Leçon 39

Réflexions du plan échangeant deux droites sécantes données · bissectrices · Applications au triangle et au cercle

①

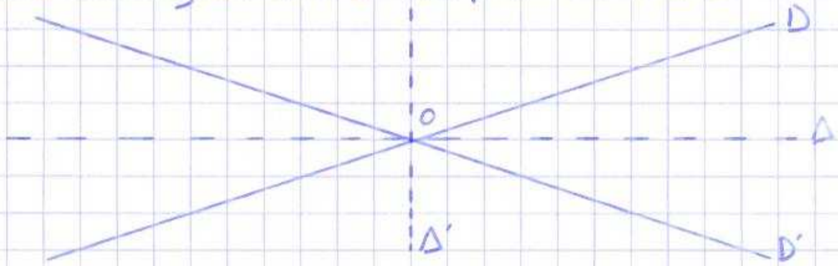
Pré-requis Angles orientés de vecteurs
Distance d'un point à une droite
Définitions et propriétés des réflexions
Pythagore · Thalès
produit scalaire

Cadre On se place dans le plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ et on considère deux droites de $\mathcal{P}$

I Réflexion du plan échangeant deux droites sécantes données

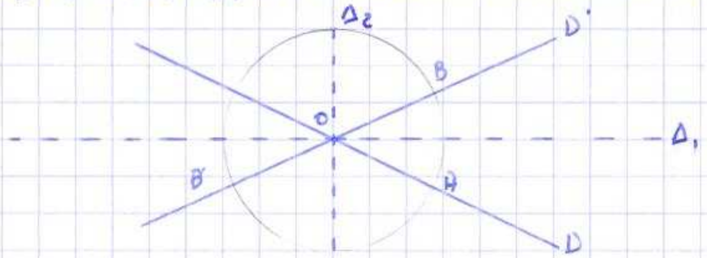
déf : (rappel) Soit Δ une droite du plan · On appelle réflexion d'axe Δ l'application $s_\Delta : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $M \mapsto M'$ telle que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$ où H est le projeté orthogonal de M sur Δ

Thm Soient D et D' deux droites sécantes en un point O · Il existe exactement deux réflexions d'axe Δ et Δ' échangeant D et D' · De plus on a $\Delta \perp \Delta'$



preuve : □ par analyse et synthèse

Analyse : Notons $\{O\} = D \cap D'$
supposons qu'il existe une réflexion d'axe $\Delta \subset \mathcal{P}$, s_Δ la réflexion d'axe Δ.
on a : $s_\Delta(O) = s_\Delta(D \cap D') = s_\Delta(D) \cap s_\Delta(D') = D' \cap D$ (puisque s_Δ est bijective)
donc $s_\Delta(O) = O$ · Cela prouve que O appartient à Δ
Choisissons un point $A \in D \setminus \{O\}$ · L'image $s_\Delta(A)$ appartiendra à D' et vérifiera $OA = Os_\Delta(A)$ puisqu'une réflexion conserve les distances · Si B et B' désignent les deux points de D' situé à la distance OA de O, on obtient $s_\Delta(A) \in \{B, B'\}$, et Δ est soit la médiatrice Δ_1 de $[AB]$, soit Δ_2 celle de $[AB']$



Synthèse : On vérifie facilement que les réflexions s_{Δ_1} et s_{Δ_2} échangent les droites D et D' · Par exemple, pour s_{Δ_1}, $s_{\Delta_1}(D) = s_{\Delta_1}((OA)) = (s_{\Delta_1}(O)\, s_{\Delta_1}(A)) = (OB) = D'$

Montrons $\Delta_1 \perp \Delta_2$
Le point A appartient au cercle de diamètre $[BB']$ donc ABB' est rectangle en A
Par conséquent $(AB') \parallel \Delta_1$
De même $(AB) \parallel \Delta_2$
$\Big\} \Rightarrow \Delta_1 \perp \Delta_2$

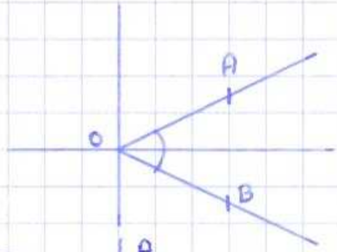
def Les axes de ces réflexions notés Δ et Δ' s'appellent les bissectrices de D et D'

(remarque : Si $D = D'$ il existe une infinité de réflexions qui transforment D en D'

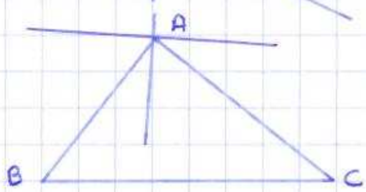
(A ce stade de l'exposé, rien ne nous empêche de recommencer le travail précédant en remplaçant D et D' par des demi-droites de même origine $[OA)$ et $[OB)$.

