# 28 Projection orthogonale sur une droite du plan, projection vectorielle associée. Applications (calculs de distances et d'angles, optimisation...).

**pré-requis**

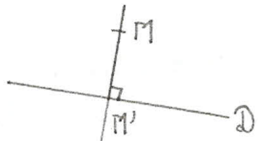
* définition barycentre, associativité du barycentre
* relation de Chasles.
* produit scalaire.
* définition du cosinus d'un angle à partir du produit scalaire.
* équivalence entre les deux définitions suivantes :
  - f est dite affine si elle conserve les barycentres
  - f est dite affine s'il existe une application linéaire $\vec{f}$ tel que $\vec{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$.
* mesure algébrique.
* aire d'un triangle.
* formule de la médiane.
* configuration de Thalès.
* raisonnement par récurrence.

---

**Cadre :** On se place dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$. On notera $\vec{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$.

## I) PROJECTION ORTHOGONALE SUR UNE DROITE DU PLAN ET PROJECTION VECTORIELLE ASSOCIÉE.

**définition 1** Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. On appelle projection orthogonale sur $\mathcal{D}$ l'application $p : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $M \mapsto M'$ où $M'$ est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par $M$.
On dit alors que $M'$ est le projeté orthogonal de $M$ sur $\mathcal{D}$.




Sauf indication contraire, p désignera la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$ tout au long de la leçon.

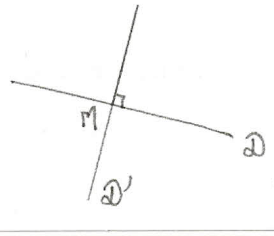
**propriétés 1** a) $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points fixes de p.

b) $p \circ p = p$ (ie: p est idempotente)

c) Soit $M \in \mathcal{P}$ alors:
si $M \notin \mathcal{D}$ $p^{-1}(M) = \emptyset$
si $M \in \mathcal{D}$ $p^{-1}(M)$ est la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par $M$.

**preuve c).** Soit $M \in \mathcal{P}$.
Par déf : $p^{-1}(M) = \{N \in \mathcal{P} \mid p(N) = M\}$

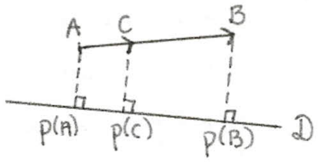
* $p(N) = M \Rightarrow M \in \mathcal{D}$ (par def du projeté orthogonal) d'où
$M \notin \mathcal{D} \Rightarrow p(N) \neq M \ \forall N \in \mathcal{P}$ donc $N \notin p^{-1}(M)$ càd $p^{-1}(M) = \emptyset$.
* si $M \in \mathcal{D}$ $M$ est l'intersection de $\mathcal{D}$ avec la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par $M$, notons-là $\mathcal{D}'$. On a alors $N \in \mathcal{D}'$.
$p(N) = M \ \forall N \in \mathcal{D}'$
On a donc montré que $p^{-1}(M) = \mathcal{D}'$



Théorème 1 — Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes de $\mathcal{P}$ et $p$ la projection orthogonale sur $\mathcal{D}'$.

$$p(\mathcal{D}) = \begin{cases} \mathcal{D}' & \text{si } \mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ non perpendiculaires} \\ \mathcal{D}\cap\mathcal{D}' & \text{si } \mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ perpendiculaires.} \end{cases}$$

propriété 2. — Soient $k \in \mathbb{R}$, $A, B, C \in \mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{p(A)p(B)} = k\,\overrightarrow{p(A)p(C)}$




propriété 3. — $p$ conserve les barycentres :
Soit $G = \text{bar}\{(M_1,\alpha_1), \dots, (M_n, \alpha_n)\}$ avec $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$ alors
$p(G) = \text{bar}\{(p(M_1),\alpha_1) \dots\dots (p(M_n),\alpha_n)\}$

Conséquence : — $p$ est une application affine donc il existe une application linéaire $\pi : \vec{\mathcal{P}} \to \vec{\mathcal{P}}$ vérifiant $\pi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{p(A)p(B)}$

définition 2. — $\pi$ ainsi définie est appelée projection vectorielle associée à $p$.

remarque : — $\pi \circ \pi = \pi$ ) oral

## II) APPLICATIONS

### 1/ Calcul de distance.

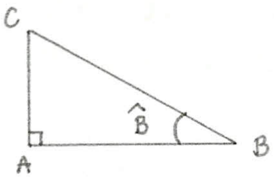
proposition 1 — Soit $M \in \mathcal{P}$. $\mathcal{D} \in \mathcal{P}$.
Il existe un unique point $P \in \mathcal{D}$ tel que $MP$ soit minimale.
$P$ est le projeté orthogonal de $M$ sur $\mathcal{D}$.

