Leçon 37 : Orthogonalité dans l'espace affine euclidien : droites orthogonales, droite orthogonale à un plan, plans perpendiculaires. Applications.

Pré Requis : Définition Vectorielle d'une droite et d'un plan.
Produit Scalaire dans l'espace.
Positions relatives de droites et de plans dans l'espace.

Cadre : On se place dans l'espace affine euclidien E d'espace vectoriel associé $\vec{E}$.

Définition 1: Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

I) Droites Orthogonales

Définition 2: Deux droites D et D' sont dites orthogonales si leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux. On note D⊥D'. Si de plus, ces deux droites sont coplanaires, elles sont dites perpendiculaires.

Propriété 1: Deux droites perpendiculaires sont sécantes.

Démonstration : Puisque D et D' sont coplanaires, soit elles sont sécantes, soit elles sont parallèles.
Si D et D' étaient parallèles, alors leurs vecteurs directeurs respectifs seraient colinéaires ; impossible car ils sont orthogonaux. Donc D et D' sont sécantes. ■

Propriété 2: (i) Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
(ii) Si deux droites sont orthogonales, toute parallèle à l'une est orthogonale à l'autre

Démonstration : Soit D de vecteur directeur $\vec{u}$ et D' de vecteur directeur $\vec{u}'$ et Δ de vecteur directeur $\vec{v}$.
(i) Si D est parallèle à D' alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u}' = k\vec{u}$.
Alors si $D \perp \Delta$ $\vec{u}.\vec{v} = 0$ d'où $k\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}'.\vec{v} = 0$ et ainsi $D' \perp \Delta$.
(ii) $D \perp D'$ donc $\vec{u}.\vec{u}' = 0$
Si D est parallèle à Δ alors il existe $k \in \mathbb{R}$ non nul tel que $\vec{u} = k.\vec{v}$ et ainsi $k\vec{v}.\vec{u}' = 0$.
Par conséquent, $\vec{u}'.\vec{v} = 0$ donc $D' \perp \Delta$. ■

Remarque : Contrairement au plan, dans l'espace, si D' et D'' sont orthogonales à une même droite D, cela n'entraine pas que ces deux droites sont parallèles.

II) Droite orthogonale à un plan

Définition 3: Une droite D est dite orthogonale à un plan P lorsque la droite D est orthogonale à toutes les droites de P. On note D⊥P. On dit également que le plan P est orthogonal à la droite D.

Remarque : Une droite et un plan orthogonaux ont un seul point commun.

Théorème 1: Une droite D est orthogonale à un plan P si et seulement si D est orthogonale à deux droites sécantes de P.

Démonstration : ⇒ Evident
⇐ Soit D de vecteur directeur $\vec{u}$ et deux droites sécantes du plan P, Δ de vecteur directeur $\vec{v}$ et Δ' de vecteur directeur $\vec{v}'$ tel que $D \perp \Delta$ et $D \perp \Delta'$; ainsi $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}' = 0$.
Puisque Δ et Δ' sont sécantes, $(\vec{v}, \vec{v}')$ est une base de l'ensemble des vecteurs du plan P.
Soit Δ'' droite de P de vecteur directeur $\vec{w}$ alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{w} = a\vec{v} + b\vec{v}'$.
Alors $\vec{u}.\vec{w} = a(\vec{u}.\vec{v}) + b(\vec{u}.\vec{v}') = 0$ par bilinéarité du produit scalaire et ainsi $D \perp \Delta''$ et donc D est orthogonal à toute droite de P donc à P. ■

Exemple du cube

Corollaire 1:(i) Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre
(ii) Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonal à l'autre.
(iii) Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.
(iv) Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.

Démonstration : (i) Soit D de vecteur directeur $\vec{u}$, D' de vecteur directeur $\vec{u}'$ et un plan P tel que P⊥D
Alors il existe deux droites sécantes de P Δ et Δ', de vecteurs respectifs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$, telles qu'elles soient orthogonales à P i.e. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}' = 0$.
Puisque D est parallèle à D', il existe un réel k non nul tel que $\vec{u}' = k\vec{u}$ d'où $\vec{u}'.\vec{v} = 0$ et donc D'⊥Δ ; de même D'⊥Δ' et donc D' est orthogonal à deux droites sécantes de P donc à P lui-même.

