Leçon 23 Droites et plans dans l'espace
Positions relatives ; plans contenant une droite donnée

Pré-requis

Famille liée
Vecteurs colinéaires
Notion d'algèbre linéaire.

Cadre

$\mathcal{E}$ l'espace affine et $\vec{\mathcal{E}}$ l'espace vectoriel associé.
On muni $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

I Droites et plans dans l'espace

1) Droites.

définition

On appelle droite, toute partie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$ telle qu'il existe $A \in \mathcal{E}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$ vérifiant

$$\mathcal{D} = \{ M \in \mathcal{E} \,/\, \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{AM} = \lambda \vec{u} \}$$

On note $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\vec{u}$ est appelé vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Théorème

Soient $A, B \in \mathcal{E}$, $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E} \setminus \{\vec{0}\}$

$$\mathcal{D}(A, \vec{u}) = \mathcal{D}(B, \vec{v}) \iff \begin{cases} A \in \mathcal{D}(B, \vec{v}) \\ (\vec{u}, \vec{v}) \text{ lié} \end{cases}$$

démo

$\Rightarrow$ $A \in \mathcal{D}(B, \vec{v})$ évident.

$A \in \mathcal{D}(B, \vec{v})$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\overrightarrow{BA} = \lambda \vec{v}$.

Soit $M \in \mathcal{D}(A, \vec{u})$, $M \neq A$; $\exists \alpha \in \mathbb{R}^*$ tq $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}$

de plus $M \in \mathcal{D}(B, \vec{v})$; $\exists \beta \in \mathbb{R}$ tq $\overrightarrow{BM} = \beta \vec{v}$.

$\overrightarrow{BA} = \lambda \vec{v} = \beta \vec{v} - \alpha \vec{u} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}$

$(\lambda - \beta) \vec{v} + \alpha \vec{u} = \vec{0}$ $\qquad \alpha \neq 0$

$(\vec{u}, \vec{v})$ est un système lié.

$\Leftarrow$. $(\vec{u}, \vec{v})$ lié donc $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}$,

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ie $\exists k \in \mathbb{R}^*$ tq $\vec{u} = k \vec{v}$.

. $A \in \mathcal{D}(B, \vec{v})$ donc $\exists \gamma \in \mathbb{R}$ tq $\overrightarrow{BA} = \gamma \vec{v}$.

Soit $M \in \mathcal{D}(A, \vec{u})$; $M \neq A$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ tq $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$.

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \gamma \vec{v} + \lambda \vec{u} = \gamma \vec{v} + \lambda k \vec{v} = (\gamma + \lambda k) \vec{v}$.

donc $M \in \mathcal{D}(B, \vec{v})$

donc $\mathcal{D}(A, \vec{u}) \subset \mathcal{D}(B, \vec{v})$.

de même, on montre que $\mathcal{D}(B, \vec{v}) \subset \mathcal{D}(A, \vec{u})$

donc $\mathcal{D}(A, \vec{u}) = \mathcal{D}(B, \vec{v})$

Proposition (Postulat d'Euclide)

Une droite est déterminée par la donnée de deux points distincts.

démo Soient A et B, deux points distincts.

analyse

Si $\mathcal{D} = \mathcal{D}(O, \vec{u})$ est une droite passant par A et B, alors $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, \vec{AB})$ car $A \in \mathcal{D}(O, \vec{u})$ et $\vec{AB}$ colinéaire à $\vec{u}$.

synthèse

La droite $\mathcal{D}(A, \vec{AB})$ contient bien les points A et B.

Proposition

Soient $\mathcal{D}(A, \vec{u})$, $A(x_A, y_A, z_A)$ et $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$.

$$M(x,y,z) \in \mathcal{D}(A, \vec{u}) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } \begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha \\ y = y_A + \lambda\beta \\ z = z_A + \lambda\gamma \end{cases}$$

! Mettre cette partie si on l'utilise pour les démos

démo

$$M(x,y,z) \in \mathcal{D}(A, \vec{u}) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } \vec{AM} = \lambda \vec{u}$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } \begin{cases} x - x_A = \lambda\alpha \\ y - y_A = \lambda\beta \\ z - z_A = \lambda\gamma \end{cases}$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } \begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha \\ y = y_A + \lambda\beta \\ z = z_A + \lambda\gamma \end{cases}$$

Ce système est appelé représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

2) Plans.

définition

On appelle plan, toute partie $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ telle qu'il existe $A \in \mathcal{E}$ et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}} \setminus \{\vec{0}\}$ vérifiant $\mathcal{P} = \{ M \in \mathcal{E} \ / \ \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \}$

On note $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $\vec{u}, \vec{v}$ sont appelés vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.

