Leçon 44 **Recherche des isométries du plan conservant un polygone régulier ; exemples (triangle équilatéral, carré, hexagone, octogone…)**

Pré-requis

Isométries, déplacements (conservent les angles), antidéplacements (renversent les angles)
Conservation des barycentres par les isométries
Groupes

Cadre

On se place dans le plan P affine euclidien orienté.

Notations

$r(0,\theta)$ est la rotation de centre O et d'angle θ
$med[AB]$ est la médiatrice du segment $[AB]$

I – Polygones convexes réguliers

Définition 1 : Soient $n \in N, n \geq 3$ et $O \in P$
Soient $M_0, M_1, ..., M_{n-1}$ n points distincts deux à deux de P
L'ensemble $P_n = \{[M_0M_1],[M_1M_2],...,[M_{n-2}M_{n-1}],[M_{n-1}M_0]\}$ est un polygone convexe régulier de centre O à n cotés s'il existe une rotation r de centre O et d'angle $\pm\frac{2\pi}{n}$ telle que :
$\forall k \in \{0,1,...,n-2\} : r(M_k) = M_{k+1}$ et $r(M_{n-1}) = M_0$
Les segments $[M_kM_{k+1}]$ sont appelés arêtes ou côtés du polygone.

Remarque : Il suffit d'étudier le cas où le polygone convexe régulier est direct, c'est-à-dire le cas où l'angle de la rotation est $\frac{2\pi}{n}$. En effet, quite à renuméroter les sommets de P_n, on peut toujours se ramener à ce cas là.

Notation : On note $P_n = M_0M_1...M_{n-1}$ le polygone convexe régulier direct.

Propriété 1 : Avec les notations de la définition :
1) Pour tout $k \in \{0,1,...,n-1\}$, M_k appartient au cercle de centre O et de rayon OM_0
2) Pour tout $k \in \{0,1,...,n-2\}$, $\left(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \frac{2\pi}{n}[2\pi]$
3) O est l'isobarycentre des sommets $M_0, M_1, ..., M_{n-1}$

Preuve : 1) et 2) sont évidents par définition de la rotation r
3) Soit G l'isobarycentre de $P_n = M_0M_1...M_{n-1}$
D'après la définition, r est une isométrie qui laisse invariant les sommets de P_n, $r(G)$ est donc l'isobarycentre de P_n
On a $r(G) = G$, donc G est un point fixe de r. Or par définition de r, son seul point fixe est O.
Donc $G = O$.

II – Isométries du plan conservant un polygone convexe régulier à n côtés

Notation : Dans cette partie, P_n désigne un polygone convexe régulier direct à n cotés de centre O.

A – Etude de $Is(P_n)$

Définition 2 : On dit qu'une isométrie conserve le polygone P_n si l'image de tout côté de P_n est un côté de P_n.

Notations : $Is(P_n) = \{$isométries du plan qui conservent $P_n\}$

$Is^+(P_n) = \{$déplacements du plan qui conservent $P_n\}$

$Is^-(P_n) = \{$antidéplacements du plan qui conservent $P_n\}$

Proposition 1 : $(Is(P_n),\circ)$ est un groupe.

Preuve : $(Is(P_n),\circ)$ est un sous-groupe du groupe des isométries du plan $(Is(P),\circ)$ car

- $(Is(P_n),\circ)$ n'est pas vide : il contient l'identité
- Soit $f \in Is(P_n)$, $f(P_n) = P_n \Rightarrow P_n = (f^{-1} \circ f)(P_n) = f^{-1}(P_n) \Rightarrow f^{-1} \in Is(P_n)$
- Soient $f, g \in Is(P_n)$, $(f \circ g)(P_n) = f(P_n) = P_n$ donc $f \circ g \in Is(P_n)$

Proposition 2 : Si $f \in Is(P_n)$ alors l'image par f de tout sommet de P_n est un sommet de P_n.

Preuve : f est une isométrie qui conserve le polygone P_n, elle envoie un côté sur un côté donc forcement un sommet sur un sommet.

Conséquence 1 : L'isobarycentre des sommets de P_n est invariant par f.

Preuve : Les sommets sont conservés donc l'isobarycentre est inchangé.

Conséquence 2 : f est soit l'identité, soit une rotation de centre 0, soit une réflexion d'axe passant par 0.

