43 Etude des transformations du plan euclidien qui conservent les rapports de distances.

pré-requis

* isométries, homothéties
  - ↳ déplacement (translation ou rotation)
  - ↳ antidéplacement (symétrie axiale ou glissée)
* transformations affines
* groupe, sous-groupe.
* complexes.

cadre (transparent)

$\mathcal{P}$ plan affine euclidien orienté
↳ nécessaire dès que l'on parle de la mesure d'un angle

$\vec{\mathcal{P}}$ plan vectoriel associé.

On munit $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé direct.

introduction (transparent)

Soit f une application du plan et A, B, C, D, A', B', C' et D' huit points du plan tels que $f(A)=A'$ $f(B)=B'$ $f(C)=C'$ et $f(D)=D'$ et tels que $A \neq B$ et $C \neq D$

si f conserve les rapports de distances alors $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$ càd que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD} = k > 0$

donc $\exists k \in \mathbb{R}_+^* \ \forall (A,B) \in \mathcal{P}^2 \ f(A)f(B) = k AB$.

I) Les similitudes

définition Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Une similitude du plan de rapport k est une application $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ telle que $\forall (A,B) \in \mathcal{P}^2 \ f(A)f(B) = k AB$.

remarque si $k = 1$ f est une isométrie.

proposition Soit $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ alors f conserve les rapports de distances ssi $\exists k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f soit une similitude de rapport k.

exemple les homothéties sont des similitudes.

théorème Toute similitude de rapport $k>0$ est la composée d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie. Cette décomposition n'est pas unique.

conséquences

* toute similitude est une transformation affine.
* toute similitude f de rapport $k>0$ transforme une droite en une droite, un segment en un segment, un cercle $\mathcal{C}(O,r)$ en un cercle $\mathcal{C}'(f(O), kr)$
* toute similitude conserve le barycentre, les angles géométriques (càd $\exists \theta \in [0;\pi]$ tq $\forall (A,B) \in \mathcal{P}^2 \ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{f(A)f(B)}) = \theta \ (\pi)$), le parallélisme, l'orthogonalité et multiplie les aires par k^2.

proposition Soit $\mathrm{sim}(\mathcal{P})$ l'ensemble des similitudes

$(\mathrm{sim}(\mathcal{P}), \circ)$ est un sous-groupe du groupe des transformations

autrement dit une similitude est bijective et sa réciproque est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$ et

si f et g sont deux similitudes alors $f \circ g$ est une similitude de rapport kk'

II) Similitudes directes et indirectes

1) Définitions

définition — On appelle similitude directe (resp indirecte) toute similitude qui conserve les angles orientés de vecteurs (resp qui transforme les angles orientés de vecteurs en leurs opposés)

proposition — une similitude est soit directe, soit indirecte.

remarque — si f est une similitude indirecte alors $f \circ s$ où s est une réflexion d'axe une droite $\mathcal{D}$ est une similitude directe.

remarque — L'ensemble des similitudes directes est un sous-groupe de sim($\mathcal{P}$)

exemple — une homothétie de rapport négatif $-a$, $a>0$ est la composée de l'homothétie de même centre de rapport a avec la rotation de même centre et d'angle π donc c'est une similitude directe de rapport a.

2) Ecriture complexe.

proposition — Toute similitude directe (resp indirecte) de rapport $k>0$ a une écriture complexe de la forme $z \mapsto az+b$ (resp $z \mapsto a\bar{z}+b$) où $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ avec $|a|=k$.
Réciproquement l'écriture complexe $z\mapsto az+b$ (resp $z\mapsto a\bar{z}+b$) où $(a,b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$ est celle d'une similitude directe (resp indirecte) de rapport $|a|$

démonstration (cas f directe)

$f = h_{(\Omega,k)} \circ g$ avec Ω d'affixe w, $(k>0)$
g isométrie qui conserve les angles orientés.

g est soit une translation, soit une rotation.

* si g est une translation de vecteur $\vec{w}(\alpha)$ alors $f : \mathcal{P} \xrightarrow{g} \mathcal{P} \xrightarrow{h} \mathcal{P}$

$$M(z) \longmapsto M'(z+\alpha) \longmapsto M''\big(k(z+\alpha-w)+w\big)$$

en posant $a=k$ et $b=k(\alpha-w)+w$:

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P},\quad M(z) \longmapsto M''(az+b) \quad \text{où } |a|=k.$$

* si g une rotation de centre P d'affixe p et d'angle θ alors :

$$f : \mathcal{P} \xrightarrow{g} \mathcal{P} \xrightarrow{h} \mathcal{P}$$
$$M(z) \longmapsto M'\big(\underbrace{e^{i\theta}(z-p)+p}_{=Z}\big) \longmapsto M''\big(k(Z-w)+w\big)$$

en posant $a=ke^{i\theta}$ et $b=k(-e^{i\theta}p+p-w)$: $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$, $M(z) \longmapsto M''(az+b)$ où $|a|=k$.

réciproquement soit $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$, $M(z) \longmapsto M'(az+b)$ avec $a\neq 0$.

ne pas le faire. trop long.

