

Leçon 10. Recherche des isométries du plan conservant un carré, un losange, un parallélogramme, un rectangle.

Prérequis : Def et prop du parallélogramme, losange, rectangle, carré
groupe des isométries du plan (déplacement, antidéplacement,
dilatation de groupe.

Cadre On se place dans un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$.

Notation On note, Id la fct identité sur $\mathcal{P}$.

σ_Δ la symétrie d'axe Δ

σ_I la symétrie de centre I

$R_{(O, \theta)}$ la rotation de centre O et d'angle θ .

I Isométrie conservant un quadrilatère.

def On dit qu'une isométrie f conserve un quadrilatère $Q = ABCD$ si $\{A, B, C, D\} = \{f(A), f(B), f(C), f(D)\}$

notation $\text{Io}(Q) = \{ \text{isométrie conservant } Q \}$

$\text{Io}^+(Q) = \{ \text{déplacement conservant } Q \}$

$\text{Io}^-(Q) = \{ \text{antidéplacement conservant } Q \}$

Théorème 1) $(\text{Io}(Q), \circ)$ est un sous-groupe de $(\text{Io}(E), \circ)$

2) $(\text{Io}^+(Q), \circ)$ est un sous-groupe de $(\text{Io}(Q), \circ)$

preuve 1) * $\text{Id} \in \text{Io}(Q)$

* $\forall f, g \in \text{Io}(Q), f \circ g(Q) = f(g(Q)) = f(Q) = Q$

donc $f \circ g \in \text{Io}(Q)$

* $\forall f \in \text{Io}(Q), f^{-1} \circ f(Q) = Q$, or $f^{-1} \circ f(Q) = f^{-1}(Q)$

d'où $f^{-1}(Q) = Q$

donc $f^{-1} \in \text{Io}(Q)$.

$\Rightarrow$ Donc $(\text{Io}(Q), \circ)$ est un sous-groupe de $(\text{Io}(E), \circ)$

preuve 2) * $\text{Id} \in \text{Io}^+(\mathbb{Q})$

* $\forall f, g \in \text{Io}^+(\mathbb{Q}), f \circ g \in \text{Io}(\mathbb{Q})$ et $f \circ g$ est aussi un déplacement donc $f \circ g \in \text{Io}^+(\mathbb{Q})$.

* $\forall f \in \text{Io}^+(\mathbb{Q}),$ on a $f^{-1} \in \text{Io}(\mathbb{Q})$ et f^{-1} est aussi un déplacement donc $(\text{Io}^+(\mathbb{Q}), \circ)$ est un sous-groupe de $(\text{Io}(\mathbb{Q}), \circ)$

théorème Soit $\rho \in \text{Io}^-(\mathbb{Q})$, l'appl $\Psi_\rho : \text{Io}^+(\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Io}^-(\mathbb{Q})$ est bijective
 $\pi \mapsto \rho \circ \pi$.

preuve # injectivité $\rho \circ \pi_1 = \rho \circ \pi_2 \Rightarrow \pi_1 = \pi_2$ (en composant par ρ)

surjectivité $\forall \rho_1 \in \text{Io}^-(\mathbb{Q}), \rho \circ \pi_1 = \rho_1 \Leftrightarrow \pi_1 = \rho^{-1} \circ \rho_1 = \Psi(\rho_1)$

$$\Psi(\rho_1) = \Psi(\rho \circ \pi_1) = \rho \circ \pi_1 \circ \rho^{-1} = \rho \circ \rho^{-1} \circ \pi_1 = \pi_1$$

conséquence si $\text{card}(\text{Io}(\mathbb{Q}))$ est fini, alors $\text{card}(\text{Io}^+(\mathbb{Q})) = \text{card}(\text{Io}^-(\mathbb{Q}))$

rem $\text{Io}(\mathbb{Q})$ (ainsi que $\text{Io}^-(\mathbb{Q}), \text{Io}^+(\mathbb{Q})$) sont des ensembles finis car leurs cardinaux sont égaux aux nombres de permutations de $\{A, B, C, D\}$ dans $\text{Io}(\mathbb{Q}) \leq 4!$

théorème $f \in \text{Io}(\mathbb{Q})$ alors l'isobarycentre O de $\mathbb{Q}$ est invariant par f .