Théorème

Soient $A, B \in \mathcal{E}$, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{s}, \vec{t} \in \vec{\mathcal{E}} \setminus \{\vec{0}\}$.
$\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires et $\vec{s}, \vec{t}$ non colinéaires.

$$\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v}) = \mathcal{P}(B, \vec{s}, \vec{t}) \iff \begin{cases} A \in \mathcal{P}(B, \vec{s}, \vec{t}) \\ \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Vect}(\vec{s}, \vec{t}) \end{cases}$$

démo $\Rightarrow$ Soit $\vec{\omega} \in \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$, $\exists (a, b) \in \mathbb{R}$ tq $\vec{\omega} = a\vec{u} + b\vec{v}$

soit $M \in \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ tq $\overrightarrow{AM} = \vec{\omega}$

or $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$

$\exists m, n \in \mathbb{R}$ tq $\overrightarrow{AB} = m\vec{s} + n\vec{t}$ (car $A \in P(B, \vec{s}, \vec{t})$)

$\exists p, q \in \mathbb{R}$ tq $BM = p\vec{s} + q\vec{t}$

donc $\overrightarrow{AM} = (m+p)\vec{s} + (n+q)\vec{t} \in \mathrm{Vect}(\vec{s}, \vec{t})$.

ie $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) \subset \mathrm{Vect}(\vec{s}, \vec{t})$

de même, on montre que $\mathrm{Vect}(\vec{s}, \vec{t}) \subset \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$

donc $\mathrm{Vect}(\vec{s}, \vec{t}) = \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

$\Leftarrow$ $A \in \mathcal{P}(B, \vec{s}, \vec{t})$; $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tq $\overrightarrow{BA} = a\vec{s} + b\vec{t}$.

$\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Vect}(\vec{s}, \vec{t})$

$\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $\vec{u} = \alpha\vec{s} + \beta\vec{t}$

$\exists\, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tq $\vec{v} = \gamma\vec{s} + \delta\vec{t}$

Soit $M \in \mathcal{P}(B, \vec{s}, \vec{t})$ $M \neq B$; $\exists\, k, l \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{BM} = k\vec{s} + l\vec{t}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = -a\vec{s} - b\vec{t} + k\vec{s} + l\vec{t}$

$= (k-a)\vec{s} + (l-b)\vec{t}$

$= \mathrm{fct}(\vec{u}, \vec{v})$ donc $M \in \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$.

donc $\mathcal{P}(B, \vec{s}, \vec{t}) \subset \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$

de même, on montre que $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v}) \subset \mathcal{P}(B, \vec{s}, \vec{t})$.

donc $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v}) = \mathcal{P}(B, \vec{s}, \vec{t})$.

Proposition

Un plan est déterminé par la donnée de 3 points non alignés

démo Soient A, B et C, 3 points non alignés.

analyse

Si $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ est un plan passant par A, B et C

alors $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ car $A \in \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, non colinéaires $\in \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

synthèse

Le plan $\mathcal{P}(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ contient bien les points A, B et C.

Proposition

Mettre cette partie si on l'utilise pour les démos.

Soient $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$, $A(x_A, y_A, z_A)$ et $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$; $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$

$$M(x,y,z) \in \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v}) \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tq } \begin{cases} x = x_A + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_A + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_A + \lambda u_3 + \mu v_3 . \end{cases}$$

démo

$$M(x,y,z) \in \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v}) \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tq } \vec{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

$$\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tq } \begin{cases} x - x_A = \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y - y_A = \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z - z_A = \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

$$\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tq } \begin{cases} x = x_A + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_A + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_A + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Ce système est appelé représentation paramétrique de $\mathcal{P}$.

Proposition

① Soit $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$, $A \in \mathcal{E}$, $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$ (\vec{u} et \vec{v} non colinéaires),
alors il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ tq
$M(x,y,z) \in \mathcal{P} \iff ax + by + cz + d = 0$.