$Mp(M)$ est la distance de $M$ à $\mathcal{D}$ notée $d(M,\mathcal{D})$

proposition 2 — Soient $M \in \mathcal{P}$, $A \in \mathcal{D}$ et $\vec{u}$ un vecteur normal à $\mathcal{D}$ alors $d(M,\mathcal{D}) = \dfrac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}|}{\|\vec{u}\|}$.

transparent : — exercice.

### 2/ Calcul d'angle.




proposition 3 — Soit $ABC$ un triangle rectangle en $A$ (où $\hat{B}$ est la mesure de l'angle géométrique comprise entre $0$ et $\pi/2$) oral.
alors $\cos\hat{B} = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ $\quad\sin\hat{B} = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$

preuve ($\cos\hat{B}$) : — $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BA.BC.\cos\hat{B}$ (1) soit $p$ la projection orthogonale sur $(AB)$
(1) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{Bp(C)} + \overrightarrow{p(C)C}) = BA.BC.\cos\hat{B}$. or $p(C) = A$ d'où
Chasles
(1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA} = BA.BC.\cos\hat{B} \Rightarrow \cos\hat{B} = \dfrac{AB}{BC}$.

## 3/ Optimisation

transparent : exercices 1 et 2.

exercice 1 : solution.

Soit $I = m[AB]$

La formule de la médiane nous donne : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.

AB étant fixe, $MA^2 + MB^2$ sera minimale lorsque $MI^2$ le sera également.

Et puisque $MI$ est une distance (donc à valeur $\geqslant 0$) :

$MI^2$ minimale $\Leftrightarrow$ $MI$ minimale.

D'après la proposition 1 : M est le projeté orthogonal de I sur $\mathcal{D}$

---

## COMPLEMENTS

### 1/ Démonstrations

propriétés 1.

a) Soit $M \in \mathcal{D}$.

Notons $\mathcal{D}'$ la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par M. Soit $M' = p(M)$

alors $\{M'\} = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{M\}$ donc $\forall M \in \mathcal{D}$ $p(M) = M$.

conclusion : $p(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$.

b) Soit $M \in \mathcal{P}$.

$p \circ p(M) \underset{(1)}{=} p(M')$ où $M' \underset{(2)}{=} p(M)$ on a $M' \in \mathcal{D}$ et d'après a) $p(M') \underset{(3)}{=} M'$

d'où $p \circ p(M) \underset{(1)}{=} p(M') \underset{(3)}{=} M' \underset{(2)}{=} p(M)$. cqfd.

théorème 1.

* si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ non perpendiculaires.

- soit $M \in \mathcal{D}$ quelconque. par def $p_{\mathcal{D}'}(M) \in \mathcal{D}'$ donc $p_{\mathcal{D}'}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}'$
- Soit $M' \in \mathcal{D}'$. Il existe une unique droite perpendiculaire à $\mathcal{D}'$ passant par $M'$. Posons M l'intersection de cette droite avec $\mathcal{D}$, alors $p_{\mathcal{D}'}(M) = M'$ donc $M' \in p_{\mathcal{D}'}(\mathcal{D})$ d'où $\mathcal{D}' \subset p_{\mathcal{D}'}(\mathcal{D})$

On a montré que $p_{\mathcal{D}'}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$.

* si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ perpendiculaires.

soit $\{H\} = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$.

$\forall M \in \mathcal{D}$ $(MH) \perp \mathcal{D}'$ puisque $H \in \mathcal{D}'$

on a alors $\forall M \in \mathcal{D}$ $p_{\mathcal{D}'}(M) = H$

propriété 2.

$\vec{AB} = k\vec{AC} \Leftrightarrow A, B, C$ alignés.

si $(AB) \perp \mathcal{D}$ $p(A) = p(B) = p(C)$. trivial

si $(AB) \not\perp \mathcal{D}$ on a une configuration de Thalès, à savoir :

- A, B, C alignés
- $p(A), p(B), p(C)$ alignés (puisqu'ils appartiennent tous à $\mathcal{D}$)
- $(Ap(A))$, $(Bp(B))$ et $(Cp(C))$ sont parallèles (car tte perpendiculaires à $\mathcal{D}$)

Par le Théorème de Thalès on a : $\frac{AB}{AC} = \frac{p(A)p(B)}{p(A)p(C)} = k$

d'où $\overrightarrow{p(A)p(B)} = k\,\overrightarrow{p(A)p(C)}$

propriété 3 : se montre par récurrence sur $n$.

