

Leçon 36

Applications du produit scalaire et du produit vectoriel dans l'espace orienté.
Calcul des distances, d'aires, de volumes, d'angles, ...

Pré-requis.

Produit scalaire
Produit vectoriel
Produit mixte

distance = MH , $H = \text{proj}_\perp(M)$
calcul matriciel
formule nouvelle d'aire et de volume.

Cadre

$(E, \vec{E})$ l'espace affine euclidien orienté.

1° Calcul de distance

1) Entre deux points

proposition

soient A et B deux points de E

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}}$$

démonstration

$$\vec{AB} \cdot \vec{AB} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AB}\| \times \cos(\vec{AB}, \vec{AB})$$

$$\text{or } (\vec{AB}, \vec{AB}) = 0 [2\pi] \text{ donc } \cos(\vec{AB}, \vec{AB}) = 1$$

$$\text{donc } \|\vec{AB}\|^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB} \text{ alors } \|\vec{AB}\| = \sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}}$$

exemple

- Quelle est la distance entre les points $A(1, 1, 1)$ et $B(1, -2, 5)$.

$$\vec{AB} = (0, -3, 4) ; \|\vec{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

2) d'un point à une droite

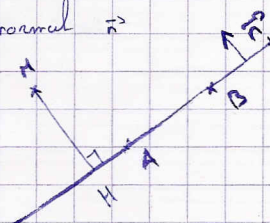
proposition

soit $\mathcal{D}$ une droite contenant le point A et de vecteur normal $\vec{n}$

$$\text{soit } M \in E, \quad d(M, \mathcal{D}) = \frac{|\vec{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

soit $\mathcal{D}$ une droite défini par deux points A et $B \in \mathcal{D}$

$$\text{soit } M \in E, \quad d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{MA} \wedge \vec{AB}\|}{\|\vec{AB}\|}$$



démonstration.

$$\begin{aligned} \textcircled{*} \vec{MA} \wedge \vec{AB} &= (\vec{MH} + \vec{HA}) \wedge \vec{AB} = (\vec{MH} \wedge \vec{AB}) + (\vec{HA} \wedge \vec{AB}) \\ &= (\vec{MH} \wedge \vec{AB}) + (\vec{0}) \quad \text{car } \vec{AH} \text{ et } \vec{AB} \text{ sont colinéaires} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \|\vec{MA} \wedge \vec{AB}\| = \|\vec{MH} \wedge \vec{AB}\|$$

$$\text{car } \vec{HM} \perp \vec{AB} \quad \text{donc } \|\vec{MH} \wedge \vec{AB}\| = \|\vec{MH}\| \times \|\vec{AB}\|$$

$$\text{donc } MH = \frac{\|\vec{MA} \wedge \vec{AB}\|}{\|\vec{AB}\|}$$

$$\textcircled{*} \text{ Soit } H, \text{ le projeté orthogonal de } M \text{ sur } \mathcal{D}. \quad |\vec{HM} \cdot \vec{n}| = \|\vec{n}\| \times \|\vec{HM}\|$$

$$\text{de même } |\vec{HM} \cdot \vec{n}| = |(\vec{HA} + \vec{AM}) \cdot \vec{n}|$$

$$= |\vec{HA} \cdot \vec{n} + \vec{AM} \cdot \vec{n}| \quad \text{car } \vec{HA} \perp \vec{n} \text{ donc } \vec{HA} \cdot \vec{n} = 0$$

$$= |0 + \vec{AM} \cdot \vec{n}| = |\vec{AM} \cdot \vec{n}|$$

$$\text{donc } HM = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Exercice

Soit A et B deux points de E et α un réel strictement positif.
Quel est l'ensemble des points H de E vérifiant $\vec{HA} \wedge \vec{HB} = \alpha$?

