

Pré-requis

Produit scalaire

Définition : hauteur, médiane et bissectrice d'un triangle

Mesures algébriques

Angles

Relations métriques et trigonométriques dans un triangle rectangle

Puissance d'un point par rapport à un cercle : soient M un point du plan, un cercle C de centre O et de rayon r , et une droite D passant par M sécante à C en A et B .

Alors pour toute droite D , $p_C(M) = \overline{MA} \cdot \overline{MB}$

Théorème de l'angle inscrit : Soient A et B deux points distincts d'un cercle C de centre O

Alors, pour tout point M de C distinct de A et B , $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi}$

Cadre

On se place dans un plan affine euclidien P

Soit un triangle ABC , on note $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ les mesures dans $[0, \pi]$ de ses angles géométriques et on note a , b et c les longueurs des côtés BC , CA et AB .

Par abus de langage, longueurs des côtés et côtés seront confondus.

I – Relations métriques**A – Théorème de la médiane**

Théorème 1 : Si I est le milieu de $[BC]$ et H_A le pied de la hauteur issue de A , alors :

$$(1) \quad AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$(2) \quad AB^2 - AC^2 = 2\overline{BC} \cdot \overline{IH_A}$$

Figure :

Preuve : (1) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = (2\overrightarrow{AI})^2$ et $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overline{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\text{or } \overline{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB}) = AI^2 - IB^2 = AI^2 - \left(\frac{CB}{2}\right)^2$$

$$\text{Donc } 4AI^2 = AB^2 + AC^2 + 2AI^2 - \frac{BC^2}{2} \text{ d'où } AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$(2) \quad AB^2 - AC^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 - (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB})^2 = 4\overline{AI} \cdot \overrightarrow{IB} = -4\overline{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$$

Or H_A est le projeté orthogonal de A sur (IB)

$$\text{Donc } AB^2 - AC^2 = -4\overline{IH_A} \cdot \overrightarrow{IB} = 2\overline{BC} \cdot \overline{IH_A}$$

- Remarques : a) Le théorème de la médiane permet de calculer la longueur de la médiane et de la hauteur en fonction des longueurs des côtés du triangle.
 b) D'après la relation (1), si ABC est rectangle en A , alors A appartient au cercle de diamètre BC .

$$AI^2 = \frac{BC^2}{4} \Rightarrow AI = \frac{BC}{2}, \text{ plus utilisation du théorème de Pythagore}$$

- c) La relation (2) permet de montrer que dans un triangle isocèle en A , la hauteur et la médiane issues de A sont confondues

$$AB = AC \Rightarrow 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{IH_A} = 0$$

Or $\overline{BC} \neq 0$ donc $\overline{IH_A} = 0$ donc I et H_A sont confondus

B – Relation entre les hauteurs et les côtés d'un triangle

Proposition 1 : Soit H l'orthocentre du triangle ABC . Soient H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B, C .

$$\text{On a : } \overline{AH_C} \cdot \overline{AB} = \overline{AH} \cdot \overline{AH_A} = \overline{AH_B} \cdot \overline{AC}$$

Preuve : Soit I le milieu de BH et soit C_1 le cercle de centre I et de rayon BI

Le triangle HBH_C est rectangle en H_C , donc d'après le théorème de Pythagore $H_C B^2 + H_C H^2 = BH^2$

Et d'après le théorème de la médiane : $H_C B^2 + H_C H^2 = 2H_C I^2 + \frac{BH^2}{2}$

$$\text{D'où : } BH^2 = 2H_C I^2 + \frac{BH^2}{2} \Rightarrow BH^2 = (2BI)^2 = 4H_C I^2 \Rightarrow BI = H_C I$$

Donc $H_C \in C_1$

De même, $H_A \in C_1$

Soit $p_{C_1}(A)$ la puissance de A par rapport à C_1

En prenant (AB) comme sécante à C_1 on a $p_{C_1}(A) = \overline{AB} \cdot \overline{AH_C}$

Et en prenant (HH_A) comme sécante à C_1 on a $p_{C_1}(A) = \overline{AH_A} \cdot \overline{AH}$

