorée donc elle converge. (vers un point fixe).

$$f(x) = x \iff \underbrace{x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}_{\text{impossible}} \text{ ou } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \qquad \boxtimes.$$

Exercice 2 :

1) $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ donc $(u_n) \nearrow$

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$

$= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!} < 0$ pour $n > 1$

$\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} = 0$ donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2). $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

$= 2^n \left(2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)$

Or $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \leq 2\sin(a)$

Pour $a = \frac{\pi}{2^{n+1}}$, on a $\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \leq 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

- $v_{n+1} - v_n \leq 0$ (pas reussi à le demontrer).
- $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(2^n\left(\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)\right) = 0$

donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

<u>PROGRAMME DICHOTOMIE</u> : renvoie u et v tel que $v - u < n$ et $v <$ racine $< u$.

```
dicho(f, a, b, n)
Prgm
Local u, v, g
a -> u : b -> v :
expr(string(f) & "-> g(x)")
while v - u > n
If g(u) x g((u+v)/2) = 0 then : disp "la racine est" &string((u+v)/2)
Stop
Else : if g(u) x g((u+v)/2) < 0 then : ((u+v)/2) -> v
Else ((u+v)/2) -> u
Endif : Endif
EndWhile
approx(u) -> u ; approx(v) -> v :
Disp "u = " & string(u)
Disp "v = " & string(v)
EndPrgm.
```

<u>ex</u> : dicho$(f, 1, 2, 10^{-5})$ avec $f(x) = x^2 - 2$ renvoie u et v tel que $v - u < 10^{-5}$ et $v < \sqrt{2} < u$.