

Leçon 38: Réflexion du
plan échangeant deux points donnés
médiatrice, régionnement associé
Applications au triangle et au cercle
(cercle circonscrit, angle inscrit).

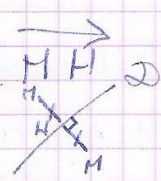
Pré requis:

- Angles orientés de vecteurs
- notion de vecteurs (Echelle, projection orthogonale)
- isométrie
- produit scalaire

Cadre: $\mathcal{D}$ plan affine euclidien
A et B 2 points $\neq$ du plan

I Réflexion du plan échangeant deux points
donnés.

Définition: Soient $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{D}$, H un point de $\mathcal{D}$ et H' la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$. On appelle réflexion d'axe $\mathcal{D}$ l'application

$$r_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \quad \text{telle que } \overrightarrow{HM'} = 2 \overrightarrow{MH} \quad \mathcal{D}$$
$$M \mapsto M'$$


Proposition: Une réflexion est involutive et c'est une isométrie

Proposition: Une réflexion échange les angles orientés en leurs opposés

Théorème: Soient $A, B \in \mathcal{D}$ distincts. Alors il existe une unique droite Δ telle que la

réflexion d'axe Δ échange A en B . Δ est appelée médiatrice de $[AB]$.

II Régionnement associé

Théorème: Δ (la médiatrice de $[AB]$) est l'ensemble des points équidistants de A et B .

Oral: / Pour construire Δ on trace 2 cercles de centre A et B ayant un même rayon suffisamment grand pour qu'ils s'intersectent, les 2 pts d'intersection sont sur Δ .



Définition: On appelle $\mathcal{D}_A$ (respectivement $\mathcal{D}_B$) le demi-plan ouvert de frontière Δ contenant A (resp B).

Théorème: $\square \{ M \in \mathcal{D} \mid MA < MB \} = \mathcal{D}_A$
 $\square \{ M \in \mathcal{D} \mid MA > MB \} = \mathcal{D}_B$
 $\square \{ M \in \mathcal{D} \mid MA = MB \} = \Delta$

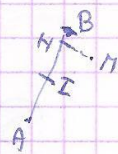
démon: H la projection de M sur (AB) , I milieu de $[AB]$
 $MA^2 - MB^2 = (\vec{MA} - \vec{MB})(\vec{MA} + \vec{MB}) = \vec{BA} \cdot (2\vec{MI})$

$= 2 \vec{AB} (\vec{I} - \vec{H}) = 2 \vec{AB} \cdot \vec{IH}$ car $(AB) \perp (MH)$ et A, B, I, H alignés
donc $MA < MB \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{IH} < 0 \Leftrightarrow H \in]I, A[$

$\Rightarrow M \in \mathcal{D}_A$

de même pour $\mathcal{D}_B$

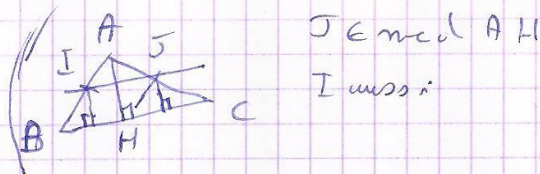
et Δ : théorème précédent



III Application:

1 Le triangle:

Proposition: Soit ABC un triangle, I et J les milieux de $[AB]$ et $[AC]$. Alors $(IJ) \parallel (BC)$

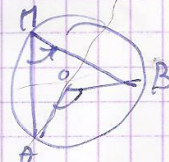


Proposition: Les trois médianes d'un triangle non plat sont concourantes en un point.

On a: utilisé pour construire le cercle circonscrit.

2 / Le cercle:

Théorème (angle inscrit): Soient M, A, B trois points distincts d'un cercle de centre O . Alors
 $(\vec{OA}, \vec{OB}) = 2(\vec{MA}, \vec{MB}) \quad (2\pi)$



Corollaire: Soient A, B, C, D des points de $\mathcal{C}$ distincts. Ils sont alignés ou cocycliques si et seulement si

$$(\vec{CA}, \vec{CB}) = (\vec{DA}, \vec{DB}) \quad (5\pi)$$

