Leçon 34 Droites remarquables du triangle
Médiatrices, médianes, hauteurs, bissectrices …

Pré-requis

Médiatrice d'un segment, bissectrice d'un couple de droites.
Barycentre et relation vectorielle.
Homothétie

Cadre

On se place dans le plan affine euclidien *P*.
On considérera un triangle ABC non aplati.
A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC], [AB].
a, b et c désignent les longueurs des cotés [BC], [AC], [AB].

I°/ Médiatrices

Définition

On appelle médiatrice du triangle, toute médiatrice d'un de ses côtés.

Théorème

Les médiatrices du triangle sont concourantes en un point noté O.
Ce point est à égal distance des 3 sommets donc centre d'un cercle circonscrit au triangle. Ce cercle est unique.

Transparent

Démonstration

Soient Δ_A, Δ_B et Δ_C les médiatrices respectives de [BC], [AC] et [AB]. Soit O le point d'intersection de Δ_A et Δ_B (Ce point existe bien sinon cela impliquerait ABC aplati, impossible par hypothèse), donc OB=OC et OA=OC par conséquent OA=OB donc $O \in \Delta_C$, autrement dit Δ_A, Δ_B et Δ_C sont concourantes.

OA=OB=OC donc le cercle de centre O et de rayon OA est circonscrit au triangle ABC. Ce cercle est unique, uniquement déterminé par son centre O et son rayon OA.

II°/ Médianes

Définition

On appelle médiane du triangle, toute droite passant par un sommet et le milieu du coté opposé.

Oral : « Médiane » désigne aussi le segment joignant un sommet et le milieu du coté opposé.

Théorème

Les médianes du triangle sont concourantes en un point G, appelé centre de gravité.

Ce point est situé au $\frac{2}{3}$ des médianes en partant du sommet.

Transparent

Démonstration

Soit G, l'isobarycentre de A, B et C.
A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

A' est l'isobarycentre de B et C (car A' milieu de [BC]) donc G est le barycentre de {(A;1) ; (A';2)} donc $G \in (AA')$.
Par un raisonnement analogue, on montre que $G \in (BB')$ et $G \in (CC')$
Donc les médianes sont concourantes en G.

De plus G est le barycentre de {(A;1) ; (A';2)} donc $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{0}$ i.e. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ et de même $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$.

Exercice

Soit ABC un triangle quelconque et I le milieu de [AB], montrer que

- $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = CI^2 - \frac{1}{4}AB^2$
- $CA^2+CB^2 = 2CI^2 + \frac{AB^2}{2}$

III°/ Hauteurs

Définition

On appelle hauteur d'in triangle, toute droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé.

Oral : « Hauteur » désigne aussi le segment joignant un sommet au pied de la hauteur (intersection de la hauteur et du côté qui lui est perpendiculaire).

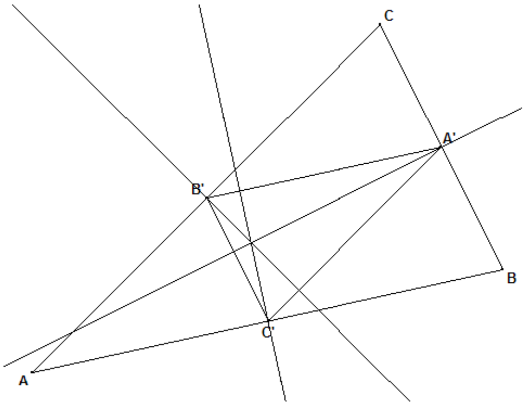
Théorème

Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H, appelé orthocentre du triangle

Transparent

Démonstration

Soit ABC un triangle et A’B’C’ son triangle médian donc [AB] // [A’B’] ; [BC] // [B’C’] et [AC] // [A’C’] (théorème de Thalès)



Les hauteurs de A’B’C’ sont confondues avec les médiatrices de ABC qui sont concourantes donc les hauteurs sont concourantes

IV°/ Bissectrices

Définition

On appelle bissectrices issues de A, les bissectrices du couple de droites ((AB), (AC)). La bissectrice passant par l’intérieur du triangle ABC est appelé bissectrice intérieure, l’autre est appelé bissectrice extérieure.

