

③ Coefficients binomiaux, dénombrement des combinaisons, formule du binôme Applications.

pré-Requis : - démonstration par récurrence
- cardinal
- factoriel

I- Combinaison

Definition 1 : Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leq p \leq n$, et E un ensemble à n éléments. Une combinaison de p éléments de E est une partie de E à p éléments. Le nombre de combinaisons est noté $\binom{n}{p}$ et se lit p parmi n .

Remarque : L'ordre n'intervient pas dans une combinaison.
ex : $\{2, 5, 3\}$ et $\{3, 2, 5\}$ représente la même combinaison.

Théorème 1 : Si $p \leq n$ alors $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.
Sinon $\binom{n}{p} = 0$.

pas faire dem : Soit E de cardinal $n > 0$, soit $p \leq n$ fixé.

On a :
* n choix pour le 1^{er} terme
* $n-1$ choix pour le 2^{ème} "
* ...
* $n-p+1$ choix pour le p -ième terme.

Donc on a $n(n-1) \dots (n-p+1)$ suites ordonnées de p éléments de E . (c'est ce qu'on appelle les arrangements de E)
± combinaison, car ici l'ordre intervient.

Si on a $\binom{n}{p}$ combinaisons, on peut les ordonner de $p!$ façons différentes. donc $\binom{n}{p} \times p! = n(n-1) \dots (n-p+1)$.

On note $n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Alors $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Résultat de

transparence { exercice 1 : de loto : combien y a-t-il de tirages possibles?
on rappelle qu'il y a 49 boules et qu'une grille de loto possède 7 nombres.

+ faire Solution : Il s'agit de choisir 7 nombres parmi 49.
d'ordre ne compte pas, on dénombre.

le nombre de partie de 7 éléments de l'ensemble $\{1, \dots, 49\}$ de cardinal 49.
 il y a donc $\binom{49}{7} = 85900584$ tirages possibles.

exercice 2

Dénombrement : On tire 5 cartes au hasard d'un jeu de 32 cartes. On appelle main cet ensemble de 5 cartes.

- 1) combien y-a-t-il de mains différentes ?
- 2) combien y-a-t-il de mains comptant exactement 3 Rois ?
- 3) combien y-a-t-il de mains comptant au moins 3 Rois ?
- 4) combien y-a-t-il de mains comptant 2 cœurs et 3 carreaux ?

par la solution : 1) $\binom{32}{5} = 201376$

$$2) \binom{4}{3} \times \binom{28}{2} = 1512$$

3 Rois parmi 4 2 autres cartes parmi les 28 restantes.

$$3) \binom{4}{3} \times \binom{28}{2} + \binom{4}{4} \times \binom{28}{1} = 1560$$

avoir 3 Rois sur + avoir 4 Rois

$$4) \binom{8}{2} \times \binom{8}{3} = 1568$$

2 cœurs parmi 8 3 carreaux parmi 8

II. Coefficients binomiaux

propriétés 1

$$1) \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$2) \binom{n}{1} = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$3) \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq p \leq n, \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

par laire dem 1) On choisit aucun élément parmi n , il y a une seule façon de le faire c'est l'ensemble vide. Par le calcul on a $\frac{n!}{n!} = 1$.

• On choisit 1 élément parmi n , il y a également une seule façon de le faire c'est prendre l'ensemble tout entier.

calcul: $\frac{n!}{n!} = 1$.

2) On choisit 1 éléments parmi n , on peut en choisir n différents (c'est chaque singleton). par le calcul on a bien.

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

3) Un ensemble E de cardinal n , possède autant de parties à p éléments que de parties à $n-p$ éléments.
En effet, l'application qui à une partie à p éléments fait correspondre son complémentaire est une bijection.

• par le calcul : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ et $\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$

donc $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

propriété 2 : formule de Pascal

$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad 0 \leq p \leq n-1, \quad \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

dem : • par le calcul : (faire)

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = \frac{(n-1)! \cdot p}{p!(n-p)!} + \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!(p+n-p)}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p} \end{aligned}$$

• par dénombrement : (faire)

Soit E un ensemble à n éléments. Dans E on dénombre $\binom{n}{p}$ parties à p éléments.
Ces parties peuvent être rangées en deux classes distinctes

- celle qui contiennent l'élément a : il en existe $\binom{n-1}{p-1}$ on enlève a il contient a
- celles qui ne contiennent pas l'élément a : il en existe $\binom{n-1}{p}$ on enlève a

L'union de ces 2 classes étant disjointe, les cardinaux s'ajoutent et alors on obtient bien