* initialisation :

Soit $G = \text{bar}\{(M_1,\alpha_1)(M_2,\alpha_2)\}$ avec $\alpha_1+\alpha_2 \neq 0$

On a alors $\overrightarrow{M_1G} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\overrightarrow{M_1M_2}$

d'où $\overrightarrow{p(M_1)p(G)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\overrightarrow{p(M_1)p(M_2)}$ (d'après la prop 2)

$\underset{\text{Chasles}}{\iff} \overrightarrow{p(M_1)M} + \overrightarrow{Mp(G)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\left(\overrightarrow{p(M_1)M} + \overrightarrow{Mp(M_2)}\right)$

$\iff (\alpha_1+\alpha_2)\overrightarrow{Mp(G)} = (\cancel{\alpha_2}-\alpha_1-\cancel{\alpha_2})\overrightarrow{p(M_1)M} + \alpha_2\overrightarrow{Mp(M_2)}$

$\iff (\alpha_1+\alpha_2)\overrightarrow{Mp(G)} = \alpha_1\overrightarrow{Mp(M_1)} + \alpha_2\overrightarrow{Mp(M_2)}$

$\iff p(G) = \text{bar}\{(p(M_1),\alpha_1);(p(M_2),\alpha_2)\}$

* hérédité : (le cas général se ramène au cas où $n=2$). Supposons que :

$\mathcal{P}_n : \left(G = \text{bar}\{(M_1,\alpha_1),\dots,(M_n,\alpha_n)\} \text{ avec } \Sigma\alpha_i \neq 0 \Rightarrow p(G) = \text{bar}\{(p(M_1),\alpha_1),\dots,(p(M_n),\alpha_n)\}\right)$

soit vrai au rang $n$. Montrons-le au rang $n+1$.

Soit $G_1 = \text{bar}\{(M_1,\alpha_1)\dots(M_n,\alpha_n)(M_{n+1},\alpha_{n+1})\}$ avec $\Sigma\alpha_i \neq 0$

par associativité du barycentre :

$G_1 = \text{bar}\{(G,\alpha_1+\dots+\alpha_n)(M_{n+1},\alpha_{n+1})\}$

càd $\overrightarrow{GG_1} = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_1+\dots+\alpha_n+\alpha_{n+1}}\overrightarrow{GM_{n+1}}$.

d'après la prop 2 : $\overrightarrow{p(G)p(G_1)} = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_1+\dots+\alpha_n+\alpha_{n+1}}\overrightarrow{p(G)p(M_{n+1})}$.

$\iff (\alpha_1+\dots+\alpha_n+\alpha_{n+1})\left(\overrightarrow{p(G)M} + \overrightarrow{Mp(G_1)}\right) = \alpha_{n+1}\left(\overrightarrow{p(G)M} + \overrightarrow{Mp(M_{n+1})}\right)$

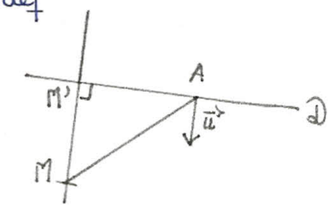
$\iff (\alpha_1+\dots+\alpha_n+\alpha_{n+1})\overrightarrow{Mp(G_1)} = -(\alpha_1+\dots+\alpha_n)\overrightarrow{p(G)M} + \alpha_{n+1}\overrightarrow{Mp(M_{n+1})}$

$\iff (\alpha_1+\dots+\alpha_n+\alpha_{n+1})\overrightarrow{Mp(G_1)} = (\alpha_1+\dots+\alpha_n)\overrightarrow{Mp(G)} + \alpha_{n+1}\overrightarrow{Mp(M_{n+1})}$

$\underset{\text{HR}}{\iff} (\alpha_1+\dots+\alpha_{n+1})\overrightarrow{Mp(G_1)} = \alpha_1\overrightarrow{Mp(M_1)} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{Mp(M_n)} + \alpha_{n+1}\overrightarrow{Mp(M_{n+1})}$

$\iff p(G_1) = \text{bar}\{(p(M_1),\alpha_1)\dots(p(M_{n+1}),\alpha_{n+1})\}$. cqfd.

remarque : $\Pi\circ\Pi(\overrightarrow{AB}) \underset{\text{def}}{=} \Pi(\overrightarrow{p(A)p(B)}) \underset{\text{def}}{=} \overrightarrow{p(p(A))p(p(B))} \underset{\substack{\text{car}\\ p\circ p=p}}{=} \overrightarrow{p(A)p(B)} \underset{\text{def}}{=} \Pi(\overrightarrow{AB})$.




proposition 2 : Le vecteur $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est unitaire et colinéaire à $\overrightarrow{M'M}$

donc $\overrightarrow{M'M} = \overline{M'M}\,\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$.