$$\text{Regardons la distance de } M \text{ à } (AB), \quad d(M, (AB)) = \frac{\|\vec{MA} \wedge \vec{AB}\|}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\|\vec{MA} \wedge (\vec{AH} + \vec{HB})\|}{\|\vec{AB}\|}$$

$$d(M, (AB)) = \frac{\|\vec{MA} \wedge \vec{AH} + \vec{MA} \wedge \vec{HB}\|}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\|\vec{MA} \wedge \vec{HB}\|}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\alpha}{\|\vec{AB}\|}$$

donc l'ensemble recherché est le cylindre de révolution d'axe (AB) et de rayon $\frac{\alpha}{\|\vec{AB}\|}$

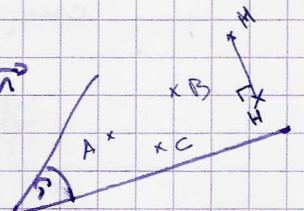
3) d'un point à un plan.

proposition

$$\text{Soit } \mathcal{P}, \text{ un plan contenant } A \text{ et de vecteur normal } \vec{n} \\ \text{soit } M \in E, \quad d(M, \mathcal{P}) = \frac{|\vec{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Soit $\mathcal{P}$, un plan défini par trois points A, B et C $\in E$

$$\text{soit } M \in E, \quad d(M, \mathcal{P}) = \frac{|\vec{MA} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})|}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}$$



démonstration

* soit H , le projeté orthogonal de M sur D

$$\begin{aligned} |\vec{MH} \cdot \vec{n}| &= |(\vec{MA} + \vec{AH}) \cdot \vec{n}| \\ &= |\vec{MA} \cdot \vec{n} + \vec{AH} \cdot \vec{n}| \\ &= |\vec{MA} \cdot \vec{n}| \quad \text{car } \vec{AH} \perp \vec{n} \end{aligned}$$

de plus $|\vec{MH} \cdot \vec{n}| = \|\vec{MH}\| \times \|\vec{n}\|$ car $\vec{MH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

$$\text{donc } MH = \frac{|\vec{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

② * soit H , le projeté orthogonal de M sur S alors $d(M, S) = MH$.

De plus, le vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est normal à S

$$\begin{aligned} \text{Donc } |\vec{MA} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})| &= |(\vec{MH} + \vec{HA}) \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})| \\ &= |\vec{MH} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) + \vec{HA} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})| \quad \vec{HA} \perp (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \\ &= |\vec{MH} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})| = \|\vec{MH}\| \cdot \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| \quad \text{car } \vec{MH} \text{ et } \vec{AB} \wedge \vec{AC} \text{ sont colinéaires} \end{aligned}$$

$$\text{donc } MH = \frac{|\vec{MA} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})|}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}$$

Exercice

Soient $A(1,0,0)$ $B(0,1,0)$ $C(0,0,1)$.

Donner l'équation du plan S_{ABC}

$$\begin{aligned} \text{Soit } M(x,y,z) \in E, \quad S_{ABC} &= \{M \in E \mid d(M, S_{ABC}) = 0\} \\ &= \{M \in E \mid \vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0\} \\ &= \{M \in E \mid [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AM}] = 0\} \end{aligned}$$

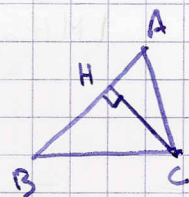
$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AM}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 0 & -1 & y(x-1) \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & y(x-1) \\ 1 & z \end{vmatrix} = x+y+z-1$$

Le plan S_{ABC} à pour équation $x+y+z-1=0$.