(ii)Soit P de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et P' de vecteurs directeurs $\vec{v}'$ et $\vec{w}'$, deux plans parallèles ; on suppose donc (pour faciliter les calculs) qu'il existe un réel k non nul tel que $\vec{v}' = k\vec{v}$ et $\overrightarrow{w'} = k\vec{w}$
Soit D dirigée par $\vec{u}$ orthogonal à P alors $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w} = 0$ donc $\vec{u}.\vec{v}' = \vec{u}.\vec{w}' = 0$ et D est orthogonale à P'.

(iii) Soit P dirigé par $(\vec{v},\vec{w})$, P' dirigé par $(\vec{v}',\vec{w}')$ et D dirigée par $\vec{u}$.
Montrons que la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de l'espace $\vec{E}$
Soit (α, β, γ) tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$; effectuons le produit scalaire de ce vecteur par $\vec{u}$:
$\vec{u}.\vec{0} = \alpha(\vec{u}.\vec{u}) + \beta(\vec{u}.\vec{v}) + \gamma(\vec{u}.\vec{w}) = \alpha(\vec{u}.\vec{u}) = 0$ *puisque $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et $\vec{w}$.*
Or $\vec{u} \neq 0$ donc $\vec{u}.\vec{u}\neq 0$ et ainsi α=0. Par suite, β=γ=0 puisque $(\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\vec{P}$ plan vectoriel associé à P. Donc $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de l'espace $\vec{E}$.
Montrons que $\vec{v}' \in \vec{P}$: soit (x ,y, z), réels non tous nuls, tel que $\vec{v}' = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$. Alors $\vec{v}'.\vec{u} = x(\vec{u}.\vec{u})$ puisque $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Ainsi x=0 et donc $\vec{v}'$ est combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et donc $\vec{v}' \in \vec{P}$. De meme, on peut montrer que $\vec{w}' \in \vec{P}$.
Ainsi, P et P' sont parallèles ($\overrightarrow{P'} = \vec{P}$) .

(iv)Soit un plan P dirigé par $(\vec{v},\vec{w})$ tel que $\vec{v}.\vec{w} = 0$, et deux droites D et D', dirigées respectivement par $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, orthogonales au plan P alors $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w} = \vec{u}'.\vec{v} = \vec{u}'.\vec{w} = 0$.
Comme en (iii) $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ forment une base de l'espace $\vec{E}$ donc il existe (x, y, z), réels non tous nuls, tel que $\vec{u}' = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.
Alors $\vec{u}'.\vec{v} = 0 = y(\vec{v}.\vec{v})$ donc y=0 de meme z=0 (car $\vec{u}'.\vec{w} = 0$)
Ainsi, $\vec{u}' = x\vec{u}$ avec x non nul donc D' est parallèle à D.■

Théorème-Définition 1:(i) Etant donné une droite D et un point A, il existe un unique plan passant par A et orthogonal à D. On l'appelle le plan perpendiculaire à D et passant par A.
(ii) Etant donné un plan P et un point A, il existe une unique droite passant par A et orthogonale à P. Cette droite s'appelle la perpendiculaire à P passant par A.

Démonstration :(i) Existence : Si A ∈D, on prend deux plans sécants selon D puis dans chacun d'eux, on prend la perpendiculaire à D passant par A puis on prend le plan engendré par ces deux droites.
Sinon, soit A' le pied de la perpendiculaire à D passant par A dans le plan contenant D et A.
Soit D' une droite perpendiculaire à D passant par A' mais pas par A. On prend alors le plan engendré par (AA') et D'.
Unicité : Soit Q un autre plan qui convient alors Q est parallèle au plan précédent et passe par A alors Q=P.