En reprenant les mêmes notations qu'auparavant.

def Soit $A \in D \setminus \{0\}$ et $B \in D' \setminus \{0\}$
- Δ est la bissectrice intérieure de $\widehat{AOB}$ si $s_\Delta([OA)) = [OB)$
- Δ est la bissectrice extérieure de $\widehat{AOB}$ si $s_\Delta([OA)) = D' \setminus [OB)$



def On appelle bissectrice intérieure (resp extérieure) de l'angle $\hat{A}$ formé par les demi droites $[AB)$ et $[AC)$ d'un triangle ABC la droite Δ tel que $s_\Delta([AB)) = [AC)$ (resp $s_\Delta([AB)) = (AC) \setminus [AC)$.

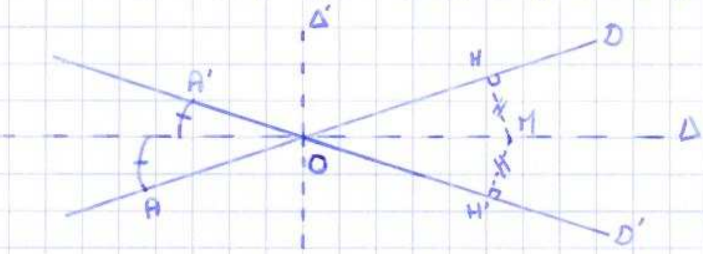


exercice : construire Δ et Δ' à la règle et au compas

solution : Avec un compas, on détermine trois points équidistants de O situés sur D et D'. Puis on trace les médiatrices des deux segments ayant pour extrémités un point sur D et un sur D'.

II Propriétés des bissectrices

Thm • propriété métrique : On a $\Delta \cup \Delta' = \{ M \in \mathcal{P},\ d(M,D) = d(M,D') \}$
• propriété angulaire : On a $\Delta \cup \Delta' \setminus \{0\} = \{ M \in \mathcal{P} \setminus \{0\},\ (\vec{OA}, \vec{OM}) = (\vec{OM}, \vec{OA'})\ [\pi] \}$



preuve : • propriété métrique

$\supset$ · Soit $M \in \mathcal{P}$, si $M = O$ alors $M \in \Delta \cup \Delta'$

· si $M \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$, soit H et H' les projetés orthogonaux de M sur D et D' respectivement

On a $d(M,D) = d(M,D') \Leftrightarrow MH = MH'$

On applique pythagore dans $OH'M$ et OHM

$$\begin{cases} OM^2 = OH^2 + HM^2 \\ OM^2 = OH'^2 + HM'^2 \end{cases} \Rightarrow OH = O'H \qquad \text{donc } s_\Delta(H) = H'$$

$\subset$ · Soit $M \in \Delta \cup \Delta'$ si $M = O$ c'est évident

Supposons $M \in \Delta \cup \Delta' \setminus \{0\}$

on a $d(M,D) = d(s_\Delta(M), s_\Delta(D)) = d(M,D')$

$\Rightarrow M \in \{ M \in \mathcal{P},\ d(M,D) = d(M,D') \}$

· propriété angulaire

$\supset$ Soit $M \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$, $(\vec{OA}, \vec{OM}) = (\vec{OM}, \vec{OA'})\ [\pi]$

Posons $\tilde{\Delta} = (OM)$, on considère $s_{\tilde{\Delta}}$

Soit $A'' = s_{\tilde{\Delta}}(A)$

$(\vec{OA}, \vec{OM}) = (\vec{OM}, \vec{OA''})\ [2\pi]$ (prop des réflexions)