Preuve : Ce sont les isométries de P ayant 0 comme point fixe.

Remarque : La proposition et ses conséquences sont également vraies pour un polygone quelconque.

Proposition 3 : Soit f une isométrie, si l'image par f de tout sommet de P_n est un sommet de P_n alors $f \in Is(P_n)$.

Preuve : Soient M_k et M_{k+1} deux sommets consécutifs de P_n. D'après la définition de P_n, on sait qu'il existe une rotation r telle que $r(M_k) = M_{k+1}$

De plus, par f, les sommets de P_n sont conservés donc l'isobarycentre de P_n est invariant par f et donc f est soit l'identité, soit une rotation de centre 0, soit une réflexion d'axe passant par 0 (par les conséquences 1 et 2 dans le cas d'un polygone quelconque).

Si $f = id$, $f(M_{k+1}) = M_{k+1} = r(M_k) = r \circ f(M_k)$

Si f est une rotation de centre 0, $f(M_{k+1}) = f \circ r(M_k) = r \circ f(M_k)$ car deux rotations commutent

Si f est une réflexion, alors $f = f^{-1}$ et $f \circ r$ est une réflexion.

$$f(M_{k+1}) = f \circ r(M_k) = (f \circ r)^{-1}(M_k) = r^{-1} \circ f^{-1}(M_k) = r^{-1} \circ f(M_k)$$

Dans les trois cas, l'image par f de deux sommets consécutifs sont des sommets consécutifs donc chaque côté de P_n est envoyé sur un côté de P_n.

Remarque : La réciproque ne s'étend pas à tout polygone.
Exemple : Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre 0.

Le quadrilatère $ABOC$ n'est pas invariant par la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ mais l'ensemble des sommets l'est.
En effet : $r(O)=0, r(A)=B, r(B)=C, r(C)=A$
et $r(ABOC)=BCOA \neq ABOC$

B – Etude de $Is^+(P_n)$

Proposition 4 : $(Is^+(P_n),\circ)$ est un sous-groupe de $(Is(P_n),\circ)$

Preuve : $Is^+(P_n)=Is(P_n)\cap Is^+(P)$
$(Is^+(P_n),\circ)$ est un groupe comme intersection de deux sous-groupes de $(Is(P),\circ)$

Proposition 5 : $Is^+(P_n)=\{id, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ où $r=r\left(O,\frac{2\pi}{n}\right)$

Remarque : $r^k=r\left(O,\frac{2k\pi}{n}\right)$

Preuve : Soit $R=\{id, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$
- $R\subset Is^+(P_n)$: r est une rotation telle que $r(P_n)=P_n$ donc $r\in Is^+(P_n)$ et comme $Is^+(P_n)$ est un groupe pour la composition, on a $r^k\in Is^+(P_n)\ \ \forall k\in\{0,\dots,n-1\}$
- $Is^+(P_n)\subset R$: soit $f\in Is^+(P_n)$, nécessairement f est l'identité ou une rotation de centre 0
  posons $f=r(O,\theta)$
  puisqu'une rotation est entièrement déterminée par son centre, un point et son image, il existe $k\in\{0,\dots,n-1\}$ tel que $f(M_0)=M_k$ (l'image d'un sommet est un sommet)
  ainsi, $\theta=(\overrightarrow{OM_0},\overrightarrow{OM_k})=\frac{2k\pi}{n}$, donc $f=r(O,k.\frac{2\pi}{n})=r^k$ avec $k\in\{0,\dots,n-1\}$

Remarque : $(Is^+(P_n),\circ)$ est un groupe cyclique d'ordre n, il est engendré par r. Ainsi, $(Is^+(P_n),\circ)$ est isomorphe à $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+\right)$

C – Etude de $Is^-(P_n)$

Remarque : La composée de deux antidéplacements étant un déplacement, $(Is^-(P_n),\circ)$ n'est pas un groupe.

Théorème 2 : Soit $s\in Is^-(P_n)$, on a : $Is^-(P_n)=\{s\circ f \mid f\in Is^+(P_n)\}$

Preuve : La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement donc pour tout $f\in Is(P_n)$, $s\circ f\in Is^-(P_n)$.
Réciproquement, si $g\in Is^-(P_n)$, alors il existe $s\in Is^-(P_n)$ tel que $g=s\circ s^{-1}\circ g$ avec $s^{-1}\circ g\in Is^+(P_n)$ car la composée de deux antidéplacements est un déplacement. Donc $g\in\{s\circ f \mid f\in Is^+(P_n)\}$.