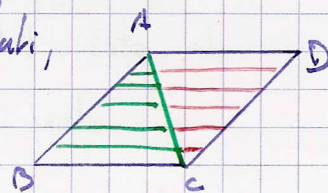
II° Calcul d'aire

Proposition

Soit ABC , un triangle non aplati ;
 l'aire de ABC est $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$



Soit $ABCD$, un parallélogramme non aplati,
 l'aire de $ABCD$ est $\mathcal{A}_{ABCD} = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$



démonstration

Soit ABC , un triangle non aplati, soit H , le projeté orthogonal de C sur (AB)

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times CH \quad \text{on} \quad CH = |\sin(\vec{BA}, \vec{BC})| \times BC$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times |\sin(\vec{BA}, \vec{BC})| = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{BC}\|$$

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{BC}\| = \|\vec{AB} \wedge (\vec{BA} + \vec{AC})\| = \|\vec{AB} \wedge \vec{BA} + \vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

$$\text{donc } \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = 2 \times \mathcal{A}_{ABC} = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| \quad \text{car } \vec{AB} \text{ et } \vec{BA} \text{ sont colinéaires.}$$

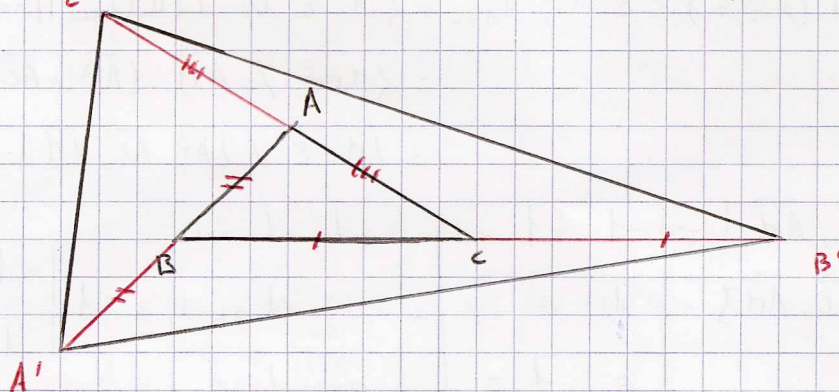
Exercice

Soit ABC , un triangle non aplati.

On construit les symétriques A', B', C' respectif des points A, B, C

par rapport aux points B, C, A .

Quel rapport y'a-t-il entre les aires des triangles $A'B'C'$ et ABC ?



$$\begin{aligned} \vec{A'B'} \wedge \vec{A'C'} &= (\vec{A'B} + \vec{BB'}) \wedge (\vec{AA'} + \vec{AC'}) \\ &= (\vec{BA} + 2\vec{BC}) \wedge (2\vec{BA} + \vec{CA}) \\ &= (3\vec{BA} + 2\vec{AC}) \wedge (2\vec{BA} + \vec{CA}) \end{aligned}$$

$$= 6 \vec{BA} \wedge \vec{BA} + 3 \vec{BA} \wedge \vec{CA} + 4 \vec{AC} \wedge \vec{BA} + 2 \vec{AC} \wedge \vec{CA}$$

$$\vec{A'B'} \wedge \vec{A'C'} = 7 \vec{AB} \wedge \vec{AC} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{A}_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \|\vec{A'B'} \wedge \vec{A'C'}\| = \frac{7}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = 7 \mathcal{A}_{ABC}$$

IV°/ Calcul de volume

Proposition

Soit $ABCDEFGH$, un parallélépipède $\mathcal{P}$

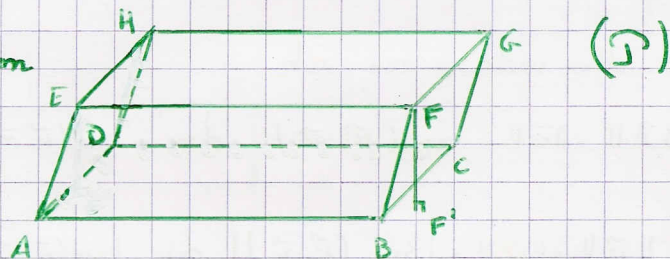
L'aire de $\mathcal{P}$ est $\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = |(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AF}| = [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AF}]$

Soit $ABCD$, un tétraèdre $\mathcal{T}$

L'aire de $\mathcal{T}$ est $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD}| = \frac{1}{6} [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]$