Théorème

Les bissectrices intérieures du triangle sont concourantes en un point I. Ce point est à égal distance des droites supports des côtés du triangle donc centre d’un cercle circonscrit au triangle. Ce cercle est unique.

Transparent

Démonstration

Soient I le barycentre de {(A;a) ; (B;b) ; (C;c)} alors $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow (a+b+c)\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow (a+b+c)\overrightarrow{AI}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$

Alors $b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$ est colinéaire à $\dfrac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{bc}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{c}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{b}$

Considérons B_1 tq $\overrightarrow{AB_1}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{c}$, $\overrightarrow{AC_1}=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{b}$ et $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AC_1}$ donc AB_1DC_1 est un losange .

(AD) est une diagonale du losange donc l'axe de symétrie échangeant [AB) et [AC). Il s'agit donc de la bissectrice extérieure issue de A

La bissectrice extérieure issue de A est donc dirigée par $\frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \frac{\overrightarrow{AC}}{b}$ donc I appartient donc a la bissectrice intérieure issue de A.
Par un raisonnement analogue, on montre que I appartient aux bissectrices intérieures issues de B et de C donc les bissectrices intérieures sont concourantes.

I est équidistant de [AB], [AC], [BC] donc I est le centre d'un cercle tangent aux 3 côtés du triangle et de rayon d(I,(AB)). Ce cercle est unique.

Théorème

La bissectrice intérieure issue d'un sommet et les bissectrices extérieures issues des deux autres sommets sont concourantes en un point I. Ce point est équidistant des 3 droites supports des cotés du triangle donc centre d'un cercle dit exinscrit au triangle. Il est unique

Transparent

Démonstration

Démonstration « similaire » à la précédente en considérant I le barycentre de {(A;-a) ; (B;b) ; (C;c)} si on prend la bissectrice extérieure issue de A.

V°/ Applications

Soit ABC, un triangle quelconque (non équilatéral)
C son cercle circonscrit de rayon R

1) Montrer que O, H et G son alignés.

   Cette droite est appelé droite d'Euler

2) Montrer que le cercle *C'* de centre Ω, milieu de [OH] et de rayon R/2 contient :
   - A', B'et C'
   - Les milieux des segments [AH], [BH], [CH]
   - Les pieds des hauteurs du triangle

   Ce cercle est appelé cercle d'Euler

Démonstration

1) Considérons l'homothétie h de centre G et de rapport $\frac{-1}{2}$,

alors h(A)=A', h(B)=B', h(C)=C' donc ABC est envoyé sur son triangle médian.

Par conséquent les hauteurs de ABC sont envoyés sur les hauteurs de A'B'C' qui sont les médiatrices de ABC donc h(H)=O donc H,G et O sont alignés.

De plus, $\overrightarrow{GO} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{GH}$ donc $3\,\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$.

2) On considère toujours l'homothétie h de centre G et de rapport $\frac{-1}{2}$.

h(O)= Ω tel que $\overrightarrow{G\Omega} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{GO}$

$$\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{O\Omega} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{GO}$$

$$\overrightarrow{O\Omega} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{OG} \text{ or } 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$$

$$\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} \text{ donc } \Omega \text{ est le milieu de [OH].}$$

de plus $R_{C'} = R_{h(C)} = \left|\frac{-1}{2}\right| R_C = \frac{1}{2}R$

donc l'image de *C* est le cercle définie plus haut.

$\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$; $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{H\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$ donc $\overrightarrow{H\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HO}$, on peut donc aussi considérer l'homothétie h_1, de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$.

- $A\in C$, donc $h_1(A)\in C'$ or $h_1(A)=I$ tq $\overrightarrow{HI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HA}$, I est le milieu de [HA]
- $A\in C$, donc $h(A)=A'\in C'$; A' milieu de [BC]
- H_A pied de la hauteur issue de A, $HH_AA'O$ est un trapèze rectangle, Ω milieu de [HO] donc Ω se projette orthogonalement sur $[A'H_A]$ en son milieu Z donc en appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles $\Omega ZA'$ rectangle en Z et ΩZH_A rectangle en Z, on en deduis que $\Omega A' = \Omega H_A$ Donc $H_A\in C'$

Par un même raisonnement, on montre que les points de l'énoncé appartiennent bien au cercle *C'*.