De même, soit J le milieu de CH et soit C_2 le cercle de centre J et de rayon CJ

On a : $p_{C_2}(A) = \overline{AH_A} \cdot \overline{AH} = \overline{AC} \cdot \overline{AH_B}$

$$\text{Donc } \overline{AH_A} \cdot \overline{AH} = \overline{AB} \cdot \overline{AH_C} = \overline{AC} \cdot \overline{AH_B}$$

C – Position du pied d'une bissectrice en fonction des côtés du triangle

Théorème 2 : La bissectrice intérieure (D_A) issue de A coupe le côté $[BC]$ en J_A tel que $\frac{\overline{J_A B}}{\overline{J_A C}} = -\frac{AB}{AC}$

Figure :

Preuve : - Montrons que D_A coupe $[BC]$

Par définition, D_A est l'axe de l'unique réflexion s qui échange les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$
Donc $s(B) = B' \in [AC)$

La droite D_A partage le plan en deux demi-plans : P_B (contenant B) et $P_{B'}$ (contenant B')

$C \in [AB') \setminus \{A\}$ donc $C \in P_{B'}$

On a $B \in P_B$ et $C \in P_{B'}$, donc $[BC]$ coupe la droite-frontière D_A en un point J_A

- Montrons l'égalité

La bissectrice extérieure D'_A issue de A est perpendiculaire à D_A

Le symétrique C' de C par rapport à D'_A appartient à la demi-droite opposée à $[AB)$

D'après le théorème de Thalès dans le triangle BCC' on a : $\frac{J_AB}{J_AC} = \frac{AB}{AC'} = -\frac{AB}{AC} = -\frac{AB}{AC}$

D – Formules des aires

Théorème 3 : Soit S l'aire d'un triangle ABC et H_A le pied de la hauteur issue de A

$$\text{Alors : } S = \frac{BC \cdot AH_A}{2}$$

Remarque : Par permutation circulaire de a, b, c on trouve deux autres formules.

Preuve : - Si $H_A \in [BC]$

$$\text{Alors : } S = \left(\frac{H_A B \cdot AH_A}{2} \right) + \left(\frac{CH_A \cdot AH_A}{2} \right) = \frac{AH_A (H_A B + CH_A)}{2} = \frac{AH_A \cdot CB}{2}$$

(en utilisant la formule d'aire dans un triangle rectangle)

- Si $H_A \notin [BC]$

$$\text{Alors : } S = \left(\frac{CH_A \cdot AH_A}{2} \right) - \left(\frac{H_A B \cdot AH_A}{2} \right) = \frac{AH_A (CH_A - BH_A)}{2} = \frac{AH_A \cdot CB}{2}$$

II – Relations trigonométriques

A – Formule d'Al Kashi

Remarque : Dans un triangle rectangle, en connaissant un angle et une longueur, on peut calculer les autres dimensions en utilisant des formules trigonométriques. On va montrer qu'il en est de même dans un triangle quelconque.

Théorème 4 : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

Remarque : Par permutation circulaire de a, b, c on trouve deux autres formules d'Al Kashi.

Preuve : Première méthode

$$(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA})^2 = BC^2 = a^2$$

$$\text{Et } (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$$

Seconde méthode

Les aires hachurées de la même manière sont égales :

$$A_1 = b \cdot B'C = ab \cos \hat{C} \text{ et } A_1' = a \cdot A'C = ab \cos \hat{C} \text{ donc } A_1 = A_1'$$

$$\text{De même : } A_2 = A_2'$$

$$\text{De plus } A_1 = b^2 - A_3 = b^2 - b \cdot AB' = b^2 - bc \cos \hat{A} \text{ et de même } A_2 = c^2 - A_4 = c^2 - bc \cos \hat{A}$$

$$\text{Donc } A_0 = A_1 + A_2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = a^2$$

Figure :

Remarque : a) Si ABC est rectangle en A , on retrouve le théorème de Pythagore

b) Le théorème d'Al Kashi permet de connaître les valeurs des trois angles lorsque les longueurs des trois côtés sont connus

B – Formule des sinus

Théorème 5 : Si S est l'aire du triangle et R le rayon du cercle circonscrit au triangle

$$\text{Alors : } \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R = \frac{abc}{2S}$$

Preuve : Soit B' le point diamétralement opposé à B sur le cercle circonscrit au triangle ABC de centre O