preuve soit O isobarycentre de $\{A, B, C, D\}$

f est une isométrie

donc f conserve les barycentres

d'où $f(O)$ isobarycentre de $\{f(A), f(B), f(C), f(D)\}$.

or f conserve $ABCD$

donc $f(O)$ isobarycentre de $\{A, B, C, D\}$

donc $f(O) = O$.

corollaire $f \in \text{Io}(\mathbb{Q})$ alors $f = R_{(O, \theta)}$ ou $f = S_\Delta$ tel que Δ passe par O .

preuve Les isométries qui conserve $\mathbb{Q}$, conserve l'isobarycentre de $\mathbb{Q}$.

Elles ont donc O comme point invariant

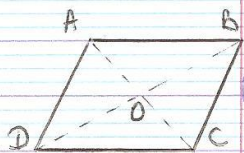
donc ce point soit l'identité,

soit une rotation de centre O

soit une réflexion d'axe passant par O .

II Parallélogramme

Dans cette partie $\mathcal{Q}$ désigne un parallélogramme $ABCD$ de centre O .



Théorème Le groupe des isométries conservant un parallélogramme^P (non rectangle, non losange) est $\text{Is}(\mathcal{P}) = \{\text{Id}, s_O\}$

preuve

* si $f \in \text{Is}^+(\mathcal{P})$

analyse

alors f est une rotation de centre O (corollaire)

A sera transformé en A ou en C (par conservation des distances car centre pas un rectangle)

- si $f(A) = A$ alors $f = \text{Id}$

- si $f(A) = C$ alors f sera la symétrie de centre O

synthèse

On vérifie que Id et s_O conservent le parallélogramme

$\Rightarrow$ donc $\text{Is}^+(\mathcal{P}) = \{\text{Id}, s_O\}$

* par l'absurde On suppose qu'il existe $s \in \text{Is}^-(\mathcal{P})$

alors s est une symétrie d'axe passant par O (corollaire)

Par conservation des distances, A sera transformé en A ou en C (cas d'un rectangle)

- si $s(A) = A$, alors l'axe de la réflexion est (OA) et nécessairement $s(B) = D$.

Par conséquent $(AO) \perp (BD)$

donc $\mathcal{Q}$ est un losange. **contradiction.**

- si $s(A) = C$, alors l'axe de la réflexion est la médiatrice de $[AC]$

or (AC) et (BD) ne sont pas perpendiculaires

donc B et D n'appartiennent pas à Δ .

donc $s(B) = D$ (car si B et $D \in \Delta$, on aura $s(B) = B$ et $s(D) = D$)

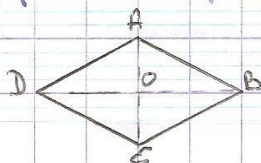
donc $(BD) \parallel (AC)$ **contradiction.**

$\Rightarrow$ il n'existe pas d'antidépacement qui conservent le parallélogramme. $\text{Is}^-(\mathcal{P}) = \emptyset$

conclusion $\text{Is}(\mathcal{P}) = \{\text{Id}, s_O\}$

III Losange

Théorème Le groupe des isométries conservant un losange^L (qui n'est pas un carré) est $\text{Is}(\mathcal{L}) = \{\text{Id}, s_O, s_{(AC)}, r_{(BD)}\}$.