Vérifions que : $\exists k\in\mathbb{R}_+^* \ \forall (A,B)\in\mathcal{P}^2 \ f(A)f(B)=kAB$
$\forall (A,B)\in\mathcal{P}^2 \ (\vec{OA},\vec{OB}) = (\overrightarrow{f(O)f(A)}, \overrightarrow{f(O)f(B)}) \ (2\pi)$ (A, B distincts de O)

soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $f(A)$ a pour affixe az_A+b, $f(B)$ ——— az_B+b. $f(O)$ a pour affixe b.

- $f(A)f(B) = |az_A+b-az_B-b| = |a||z_A-z_B| = |a|AB$. $k=|a|$.
- $(\vec{OA},\vec{OB}) = \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) \ (2\pi)$

$(\overrightarrow{f(O)f(A)}, \overrightarrow{f(O)f(B)}) = \arg\left(\frac{az_B+b-b}{az_A+b-b}\right) = \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) \ (2\pi)$ $\Big| \Rightarrow (\vec{OA},\vec{OB}) = (\overrightarrow{f(O)f(A)}, \overrightarrow{f(O)f(B)}) \ (2\pi)$

exercice (transparent)

Soient quatre points A, B, A' et B' tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.

1) Montrer qu'il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

2) ——— indirecte ———

3] Points fixes.

proposition

Soit f une similitude de rapport $k \neq 1$ alors f possède un unique point fixe Ω.

si f est directe Ω a pour affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$

si f est indirecte Ω a pour affixe $\omega = \dfrac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$

(où (a,b) sont les nbres complexes de la prop précédente)

4] Classification (transparent)

Soit f une similitude directe d'écriture complexe $z \mapsto az+b$ où $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

	$a = 1$	$a \neq 1$
nature de f	translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b	produit commutatif unique d'une homothétie de rapport $\lvert a\rvert$ et d'une rotation d'angle θ de même centre

Lorsque $a \neq 1$ toute similitude directe f est caractérisée par un centre Ω (qui est l'unique point fixe de f) par un rapport $|a|$ (qui est le rapport de l'homothétie) et par un angle θ (qui est l'angle de la rotation)

Soit f une similitude indirecte d'écriture complexe $z \mapsto a\bar{z}+b$ où $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

	$\lvert a\rvert = 1$		$\lvert a\rvert \neq 1$
	$a\bar{b}+b = 0$	$a\bar{b}+b \neq 0$	
nature de f	réflexion	symétrie glissée	produit commutatif unique d'une homothétie de rapport $\lvert a\rvert$ et d'une réflexion d'axe contenant le centre de l'homothétie.

Lorsque $|a| \neq 1$ toute similitude indirecte f est caractérisée par un centre Ω (qui est l'unique point fixe de f) par un rapport $|a|$ (qui est le rapport de l'homothétie) et par une droite $\mathcal{D}$ (qui est l'axe de la réflexion)

DEMONSTRATIONS

I) Les similitudes

Proposition.

$\Rightarrow$ immédiat (introduction)

$\Leftarrow$ si f est une similitude alors $\exists k \in \mathbb{R}_+^*$ tq $A'B' = kAB$ et $C'D' = kCD$ $\forall (A,B,C,D)$ distincts avec $A' = f(A)$ $B' = f(B)$ $C' = f(C)$ et $D' = f(D)$ d'où $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$ donc f conserve les distances.

théorème.

Soit f une similitude de rapport $k > 0$

Pour toute homothétie h de rapport $\frac{1}{k}$ l'application $g = f \circ h$ conserve les distances donc est une isométrie.

En effet : h est une similitude car elle conserve les rapports de distances donc $h(A)h(B) = \frac{1}{k}AB$, de plus par définition on a : $f(h(A))f(h(B)) = k\,h(A)h(B)$ d'où $g(A)g(B) = AB$.

h^{-1} est l'homothétie de rapport k donc $g \circ h^{-1} = f \circ \underbrace{h \circ h^{-1}}_{id} = f$

f est donc la composée d'une homothétie de rapport $k > 0$ et d'une isométrie.