(ii) Soient deux droites de P ; on prend alors les deux plans perpendiculaires à ces deux droites passant par A ((i) assure l'existence et l'unicité de ces plans) ; ces 2 plans se coupent suivant la droite cherchée.■

Remarque : On appelle pied de la perpendiculaire le point d'intersection entre la perpendiculaire à un plan et ce plan.

Définition 4: Soit P un plan. L'application qui à tout point M de E associe le pied M' de la perpendiculaire à P passant par M est appelé projection orthogonale sur P.

Définition 5: On définit la distance du point M au plan P par d(M ,P)=$\inf_{H\in P} MH$.

Propriété 3: On a d(M,P)=MM' où M' est le projeté orthogonal de M sur P.

Démonstration : Soit H∈P, H≠M'. Alors MM'H est rectangle en M' et par Pythagore $MH^2=MM'^2+M'H^2$ d'où MH>MM'.
Ainsi MM' réalise le minimum de distance entre M et P. ■

III) Plans perpendiculaires

Définition 6: Tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à un plan est appelé vecteur normal à ce plan.

Remarque : Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont des vecteurs normaux à un même plan alors ils sont colinéaires.

Définition 7: Deux plans P et P' sont dits perpendiculaires si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Remarque ; Deux plans perpendiculaires sont sécants ; leur intersection est une droite.

Propriété 4: Soient P et P' deux plans. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) P et P' sont perpendiculaires.
(ii) P contient une droite orthogonale à P'.
(iii) Il existe une droite D de P et deux droites non parallèles de P' tel que D soit orthogonale à ces deux droites.

Démonstration : (i)⇒(ii) : Evident
(ii)⇔(iii) :P contient D qui est orthogonale à toute droite de P'
(ii)⇒(i) : Soit D dirigé par $\vec{u}$ tel que D⊂P et D⊥P' alors :
Si P' a pour vecteur normal $\vec{n}'$, il existe un réel k non nul tel que $\vec{n}' = k\vec{u}$
Si P a pour vecteur normal $\vec{n}$, alors $\vec{u}.\vec{n} = 0$.
Alors $\vec{n}'.\vec{n} = 0$ et par conséquent P et perpendiculaire à P'. ■

Propriété 5: (i) Si deux plans sont perpendiculaires, tout plan parallèle à l'un est orthogonal à l'autre.
(ii) Si deux plans sont parallèles, tout plan orthogonal à l'un est orthogonal à l'autre.

Démonstration : (i) Soit P et P' deux plans perpendiculaires de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ alors $\vec{n}.\vec{n}' = 0$.
Soit Q parallèle à P de vecteur normal $\vec{m}$ alors il existe k réel non nul tel que $\vec{n} = k\vec{m}$ et donc $\vec{m}.\vec{n}' = 0$ ce qui montre l'orthogonalité de P' et Q.

(ii) Soit P et P' deux plans parallèles de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ alors $\vec{n}. = k\vec{n}'$ (k∈ℝ)*
Si Q de vecteur normal $\vec{m}$ est orthogonal à P $\vec{m}.\vec{n} = 0$ d'où $\vec{m}.\vec{n}' = 0$ et Q est orthogonal à P'. ■

IV) Applications

4-1) Plan médiateur d'un segment

Définition 7: On appelle le plan médiateur du segment [AB], le plan orthogonal à la droite (AB) et passant par le milieu I du segment [AB].

Propriété 6: L'ensemble des points de l'espace équidistants des points A et B (A≠B) est le plan P médiateur du segment [AB].

Démonstration : Soit M∈P. Si M=I, MA=BM puisque I milieu de [AB].
Si M≠I (IM) est perpendiculaire à (AB) et par le théorème de Pythagore, on a :
$AM^2=MI^2+AI^2$ et $BM^2=MI^2+BI^2$ d'où $AM^2=MB^2$ puisque AI=IB et ainsi <u>AM=MB</u>
Réciproquement, soit N tel que AN=NB.
Si N∈(AB) alors N=I et I∈P.
Si N∉(AB) alors (ABN) existe et I∈(ABN)

Comme NA=NB, N est sur la médiatrice de [AB] donc (IN) ⊥(AB)
Comme I∈P et que P⊥(AB) alors (IN) ⊂P et donc N∈P. ■

Exercice : On munit E d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Donner alors une équation du plan P médiateur du segment [AB] où A (1 ; 0 ; 2) et B (2 ;-1 ; 0).