$\Rightarrow (\vec{OM}, \vec{OA'}) = (\vec{OM}, \vec{OA''})\ [\pi]$

②

donc : $\begin{cases} A'' = s_{\tilde{\Delta}}(A) \in (OA') = D' \\ s_{\tilde{\Delta}}(O) = O \quad \text{donc } (OA'') = D' \end{cases}$

D'où $s_{\tilde{\Delta}}(OA) = OA''$

$s_{\tilde{\Delta}}(D) = D'$ donc $\tilde{\Delta}$ est une bissectrice de D et D'

ie: $M \in \Delta \cup \Delta' \setminus \{O\}$

$\Leftarrow$ Soit $M \in \Delta \cup \Delta' \setminus \{O\}$, $s_\Delta(D) = D'$

$A'' = s_\Delta(A) \in D'$

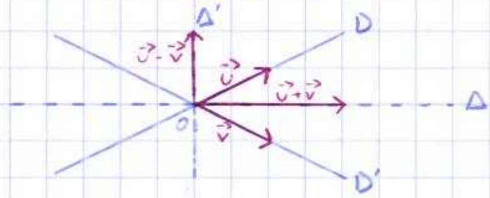
$(\vec{OA}, \vec{OM}) = (\vec{OM}, \vec{OA''})$ $[2\pi]$

$(\vec{OM}, \vec{OA'}) = (\vec{OM}, \vec{OA''})$ $[\pi]$ car $A', A'' \in D'$

donc $(\vec{OA}, \vec{OM}) = (\vec{OM}, \vec{OA'})$ $[\pi]$

☒

prop On pose $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs directeurs unitaires de $[OA)$ et $[OB)$ respectivement. Si on désigne par Δ la bissectrice intérieure de l'angle $A\hat{O}B$ et par Δ' la bissectrice extérieure alors $\vec{u}+\vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ et $\vec{u}-\vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ'.



preuve : □ $\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) + \frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v})$ vecteur directeur de $[OA)$

$\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) - \frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v})$ vecteur directeur de $[OB)$

Par la relation de Chasles, on a :

$(\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}) = \frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}) + \frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}) = \frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v})$ $[2\pi]$

$(\vec{u}+\vec{v}, \vec{v}) = \frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}) - \frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}) = -\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v})$ $[2\pi]$

$\Rightarrow (\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}+\vec{v}, \vec{v})$ $[2\pi]$

Or une réflexion transforme un angle de vecteurs en son opposé, cela signifie ici que la réflexion d'axe $\vec{u}+\vec{v}$ échange les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Donc Δ a pour vecteur directeur $\vec{u}+\vec{v}$.

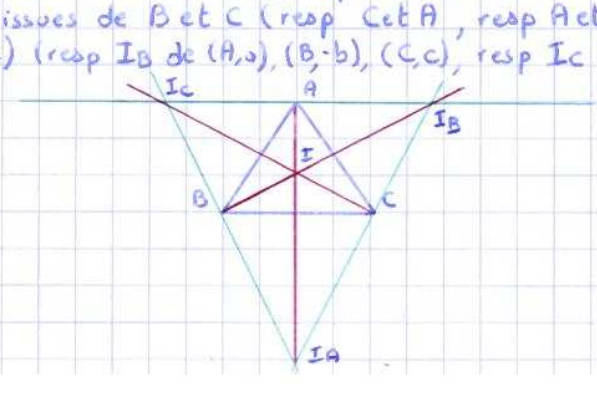
☒ On montrerait de même que Δ' a pour vecteur directeur $\vec{u}-\vec{v}$.

III Applications

1) au triangle

def Soit ABC un triangle non aplati de $\mathcal{P}$. Les trois bissectrices des trois demi-droites $[AB)$ et $[AC)$, $[BC)$ et $[BA)$, $[CA)$ et $[CB)$ sont appelées les bissectrices intérieures du triangle ABC. Les trois bissectrices de (AB) et (AC), (BC) et (BA), (CA) et (CB) distinctes des bissectrices intérieures sont appelées les bissectrices extérieures du triangle ABC.