Réciproquement,

soit $f = h \circ g$ où h est une homothétie de rapport $k > 0$ et g une isométrie alors f multiplie les distances par k donc f est une similitude de rapport k.

En effet : $\forall (A,B)$ $g(A)g(B) = AB$ et $h(g(A))h(g(B)) = k\,g(A)g(B)$ donc $f(A)f(B) = kAB$.

Proposition.

* $id \in Sim(\mathcal{P})$ donc $Sim(\mathcal{P}) \neq \emptyset$
* Soient $f \in Sim(\mathcal{P})$ et $g \in Sim(\mathcal{P})$ telles que f soit de rapport k et g de rapport k'.

  $\forall (A,B)$ $g(A)g(B) = k'AB$

  or $f(g(A))f(g(B)) = k\,g(A)g(B)$ donc $f \circ g(A)\, f \circ g(B) = kk'AB$ donc $f \circ g \in Sim(\mathcal{P})$
* Soit $f \in Sim(\mathcal{P})$.

  Il existe h une homothétie de rapport $k > 0$ et g une isométrie telles que $f = h \circ g$.

  g^{-1} est une isométrie et h^{-1} une homothétie de rapport $\frac{1}{k}$ donc par composition $g^{-1} \circ h^{-1}$ multiplie les distances par $\frac{1}{k}$ donc $g^{-1} \circ h^{-1} = f^{-1}$ est une similitude.

II) similitudes directes et indirectes.

1) Définitions.

proposition.

Soit f une similitude alors f est la composée d'une homothétie h de rapport $k > 0$ et d'une isométrie g. h conserve les angles orientés donc $h \circ g$ conserve les angles orientés ssi g les conserve.

g est soit :

* un déplacement, dans ce cas $h \circ g$ conserve les angles orientés donc f est directe
* un antidéplacement, dans ce cas $h \circ g$ transforme les angles orientés en leurs opposés donc f est indirecte.

remarque.

$g = f \circ s$ est une similitude, de plus f et s inversent les angles orientés donc par composition g conserve les angles orientés donc g est une similitude directe.

remarque.

notons H l'ensemble des similitudes directes.

* $id \in H$ donc $H \neq \emptyset$
* Soient f et $g \in H$ telles que f de rapport $k>0$ g de rapport $k'>0$
  $f \circ g$ est une similitude montrons qu'elle est directe.
  $\forall (A,B)$ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{g(0)g(A)}, \overrightarrow{g(0)g(B)})$ (2π) et $(\overrightarrow{f\circ g(0) f\circ g(A)}, \overrightarrow{f\circ g(0) f\circ g(B)}) = (\overrightarrow{g(0)g(A)}, \overrightarrow{g(0)g(B)})$ (2π)
  d'où $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{f\circ g(0) f\circ g(A)}, \overrightarrow{f\circ g(0) f\circ g(B)})$ (2π) donc $f \circ g$ est directe.
* soit $f \in H$ de rapport $k>0$
  f^{-1} est une similitude, montrons qu'elle est directe.
  $f = g \circ h$ où h homothétie de rapport k et g isométrie conservant les angles orientés
  $\forall (A,B)$ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{g^{-1}(0)g^{-1}(A)}, \overrightarrow{g^{-1}(0)g^{-1}(B)})$ (2π) et
  $$(\overrightarrow{h^{-1}\circ g^{-1}(0)\, h^{-1}\circ g^{-1}(A)}, \overrightarrow{h^{-1}\circ g^{-1}(0)\, h^{-1}\circ g^{-1}(B)}) = (\overrightarrow{g^{-1}(0)g^{-1}(A)}, \overrightarrow{g^{-1}(0)g^{-1}(B)})\ (2\pi)$$
  d'où $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{f^{-1}(0)f^{-1}(A)}, \overrightarrow{f^{-1}(0)f^{-1}(B)})$ (2π) d'où $f^{-1} \in H$.

2] écriture complexe.

proposition.

(cas f indirecte)

Soit f une similitude indirecte.

$g = f \circ s$, où s = réflexion d'axe (Ox), est une similitude directe.

D'après ce qui précède $g : \begin{array}{l} \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \\ M(z) \longmapsto M'(az+b) \end{array}$ avec $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Puisque $s \circ s = id$ alors $g \circ s = f$ d'où $f : \begin{array}{l} \mathcal{P} \xrightarrow{s} \mathcal{P} \xrightarrow{g} \mathcal{P} \\ M(z) \longmapsto M'(\bar{z}) \longmapsto M''(a\bar{z}+b) \end{array}$

réciproquement,

soit $f : \begin{array}{l} \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \\ M(z) \longmapsto M'(a\bar{z}+b) \end{array}$

$\forall (A,B)$ $f(A)$ a pour affixe $a\bar{z}_A + b$, $f(B) : a\bar{z}_B + b$ et $f(0) : b$.