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{M'M} = \frac{\overline{M'M}}{\|\vec{u}\|} \times \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}$ (1)

or $\overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{M'M} = (\overrightarrow{AM'}+\overrightarrow{M'M}).\overrightarrow{M'M}$

Comme $\overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{M'M} = 0$ on a $\overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{M'M}.\overrightarrow{M'M} = M'M^2$ (2)

donc (1) et (2) donnent $M'M^2 = \overline{M'M} \times \dfrac{\overrightarrow{AM'}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$.

$\Rightarrow \overline{M'M} = \dfrac{\overrightarrow{AM'}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$

d'où $|\overline{M'M}| = d(M,\mathcal{D}) = \dfrac{|\overrightarrow{AM'}.\vec{u}|}{\|\vec{u}\|}$.

proposition 3.

$\sin\hat{B} = \sin(\pi-\hat{A}-\hat{C}) = \sin((\pi-\hat{C})-\hat{A})$

$\sin\hat{B} = \sin(\pi-\hat{C})\cos\hat{A} - \cos(\pi-\hat{C})\sin(\hat{A})$

$\sin\hat{B} = -\cos(\pi-\hat{C})$ $\left(\text{car } \hat{A} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases}\cos\hat{A} = 0\\ \sin\hat{A} = 1\end{cases}\right)$

$\sin\hat{B} = \cos\hat{C}$

or $\cos\hat{C} = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AC}{BC}$. d'où $\sin\hat{B} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$.

## 2/ Solutions exercices.

exercice.

calculer $d(M,\mathcal{D})$.

$\vec{n}(a,b)$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}$.

Soit $M(x_0,y_0) \in \mathcal{P}$ et $M' = p(M)$. $M'(x_1,y_1)$

$d(M,\mathcal{D}) = MM' = \dfrac{|\overrightarrow{M'M}.\vec{u}|}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$

or $M' \in \mathcal{D}$ d'où $ax_1+by_1+c = 0$

donc $d(M,\mathcal{D}) = \dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

exercice 2:

Soit $H = P_{(BD)}(A)$. On note $a = AB$ $b = BC$.

$\mathcal{A}_{ABCD} = 2\mathcal{A}_{ABD}$

et $\mathcal{A}_{ABD} = \dfrac{BD \times AH}{2}$

or [BD] est un diamètre du cercle (car ABD rectangle en A et $A, B, D \in \mathcal{C}$ implique que [BD] soit un diamètre) donc $\mathcal{A}_{ABCD}$ est max pour AH max.

Soit $\theta = \widehat{AOH}$

$\sin\theta = \dfrac{AH}{AO} = \dfrac{AH}{r}$ ($r$ = rayon du cercle) $\Rightarrow AH = r\sin\theta$

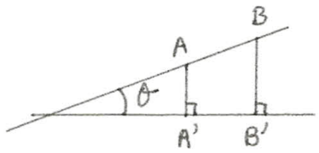
donc $\mathcal{A}_{ABCD}$ est max pour $\sin\theta$ max càd $\sin\theta = 1 \iff \theta = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

ce qui signifie que $O = H$.

ABCD est alors un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires c'est donc un carré.

3/ remarques.

* Les deux points de la preuve c) (propriétés 1) montrent respectivement que p n'est ni surjective ni injective.
* p n'est pas une isométrie puisqu'elle ne conserve pas les distances.




$A' = p(A)$
$B' = p(B)$

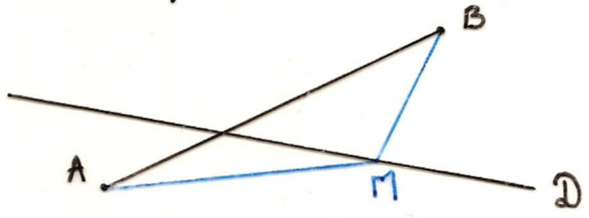
$A'B' = |\cos\theta| AB$

* $\Pi$ est la projection vectorielle sur $\vec{D}$ parallèlement à $\vec{D}^{\perp}$.
* Pour la proposition 3 : On peut orienter le plan de sorte que ABC soit direct ce qui permet d'avoir l'égalité $\hat{B} = (\vec{BC}, \vec{BA})$ entre la mesure principale d'angle orienté ($\in ]-\pi, \pi]$) et la mesure d'angle géométrique ($\in [0; \pi]$)

exercice : Exprimer $d(M, \mathcal{D})$ pour $\mathcal{D}$ d'équation :
$ax + by + c = 0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ et $M(x_0, y_0)$
en fonction de $a, b, c, x_0$ et $y_0$.

## 3. Optimisation

exercice 1 : Soient $A, B$ deux points distincts et $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$. Où doit-on placer le point $M$ sur $\mathcal{D}$ pour que $MA^2 + MB^2$ soit minimale ?




exercice 2 : Soit $ABCD$ un rectangle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$. Comment doivent-être placés $A, B, C$ et $D$ pour que l'aire de $ABCD$ soit maximale ?