Proposition 6 : $Is^{-}(P_n)=\{s_\Delta, s_\Delta \circ r, ..., s_\Delta \circ r^{n-1}\}$ où $r=r\left(O,\dfrac{2\pi}{n}\right)$ et s_Δ est la réflexion d'axe (OM_0)

Preuve : Soit $k\in\{0,...,n-1\}$

$M_k \in C(O,OM_0)$ et $s_\Delta(M_0)=M_0$ car $M_0\in\Delta$ donc $s_\Delta(C(O,OM_0))=C(O,OM_0)$

D'où $s_\Delta(M_k)\in C(O,OM_0)$

De plus, $\left(\overrightarrow{OM_0},\overrightarrow{Os_\Delta(M_k)}\right)=-\left(\overrightarrow{OM_0},\overrightarrow{OM_k}\right)=-\dfrac{2k\pi}{n}[2\pi]$

Donc $s_\Delta(M_k)=r^{-k}(M_0)=M_{n-k}$, d'où $s_\Delta(M_k)\in P_n$

On a donc $s_\Delta \in Is^{-}(P_n)$ et d'après le théorème 2 on finit la démonstration.

D – Conclusion

$Is(P_n)=Is^{+}(P_n)\cup Is^{-}(P_n)$

$Card(Is^{+}(P_n))=Card(Is^{-}(P_n))=n$

$Card(Is(P_n))=2n$, $(Is(P_n),\circ)$ est engendré par r d'ordre n et s_Δ d'ordre 2

Preuve : $Card(Is^{+}(P_n))=n$

Montrons que tous les éléments de $Is^{+}(P_n)=\{id,r,r^2,...,r^{n-1}\}$ sont distincts.

$id(M_0)=M_0, r(M_0)=M_1,...,r^{n-1}(M_0)=M_{n-1}$

$Card(Is^{-}(P_n))=n$

Car $Is^{-}(P_n)$ est en bijection avec $Is^{+}(P_n)$: d'après théorème 2 et proposition 6

III – Exemples

Notation : s_Δ la réflexion d'axe (OM_0)

Remarque : Pour tout $k\in\{0,1,...,n-1\}$, $s_\Delta\circ r(O,\theta)^k$ est une réflexion d'axe passant par O différente de l'identité (car tous les éléments de $Is(P_n)$ sont distincts). Il suffit donc de connaître l'image d'un des points de P_n pour déterminer de quelle réflexion il s'agit.

A – Le triangle équilatéral

Ici : $n=3$, $r=r\left(O,\dfrac{2\pi}{3}\right)$ et $r^2=r\left(O,\dfrac{4\pi}{3}\right)$

Proposition 7 : $Is(P_3)=\{id,r,r^2,s_\Delta,s_{\Delta1},s_{\Delta2}\}$ où $\Delta1=(OM_1)$ et $\Delta2=(OM_2)$

Dessin :

Preuve : $\Delta = med[M_1M_2]$

$s_\Delta \circ r \ : \ M_0 \mapsto s_\Delta(M_1) = M_2$ donc $s_\Delta \circ r = s_{\Delta 1}$ avec $\Delta 1 = med[M_0M_2] = (OM_1)$

$s_\Delta \circ r^2 \ : \ M_0 \mapsto s_\Delta(M_1) = M_1$ donc $s_\Delta \circ r^2 = s_{\Delta 2}$ avec $\Delta 2 = med[M_0M_1] = (OM_2)$

B – Le carré

Ici : $n = 4$, $r = r\left(O, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Proposition 8 : $Is(P_4) = \{id, r, r^2, r^3, s_\Delta, s_{\Delta 1}, s_D, s_{D1}\}$
où $\Delta 1 = (OM_1)$, $D = med[M_0M_3]$ et $D1 = med[M_0M_1]$

Dessin :

Preuve : $\Delta = med[M_1M_3] = (M_0M_2)$

$s_\Delta \circ r \ : \ M_0 \mapsto s_\Delta(M_1) = M_3$ donc $s_\Delta \circ r = s_D$ avec $D = med[M_0M_3]$