Soit $\hat{A} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (angle orienté)

$$\text{- Le théorème de l'angle inscrit donne : } \hat{A} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \ (\pi) \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{B'C}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \ (\pi)$$

$$\text{Donc } \hat{A} = (\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{B'C}) \ (\pi)$$

$$BCB' \text{ est rectangle en } C \text{ donc : } \sin \hat{A} = \left| \sin(\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{B'C}) \right| = \frac{BC}{BB'} = \frac{a}{2R} \text{ (d'où les trois premières égalités)}$$

- Soit H_A le projeté orthogonal de A sur $[BC]$, alors $S = \frac{a \cdot AH_A}{2} = \frac{ac \sin \hat{B}}{2} \Rightarrow \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{abc}{2S}$

Figure :

Exercice : montrer que ABC est rectangle en A si et seulement si $\sin^2 \hat{A} = \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C}$

Résolution : $\sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C} = \left(\frac{b \sin \hat{A}}{a}\right)^2 + \left(\frac{c \sin \hat{A}}{a}\right)^2 = \sin^2 \hat{A} \left(\frac{b^2 + c^2}{a^2}\right)$

Or $\frac{b^2 + c^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow ABC$ est rectangle en A

C – Formule des tangentes

Théorème 6 : Si ABC est un triangle non rectangle, alors : $\tan \hat{A} + \tan \hat{B} + \tan \hat{C} = \tan \hat{A} \cdot \tan \hat{B} \cdot \tan \hat{C}$

Preuve : Lemme 1 : La somme des angles dans un triangle vaut π

Preuve : Grace aux angles alternes internes

Figure :

$$\begin{aligned} \tan \hat{C} &= \tan(\pi - (\hat{A} + \hat{B})) = \frac{\tan \pi + \tan(-(\hat{A} + \hat{B}))}{1 - \tan \pi \cdot \tan(\hat{A} + \hat{B})} = \tan(-(\hat{A} + \hat{B})) = -\tan(\hat{A} + \hat{B}) = -\frac{\tan \hat{A} + \tan \hat{B}}{1 - \tan \hat{A} \cdot \tan \hat{B}} \\ \tan \hat{A} + \tan \hat{B} + \tan \hat{C} &= \tan \hat{A} + \tan \hat{B} - \frac{\tan \hat{A} + \tan \hat{B}}{1 - \tan \hat{A} \cdot \tan \hat{B}} \\ &= \frac{\tan \hat{A}(1 - \tan \hat{A} \tan \hat{B} - 1) + \tan \hat{B}(1 - \tan \hat{A} \tan \hat{B} - 1)}{1 - \tan \hat{A} \cdot \tan \hat{B}} \\ &= \tan \hat{A} \cdot \tan \hat{B} \left(-\frac{\tan \hat{A} + \tan \hat{B}}{1 - \tan \hat{A} \cdot \tan \hat{B}}\right) = \tan \hat{A} \cdot \tan \hat{B} \cdot \tan \hat{C} \end{aligned}$$

III – Applications

A – Utilisation du théorème de la médiane

1 – Formule du parallélogramme

Proposition 2 : La somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses diagonales.

Preuve : Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre de symétrie O (O coupe les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ en leur milieu).

$$\text{Théorème de la médiane dans le triangle } ABD : AB^2 + AD^2 = 2\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \frac{BD^2}{2} = \frac{AC^2}{2} + \frac{BD^2}{2}$$

$$\text{Théorème de la médiane dans le triangle } BCD : CB^2 + CD^2 = 2CO^2 + \frac{BD^2}{2} = \frac{AC^2}{2} + \frac{BD^2}{2}$$

$$\text{Donc } AB^2 + AD^2 + CB^2 + CD^2 = 4AO^2 + BD^2 = AC^2 + BD^2$$

Figure :

2 – Lignes de niveau

Exercice : Soient A et B deux points distincts du plan et k un réel quelconque.