Thm Soit ABC un triangle non aplati et $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. Ses trois bissectrices intérieures sont concourantes en le barycentre I de (A,a), (B,b), (C,c). La bissectrice intérieure issue de A (resp. de B, resp de C) est concourante avec les deux bissectrices extérieures issues de B et C (resp C et A, resp A et B) en le barycentre I_A de $(A,-a)$ (B,b) et (C,c) (resp I_B de (A,a), $(B,-b)$, (C,c), resp I_C de (A,a), (B,b), $(C,-c)$).



preuve : □ puisque $I = \mathrm{Bar}\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$, alors $(a+b+c)\overrightarrow{AI} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$, ainsi $\overrightarrow{AI}$ est colinéaire à $b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$ et par conséquent à $\dfrac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{bc} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{c} + \dfrac{\overrightarrow{AC}}{b}$

Ce dernier vecteur est la somme de deux vecteurs unitaires colinéaires à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et dirige donc la bissectrice intérieur de A. Par suite, le point I est sur cette dernière. La même démonstration montrera que I est aussi sur les autres bissectrices intérieures de ABC.

$I_a = \mathrm{Bar}\{(A,-a),(B,b),(C,c)\}$, alors $(-a+b+c)\overrightarrow{AI_A} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$ et en procédant comme précédemment on montre que I_A est sur la bissectrice intérieure en A. Ce barycentre I_A vérifie également $(-a+b+c)\overrightarrow{BI_A} = -a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BC}$. on en déduit que $\overrightarrow{BI_A}$ est colinéaire $\dfrac{-a\overrightarrow{BA}+c\overrightarrow{BC}}{ac} = \dfrac{\overrightarrow{BC}}{a} - \dfrac{\overrightarrow{BA}}{c}$

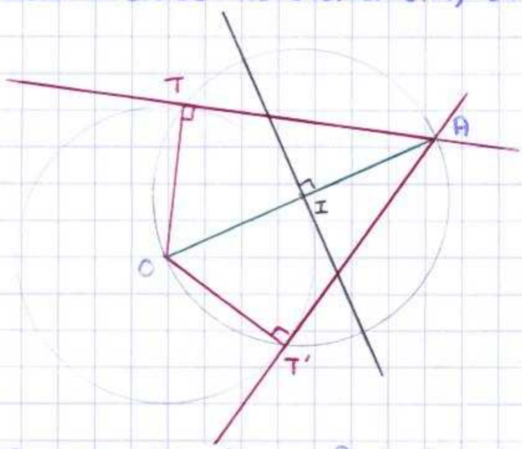
comme ce dernier est la soustraction de deux vecteurs unitaires colinéaires à $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$, il dirige la bissectrice extérieure en B et I_A se trouve donc sur celle-ci. De même la relation $(-a+b+c)\overrightarrow{CI_A} = -a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}$ implique que I_A est sur la bissectrice extérieure en C, d'où la dernière propriété de l'énoncé. ⊠

remarque : I, I_A, I_B, I_C sont les centres des quatres cercles tangents aux côtés du triangle, celui de centre I est appelé le cercle inscrit au triangle ABC et les trois autres sont appelés cercles exinscrits au triangle. (cf : dessin)

2) au cercle

prop Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O,R)$ le cercle de centre O et de rayon R et soit A un point extérieur à ce cercle. Il existe exactement deux tangentes à ce cercle passant par A, leurs points de contacts T et T' sont les points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ avec le cercle de diamètre $[OA]$. De plus, (OA) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{TAT'}$