* $f(A)f(B) = |a\bar{z}_A + b - a\bar{z}_B - b| = |a||\overline{z_A - z_B}| = |a||z_A - z_B| = |a|\, AB$.
* $(\overrightarrow{f(0)f(A)}, \overrightarrow{f(0)f(B)}) = \arg\left(\dfrac{a\bar{z}_B + b - b}{a\bar{z}_A + b - b}\right) = \arg\left(\overline{\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)}\right) = -\arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right) = \arg\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ (2π)

donc f est une similitude qui inverse les angles orientés $\Rightarrow$ f similitude indirecte.

exercice.

1) notons z_A, z_B, $z_{A'}$ et $z_{B'}$ les affixes de A, B, A' et B'.

Prouver l'existence et l'unicité d'une similitude directe (d'écriture complexe $z \mapsto az+b$) telle que $s(A)=A'$ et $s(B)=B'$ revient à prouver l'existence et l'unicité de deux complexes a et b avec $a \neq 0$ tels que

$$\begin{cases} az_A + b = z_{A'} \\ az_B + b = z_{B'} \end{cases}$$

il s'agit d'un système de Cramer. $\begin{vmatrix} z_A & 1 \\ z_B & 1 \end{vmatrix} = z_A - z_B \neq 0$ car $A \neq B$.

$$a = \frac{\begin{vmatrix} z_{A'} & 1 \\ z_{B'} & 1 \end{vmatrix}}{z_A - z_B} = \frac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B} \quad \text{et} \quad b = \frac{\begin{vmatrix} z_A & z_{A'} \\ z_B & z_{B'} \end{vmatrix}}{z_A - z_B} = \frac{z_A z_{B'} - z_{A'} z_B}{z_A - z_B}$$

a et b existent et sont uniquement déterminés par z_A, z_B, $z_{A'}$ et $z_{B'}$.

2) exactement pareil en remplaçant z_A par $\overline{z_A}$ et z_B par $\overline{z_B}$.

3] Points fixes.

proposition.

$k \neq 1$.

* si f directe d'écriture complexe $z \mapsto az+b$ alors, puisque $|a| = k$, $|a| \neq 1$.

$az+b = z \iff z(1-a) = b \iff z = \dfrac{b}{1-a}$ (car $a \neq 1$)

* si f indirecte d'écriture complexe $z \mapsto a\bar{z}+b$ alors, puisque $|a|=k$, $|a| \neq 1$

$a\bar{z}+b = z \iff \bar{a}z + \bar{b} = \bar{z}$

d'où $z = a(\bar{a}z+\bar{b})+b \iff z(1-|a|^2) = a\bar{b}+b$

$$\underset{|a|\neq 1}{\iff} z = \frac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$$

4] Classification

f directe.

f d'écriture complexe $z \mapsto az+b$ $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

* si $a=1$. f a pour écriture complexe $z \mapsto z+b$ donc f est une translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b.

* si $a \neq 1$ alors f possède un unique point fixe Ω d'affixe $w = \dfrac{b}{1-a}$.

$$\begin{cases} z' = az+b \\ w = aw+b \end{cases} \Rightarrow z'-w = a(z-w)$$

d'où $|z'-w| = |a||z-w|$ et $\arg(z'-w) = \arg(a) + \arg(z-w)$ (2π)

càd que $\Omega M' = |a|\,\Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) = \arg(a)$ (2π)

f est la composée d'une homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$ avec une rotation de centre Ω et d'angle $\arg(a) = \theta$:

$$f : \begin{array}{ccccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{h} & \mathcal{P} & \xrightarrow{r} & \mathcal{P} \\ M(z) & \longmapsto & M'(z') & \longmapsto & M''(z'') \end{array} \quad \text{où } z' = |a|(z-w)+w \text{ et } z'' = e^{i\theta}(z'-w)+w.$$

d'où $z'' = |a|e^{i\arg(a)} z + (1-e^{i\arg(a)}|a|)\omega = az + (1-a)\dfrac{b}{(1-a)} = az+b$.

ce produit est commutatif :

si $z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$ et $z'' = |a|(z'-\omega)+\omega$ alors

$z'' = |a|\left(e^{i\theta}(z-\omega)+\cancel{\omega}-\cancel{\omega}\right)+\omega = |a|e^{i\theta}z + (1-e^{i\theta}|a|)\omega = az+b$.

Cette décompo est unique car le rapport de h, l'angle de la rotation et le centre sont uniquement déterminés par a et b.