Déterminer les ensembles $E_1 = \{M \in P / MA^2 + MB^2 = k\}$ et $E_2 = \{M \in P / MA^2 - MB^2 = k\}$

Résolution : Soient I le milieu de $[AB]$ et H le projeté orthogonal de M sur (AB)

$$\text{D'après le théorème de la médiane : } M \in E_1 \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2}\left(k - \frac{AB^2}{2}\right)$$

$$\text{Donc } E_1 = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \text{ si } k < \frac{AB^2}{2} \\ \{I\} \text{ si } k = \frac{AB^2}{2} \\ \text{cercle}(I, \sqrt{\frac{1}{2}\left(k - \frac{AB^2}{2}\right)}) \text{ si } k > \frac{AB^2}{2} \end{array} \right\}$$

$$\text{De même, } M \in E_2 \Leftrightarrow 2\overline{AB} \cdot \overline{IH} = k \Leftrightarrow \overline{IH} = \frac{k}{2\overline{AB}}$$

$$\text{Donc } E_2 = \left\{ \text{droite perpendiculaire à } (AB) \text{ passant par } H_0 / \overline{IH_0} = \frac{k}{2\overline{AB}} \right\}$$

B – Utilisation de la formule d'Al Kashi

1 – Constructibilité d'un triangle

Proposition 3 : Soient a, b, c trois réels strictement positifs.

On peut construire un triangle ABC de longueurs de côtés a, b, c si et seulement si a, b, c

$$\text{vérifient les inégalités triangulaires suivantes : (S) } \begin{cases} a \leq b + c \\ b \leq c + a \\ c \leq a + b \end{cases}$$

Preuve : (S) est clairement une condition nécessaire, on va montrer qu'il est également une condition suffisante.

Supposons que (S) soit vérifié.

S'il existait un triangle ABC , alors l'angle $\hat{A}$ vérifierait $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ (formule d'Al Kashi).

Or :

$$(S) \Leftrightarrow |b - c| \leq a \leq b + c \Leftrightarrow (b - c)^2 \leq a^2 \leq (b + c)^2$$

$$\Leftrightarrow -b^2 - c^2 + 2bc \geq -a^2 \geq -b^2 - c^2 - 2bc \Leftrightarrow 1 \geq \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \geq -1$$

Donc il existe au moins un angle $\hat{A}$ vérifiant $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Soit A un point quelconque du plan, construisons deux demi-droites d'origine A faisant un angle $\hat{A}$.
Plaçons B et C sur ces deux demi-droites tels que $AB = c$ et $AC = b$

D'après le théorème d'Al Kashi : $BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = b^2 + c^2 - 2bc \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) = a^2$

Donc $BC = a$ c.à.d. que le triangle ABC admet les réels a, b, c pour longueur de ses côtés.

Donc (S) est bien une condition suffisante pour que le triangle ABC soit constructible.

2 – Formule de Héron

Théorème 7 : L'aire S et le demi-périmètre p d'un triangle ABC sont liés par la formule :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Preuve : $S = \frac{c \cdot CH_C}{2}$ avec H_C le pied de la hauteur issue de C et $\sin \hat{A} = \frac{CH_C}{b}$

$$\text{Donc } S^2 = \frac{1}{4} b^2 c^2 \sin^2 \hat{A} = \frac{1}{4} b^2 c^2 (1 - \cos^2 \hat{A}) = \frac{1}{4} b^2 c^2 \left(1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 \right)$$

(par la formule d'Al Kashi)

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{16} (4b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2) = \frac{1}{16} (2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2) \\ &= \frac{1}{16} (-(b-c)^2 + a^2)((b+c)^2 - a^2) = \frac{(a+b-c)}{2} \frac{(a-b+c)}{2} \frac{(b+c+a)}{2} \frac{(b+c-a)}{2} \\ &= (p-c)(p-b)p(p-a) \end{aligned}$$

C – Utilisation de la formule des sinus

Exercice : Un bateau se déplace en ligne droite d'un point A vers un point lointain C à une vitesse constante $v = 20\text{km/h}$. A 9h, il se trouve au point A et le capitaine observe un phare P situé sur le côté tel que $\hat{CAP} = 27^\circ$. A 9h45, il se trouve au point B et $\hat{CBP} = 34^\circ$.
Quelle est la distance BP entre le bateau et le phare ?

Résolution : $AB = 20 \cdot \frac{3}{4} = 15\text{km}$

D'après la formule des sinus : $\frac{BP}{\sin(\hat{BAP})} = \frac{AB}{\sin(\hat{APB})}$

$$\text{D'où } BP = \frac{15 \sin(27)}{\sin(180 - 27 - (180 - 34))} = \frac{15 \sin(27)}{\sin(7)} \cong 55,88\text{km}$$

Figure :