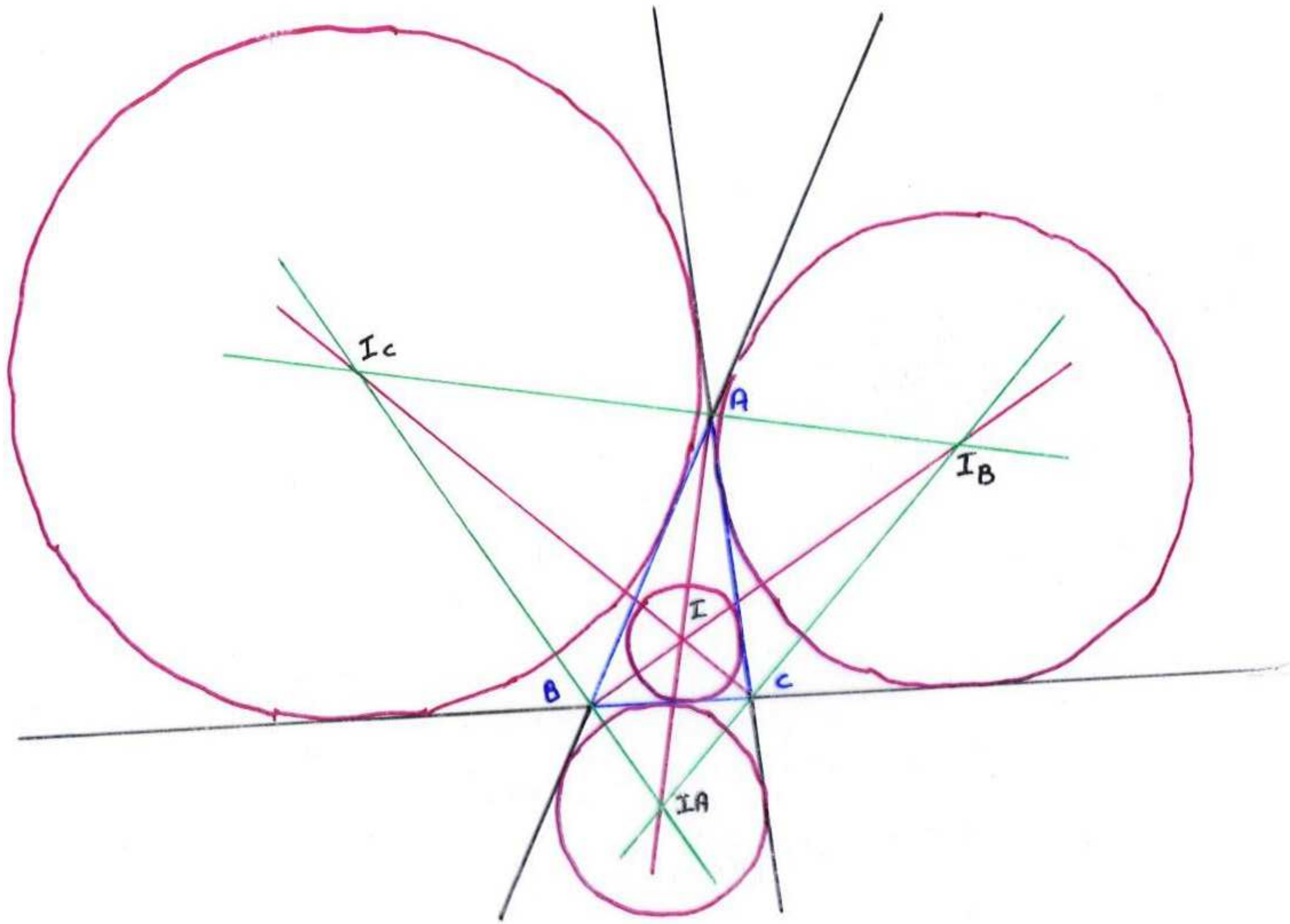
preuve : □ On trace le cercle de diamètre $[OA]$ et sa médiatrice. On note I le milieu de $[OA]$. On trace ensuite le cercle de centre O et de rayon OI. L'intersection entre les deux cercles est non vide et donne exactement deux points T et T'. Reste à tracer les droites (AT) et (AT')



Vérifions que T est bien l'un des deux points de tangente cherché. T doit appartenir au cercle initial et vérifier $(OT) \perp (AT)$. En construisant le cercle de diamètre $[OA]$ on a que pour tout point M, différent de O et A, de ce cercle $(AM) \perp (OM)$ et en prenant l'intersection avec le cercle initial (intersection qui donne exactement deux points par construction du deuxième cercle par rapport au premier) on obtient bien les deux points T et T'.

On considère le couple de demi-droites $([AT),[AT'))$ et la réflexion d'axe (OA). Clairement l'image de $[AT)$ par cette réflexion est $[AT')$ ce qui justifie le fait que la droite (OA) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{TAT'}$. ⊠

remarque cette application est interessante car elle permet de construire à la règle et au compas les deux tangentes à un cercle donné, tangente devant passer par un point fixé à l'avance.



Ic
A
IB
I
B
C
IA