preuve * si $f \in \text{Is}^+(\mathcal{L})$

Analyse alors f est une rotation de centre O
 donc par conservation des distances $f(A) = A$ ou C .
 - si $f(A) = A$ alors $f = \text{id}$.
 - si $f(A) = C$ alors $f = \text{symétrie de centre } O$

synthèse On vérifie que Id, Δ_O conservent $\mathcal{Q}$

$$\Rightarrow \text{Is}^+(\mathcal{L}) = \{\text{Id}, \Delta_O\}$$

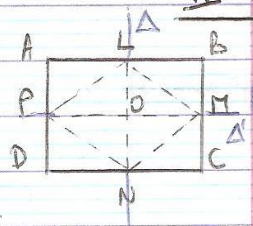
* si $\Delta_A \in \text{Is}^-(\mathcal{L})$ alors par la conséquence ^{dans I} $\text{card}(\text{Is}^-(\mathcal{L})) = 0$ ou 2 (car $\text{card}(\text{Is}^+(\mathcal{L})) = 2$)
 or $\Delta_{(AC)}$ et $\Delta_{(BD)}$ sont deux réflexions qui conservent $\mathcal{Q}$

$$\text{donc } \text{Is}^-(\mathcal{L}) = \{\Delta_{(AC)}, \Delta_{(BD)}\}$$

conclusion

$$\text{Is}(\mathcal{L}) = \{\text{Id}, \Delta_O, \Delta_{(AC)}, \Delta_{(BD)}\}$$

IV Le rectangle



théorème Le groupe des isométries conservant un rectangle R (qui n'est pas un carré) est $\text{Is}(R) = \{\text{Id}, \Delta_O, \Delta_{\Delta}, \Delta_{\Delta'}\}$ où $\Delta = (LN)$ et $\Delta' = (MP)$ sont respectivement les médiatrices de $[AB]$ et de $[CD]$ (voir figure).

preuve (c)

$LMPN$ est un losange

d'après III, $\text{Id}, \Delta_O, \Delta_{(MP)}, \Delta_{(NL)}$ sont les seules transformations qui conservent $LMPN$.

or Toute isométrie conserve les milieux

donc les seules transformations possibles pour le rectangle $ABCD$ sont $\text{Id}, \Delta_O, \Delta_{(MP)}, \Delta_{(NL)}$

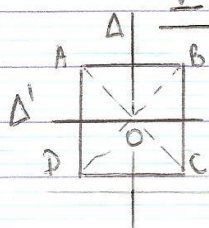
$$\text{donc } \text{Is}(R) \subseteq \{\text{Id}, \Delta_O, \Delta_{(MP)}, \Delta_{(NL)}\}$$

(c) On vérifie que $\text{Id}, \Delta_O, \Delta_{(MP)}, \Delta_{(NL)}$ conservent le rectangle donc $\{\text{Id}, \Delta_O, \Delta_{(MP)}, \Delta_{(NL)}\} \subseteq \text{Is}(R)$

conclusion

$$\text{Is}(R) = \{\text{Id}, \Delta_O, \Delta_{(MP)}, \Delta_{(NL)}\}$$

V Le carré



théorème Le groupe des isométries conservant un carré $\mathcal{C}$ est $\text{Is}(\mathcal{C}) = \{\text{Id}, \Delta_O, R_{(O, \pi/2)}, R_{(O, -\pi/2)}, \Delta_{\Delta}, \Delta_{\Delta'}, \Delta_{(AC)}, \Delta_{(BD)}\}$ (voir figure)

preuve * soit s une réflexion, alors elle conserve les diagonales ou elle les échange.

- si elle les conserve, s est la réflexion d'axe (AC) ou d'axe (BD)

- si elle les inverse, s est la réflexion d'axe Δ ou Δ' <sup>$\Delta = (LN)$
 $\Delta' = (MP)$</sup>

* $\text{card}(\text{Is}^-(\mathcal{C})) = 4$ donc d'après la conséquence $\text{card}(\text{Is}^+(\mathcal{C})) = 4$

De plus, $\text{Id}, \Delta_O, R_{(O, \pi/2)}, R_{(O, -\pi/2)}$ conservent $\mathcal{C}$ donc $\text{Is}^+(\mathcal{C}) = \{\text{Id}, \Delta_O, R_{(O, \pi/2)}, R_{(O, -\pi/2)}\}$

$$\text{conclusion } \text{Is}(\mathcal{C}) = \{\text{Id}, \Delta_O, R_{(O, \pi/2)}, R_{(O, -\pi/2)}, \Delta_O, \Delta_{\Delta}, \Delta_{(AC)}, \Delta_{(BD)}\}$$