② démonstration

⊙



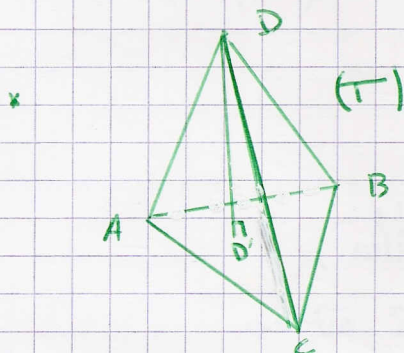
Soit F' , le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{P}_{ABCD}$.

$$V_{\mathcal{P}} = FF' \times \mathcal{A}_{\mathcal{P}_{ABCD}}$$

$$\text{or } FF' = d(F, \mathcal{P}_{ABCD}) = \frac{|\vec{AF} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})|}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}$$

$$\text{et } \mathcal{A}_{\mathcal{P}_{ABCD}} = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

$$\text{donc } V_{\mathcal{P}} = |\vec{AF} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})|$$



Soit D' , le projeté orthogonal de D sur $\mathcal{P}_{ABC}$.

$$V_{\mathcal{T}} = \frac{1}{3} DD' \times \mathcal{A}_{\mathcal{P}_{ABC}}$$

$$\text{or } DD' = d(D, \mathcal{P}_{ABC}) = \frac{|\vec{AD} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})|}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}$$

$$\text{et } \mathcal{A}_{\mathcal{P}_{ABC}} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

$$\text{donc } V_{\mathcal{T}} = \frac{1}{6} |\vec{AD} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})|$$

Exercice

IV° Calcul d'angle

proposition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

$$|\sin(\vec{u}, \vec{v})| = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

démonstration

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{donc} \quad \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

$$\text{et } \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})| \quad \text{donc} \quad |\sin(\vec{u}, \vec{v})| = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

I° Résolution d'un système de 2 équations à 3 inconnues.

$$\text{Soit } (S) : \begin{cases} u_1 x + u_2 y + u_3 z = 0 \\ v_1 x + v_2 y + v_3 z = 0 \end{cases} \quad \text{d'inconnues } x, y \text{ et } z$$

$$\text{Soient } \vec{u} (u_1, u_2, u_3) \quad \vec{v} (v_1, v_2, v_3) \quad \vec{w} (x, y, z)$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{w} \\ \vec{v} \perp \vec{w} \end{cases}$$

si les 2 équations sont proportionnelles,

$$(S) \Leftrightarrow u_1 x + u_2 y + u_3 z = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$$

l'ensemble solution est le plan vectoriel perpendiculaire à $\vec{u}$.

sinon l'ensemble solution est la droite vectorielle engendrée par $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

$$\text{et } x = \lambda \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \quad y = -\lambda \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \quad z = \lambda \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\vec{u}, \vec{v} \rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} \begin{cases} \text{colin} & 0 \\ \text{sin on} & \vec{w} \text{ orth. à } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \\ \|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\vec{u}, \vec{v})| \\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ directe} \uparrow \end{cases}$$

B base directe

$$B' \text{ directe} \xrightarrow{\text{def}} \det(B') > 0$$

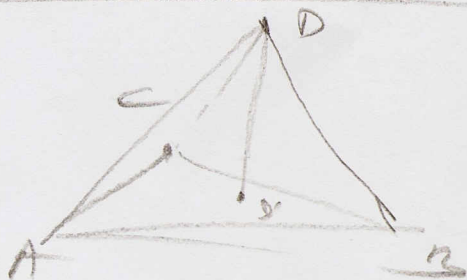
$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

Bon directe

Distance entre 2 droites non coplanaires $D(A, \vec{u})$
 $D'(A', \vec{u}')$

$$d = \frac{|\vec{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}$$

Produit mixte $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$: $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$
 $= \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
 OSUND.



$$V_T = \frac{1}{3} DP \cdot A(ABC)$$