Correction : Si I est le milieu de [AB] alors I (3/2 ;-1/2 ; 1). De plus, $\overrightarrow{AB}\ (1;-1;-2)$.

Le point M(x, y, z) appartiendra alors au plan P ssi (IM) ⊂P et (IM) ⊥(AB) $\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-\frac{3}{2} \\ y+\frac{1}{2} \\ z-1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}=0$$

⇔*P : x-y-2z=0*

4-2 Perpendiculaire commune à deux droites

Théorème 2: Soit deux droites D et D' non parallèles et non concourantes. Alors il existe une et une seule droite perpendiculaire à ces deux droites.

Démonstration : Soient $\vec{v}$ *(respectivement* $\vec{v}'$*) un vecteur directeur de D (respectivement D'). Notons P le plan contenant D et de direction Vect* $(\vec{v},\vec{v}')$*.*
Soit D'' la projection orthogonale de D' sur le plan P.
Les droites D et D' n'étant pas parallèles, il en va de même pour les droites D et D'' ; notons donc I le point d'intersection de D et D''.
Soit I' le point de D' ayant I pour projection sur P.
Par construction, la droite (II') est orthogonale au plan P et donc aux droites D et D'.
Supposons que Δ soit une droite orthogonale aux droites D et D'. Notons J (respectivement. J') le point d'intersection des droites Δ et D (respectivement. D').
Alors J est l'image par la projection orthogonale sur P de J et J n'est autre que l'intersection des droites D et D'', c'est-à-dire I. Donc I = J et I' = J' et par suite Δ = (II'). ■

Remarque : Cette perpendiculaire permet de définir la distance entre deux droites.

4-3 Théorème des trois perpendiculaires

Exercice : Soit P un plan et un point M∉P. On note M' le projeté orthogonal de M sur P.
Soit Δ droite de P telle que M'∉Δ et A un point de Δ. Alors on a : (MA) ⊥Δ⇔ (M'A) ⊥Δ.

Correction : Soit $\vec{u}$ *vecteur directeur de Δ. Alors (MA) ⊥Δ* $\Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{MA}=0$
$\Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{MM'}+\vec{u}.\overrightarrow{M'A}=0$
$\Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{M'A}=0$ *(car (MM') ⊥Δ)*
⇔Δ⊥ (M'A) ■

4-4 Tétraèdre ayant des hauteurs concourantes

Exercice : Soit ABCD un tétraèdre non plat. On projette orthogonalement les sommets sur les faces opposés ; on obtient respectivement H, P, Q, R.
Montrer que (AH) et (BP) sont concourantes en I si et seulement si (AB) ⊥(CD)

Correction : ⟹Soit I le point d'intersection de (AH) et (BP).
Par hypothèse (AH) ⊥(BCD) et (BP) ⊥(ACD) ⟹(AH) ⊥(CD) et (BP) ⊥(CD)
⟹ (CD) ⊥P où P est le plan engendré par (AH) et (BP)
Or A et B ∈P donc (AB) ⊥(CD).
⟸Si (AB) ⊥(CD) alors le plan passant par A et orthogonal à (CD) contient B et coupe (CD) en un point A'
Le plan (ABA') orthogonal à (CD) est donc orthogonal à (BCD) qui la contient.
La hauteur (AH) perpendiculaire à (BCD) appartient donc au plan (ABA').
De même le plan (ABA') perpendiculaire à (CD) est perpendiculaire au plan (ACD) qui la contient.
La hauteur (BP) perpendiculaire à (ACD) appartient donc à (ABA').
(AH) et (BP) sont donc dans le même plan et non parallèles donc concourantes. ■