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Triangle de Pascal (transparent)

$n \backslash p$	0	1	2	3	...	p	$p+1$	...	n
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
...									
n									
$n+1$									

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

(une méthode simple de retrouver les coeff binomiaux c'est de faire le triangle de pascal)

$$\binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \binom{3}{2}$$

explication :

on place des 1 sur la 1^{ère} colonne + la diagonale.
on peut donc construire le triangle de pascal à l'aide de la formule de Pascal. et ainsi se reconstruire un triangle pratique pour les retrouver.

propriété 3: formule itérée de Pascal

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N} \quad 0 \leq p \leq n \quad \sum_{k=0}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

par faire dem: Par récurrence sur n pour p fixé

Initialisation: si $n = p$ $\sum_{k=0}^p \binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1 = \binom{p+1}{p+1}$
car si $k < p$ alors $\binom{k}{p} = 0$

Hérédité: Supposons la propriété 3 vraie pour un $n > p$ quelconque.

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \stackrel{(HR)}{=} \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \stackrel{\uparrow}{=} \binom{n+2}{p+1}$$

d'après propriété 2.

conclusion: la propriété est vraie pour tout $n \geq p \geq 0$.

(transparent) pas montrer

n \ p	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	

ex $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} = \binom{5}{3}$

exercice 3: (transparent)

Montrer que: 1) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

2) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

solutions: 1) $\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} \stackrel{\text{prop 3}}{=} \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}$
faire
propriété 1

2) $\sum_{k=1}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$ ou $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(k^2 - k)$
à voir selon le + ps
prop 3

D'où $\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n k^2 - k \right) = \binom{n+1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k = \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$

Anc $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \sum_{k=1}^n k \stackrel{\text{d'après 1)}}{=} \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2}$

Ainsi $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)n}{6} [2(n-1)+3] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

III. Formule du Binôme

Théorème 2 : Formule du Binôme de Newton

Si a et b sont deux éléments d'un anneau qui commutent ($ab=ba$) alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

faire dem démonstration par récurrence sur n .

Initialisation : $n=0$ $(a+b)^0 = 1$
 $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$

donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons le théorème 2 vrai pour un n fixé quelconque.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \times (a+b)$$

par (H.R.) $\downarrow = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) (a+b) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} a + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$

par linéarité de la $\sum$ et ($\times$) commutativité $\downarrow = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$

par changement d'indice $\downarrow = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} b^{n+1}$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} b^{n+1}$$

formule de pascal $\downarrow = \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1}$ termes ad $k=0$.
 $= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1}$

or $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$

donc $= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1}$

conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

exercice 4 : calculer : 1) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ faire le 1^{er}.
 (transparent) 2) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$

$$3) \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$$

solutions : 1) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times 1^k \times 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$
 binôme de Newton.

faire $\rightarrow 2) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \times 1^{n-k} = (1-1)^n = 0$
 binôme de Newton

$$3) \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} : \text{on a } (x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

en dérivant on obtient $n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$

et en remplaçant x par 1 on a $n 2^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$

complément :

• (*) $ab^n = b^n a \quad \forall n \in \mathbb{N}$

dem : Récurrence :

Init : $n=0 \quad ab^0 = a \quad \text{OK}.$
 $b^0 a = a$

HR : Supposons (*) vraie pour un certain n fixé

$$ab^{n+1} = ab^n \times b \underset{\text{HR}}{=} b^n a \times b \underset{\text{car } ab=ba}{=} b^n \times b \times a = b^{n+1} a$$

cc) : propriété vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- pourquoi un anneau ds le Thm 2 : car on utilise l'addition et la multiplication.
- peut-on utiliser la formule du binôme avec a et b complexe ? Oui car, C'est un anneau commutatif.

exo 5 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\cos(nx)$ peut s'écrire sous la forme d'un polynôme de degré n en $\cos x$.

solution : $\cos(nx) + i \sin(nx) = (\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos x)^{n-k} (i \sin x)^k$
 formule de Moivre

en identifiant partie réelle et imaginaire on obtient :

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (\sin(x))^{2k} (\cos(x))^{n-2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1 - \cos(x))^{2k} (\cos(x))^{n-2k}$$

Question : $\rightarrow (x+1)^6 \rightarrow$ avec binôme et triangle Pascal.

- $\rightarrow$ on peut utiliser binôme Newton avec Matrice : oui si elles commutent
- $\rightarrow$ 2 matrices commutent-elles ? Non : contre exemple
- $\rightarrow$ $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$ si $A \cap B = \emptyset$ et sinon ?
- $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$