$s_\Delta \circ r^2 \ : \ M_0 \mapsto s_\Delta(M_2) = M_2$ donc $s_\Delta \circ r^2 = s_{\Delta 1}$ avec $\Delta 1 = med[M_0M_2] = (OM_1)$

$s_\Delta \circ r^3 \ : \ M_0 \mapsto s_\Delta(M_3) = M_1$ donc $s_\Delta \circ r^3 = s_{D1}$ avec $D1 = med[M_0M_1]$

C – L'hexagone

Ici : $n = 6$, $r = r\left(O, \dfrac{2\pi}{6}\right)$

Proposition 9 : $Is(P_6) = \{id, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s_\Delta, s_{\Delta 1}, s_{\Delta 2}, s_D, s_{D1}, s_{D2}\}$
où $\Delta 1 = (OM_2)$, $\Delta 2 = (OM_1)$, $D = med[M_0M_5]$, $D1 = med[M_0M_3]$ et $D2 = med[M_0M_1]$

Dessin :

Preuve : $M_0M_2M_4$ est un triangle équilatéral et $\Delta = med[M_2M_4]$

Donc d'après la proposition 7 : $s_\Delta \circ r^2 = s_{\Delta 1}$ avec $\Delta 1 = (OM_2)$

$s_\Delta \circ r^4 = s_{\Delta 2}$ avec $\Delta 2 = (OM_4) = (OM_1)$

$\Delta = med[M_1M_5] = (M_0M_3)$

$s_\Delta \circ r \ : \ M_0 \mapsto s_\Delta(M_1) = M_5$ donc $s_\Delta \circ r = s_D$ avec $D = med[M_0M_5]$

$s_\Delta \circ r^3 \ : \ M_0 \mapsto s_\Delta(M_3) = M_3$ donc $s_\Delta \circ r^3 = s_{D1}$ avec $D1 = med[M_0M_3]$

$s_\Delta \circ r^5 \ : \ M_0 \mapsto s_\Delta(M_5) = M_1$ donc $s_\Delta \circ r^5 = s_{D2}$ avec $D2 = med[M_0M_1]$

D – L'octogone

Ici : $n=8$, $r=r\left(O,\dfrac{\pi}{4}\right)$

Proposition 10 : $Is(P_8)=\{id,r,r^2,r^3,r^4,r^5,r^6,r^7,s_\Delta,s_{\Delta 1},s_{\Delta 2},s_{\Delta 3},s_D,s_{D1},s_{D2},s_{D3}\}$ où $\Delta 1=(0M_7)$, $\Delta 2=(OM_2)$, $\Delta 3=(OM_1)$, $D=med[M_0M_7]$, $D1=med[M_0M_5]$, $D2=med[M_0M_3]$ et $D3=med[M_0M_1]$

Dessin :

Preuve : $M_0M_2M_4M_6$ est un carré et $\Delta=med[M_2M_6]=(M_0M_4)$

Donc d'après la proposition 8, $s_\Delta\circ r^2=s_{\Delta 1}$ avec $\Delta 1=med[M_0M_6]=(OM_7)$

$s_\Delta\circ r^4=s_{\Delta 2}$ avec $\Delta 2=(OM_2)$

$s_\Delta\circ r^6=s_{\Delta 3}$ avec $\Delta 3=med[M_0M_2]=(OM_1)$

$\Delta=med[M_1M_7]=med[M_3M_5]$

$s_\Delta\circ r$: $M_0\mapsto s_\Delta(M_1)=M_7$ donc $s_\Delta\circ r=s_D$ avec $D=med[M_0M_7]$

$s_\Delta\circ r^3$: $M_0\mapsto s_\Delta(M_3)=M_5$ donc $s_\Delta\circ r^3=s_{D1}$ avec $D1=med[M_0M_5]$

$s_\Delta\circ r^5$: $M_0\mapsto s_\Delta(M_5)=M_3$ donc $s_\Delta\circ r^5=s_{D2}$ avec $D2=med[M_0M_3]$

$s_\Delta\circ r^7$: $M_0\mapsto s_\Delta(M_7)=M_1$ donc $s_\Delta\circ r^7=s_{D3}$ avec $D3=med[M_0M_1]$