② Réciproquement, si $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$
alors $\{M \in E \,/\, ax + by + cz + d = 0\}$ est un plan de E

démo

- $M \in \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$, $M \neq A \iff (\vec{AM}, \vec{u}, \vec{v})$ sont liés

$$\iff \begin{vmatrix} x - x_A & u_1 & v_1 \\ y - y_A & u_2 & v_2 \\ z - z_A & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \iff (x - x_A)(u_2 v_3 - v_2 u_3) - (y - y_A)(u_1 v_3 - u_3 v_1) + (z - z_A)(u_1 v_2 - v_1 u_2) = 0$$

$\iff$ équation du type $ax + by + cz + d = 0$
$(a,b,c) \neq (0,0,0)$ car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

• Soit $\{M \in \mathcal{E} \,/\, ax+by+cz+d=0\}$. $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

supposons $a \neq 0$; $x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a}$

on pose $y = \lambda$ et $z = \mu$ et on obtient $\begin{cases} x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a} \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{b}{a}\lambda - \frac{c}{a}\mu - \frac{d}{a} \\ y = \lambda \\ z = \mu. \end{cases}$

$\mathcal{P}\left(\begin{pmatrix} d/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

L'équation $ax+by+cz+d=0$ est appelée équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

proposition

$\mathcal{P}_1 : a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ et $\mathcal{P}_2 : a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ définissent le même plan ssi $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $(a_1,b_1,c_1,d_1) = k(a_2,b_2,c_2,d_2)$.

II Positions relatives...

1) ... de 2 droites

définition

2 droites $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}(B, \vec{v})$ sont dites parallèles si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

On note $\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_2$

définition

2 droites sont dites coplanaires si elles sont incluses dans un même plan.

proposition

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{E}$

① Soit $\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_2$, alors $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires.

soit $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$

sinon $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$.

② Sinon $\mathcal{D}_1 \not\parallel \mathcal{D}_2$

si $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{I\}$, $I \in \mathcal{E}$ alors $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires.

sinon si $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset$ et alors $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont non coplanaires.

démo   Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$

① i) $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$

ii) soit $C \in \mathcal{D}_1$ tq $C \notin \mathcal{D}_2$;

$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}(C, \vec{u})$

$\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}(B, \vec{u})$ (car $\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_2$ => vecteur directeur colinéaires)

supposons $M \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$

$\vec{CM}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{BM}$ est colinéaire à $\vec{u}$

donc $\vec{BC}$ est colinéaire à $\vec{u}$

absurde (car implique $C \in \mathcal{D}(B, \vec{u}) = \mathcal{D}_2$). donc $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$

② i) si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes en $\{I\}$ alors $(I, \vec{u}, \vec{v})$ définit un repère d'un plan

($\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires)

donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires.

remarque: • Il ne peut pas y avoir plus d'un point d'intersection sinon $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$.

ii) démontrons la contraposée ie

$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ coplanaires => $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset$.

soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ tq $\mathcal{D}_1 \nparallel \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ coplanaires.

$(A, \vec{u}, \vec{v})$ définit un repère d'un plan ; $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $\vec{AB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

Soit $I \in \mathcal{E}$ tq $\vec{AI} = \alpha\vec{u}$ alors $\vec{BI} = -\beta\vec{v}$

donc $I \in \mathcal{D}_1$ et $I \in \mathcal{D}_2$ donc $I \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ donc $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset$.

2) ... d'une droite et d'un plan.

définition

Une droite $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A,\vec{u})$ et un plan $\mathcal{P} = \mathcal{P}(B,\vec{s},\vec{t})$, $(\vec{s},\vec{t})$ libre sont dits parallèles ssi $\vec{u} \in \mathrm{Vect}(\vec{s},\vec{t})$. On note $\mathcal{D} \parallel \mathcal{P}$

proposition

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$.

① Soit $\mathcal{D} \parallel \mathcal{P}$ alors ;
soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$
sinon $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$

② Soit $\mathcal{D} \not\parallel \mathcal{P}$ et alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{I\}$, $I \in \mathcal{E}$

démo

① i) $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$

ii) Soit $C \in \mathcal{D}$ tq $C \notin \mathcal{P}$

$\mathcal{D} = \mathcal{D}(C, \vec{u}) = \mathcal{D}(C, \alpha\vec{s} + \beta\vec{t})$ $\quad (\vec{u} \in \mathrm{Vect}(\vec{s},\vec{t}))$.

$\mathcal{P} = \mathcal{P}(B, \vec{s}, \vec{t})$

Supposons $M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P}$.

$\vec{CM}$ colinéaire à $\vec{u}$, $\in \mathrm{Vect}(\vec{s},\vec{t})$ et $\vec{BM}$ appartient à $\mathrm{Vect}(\vec{s},\vec{t})$.

donc $\vec{BC} \in \mathrm{Vect}(\vec{s},\vec{t})$

absurde (sinon $C \in \mathcal{P}(B,\vec{s},\vec{t}) = \mathcal{P}$) donc $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$.

② $\mathcal{D} \not\parallel \mathcal{P}$ donc $(A, \vec{u}, \vec{s}, \vec{t})$ définit un repère de l'espace

$\exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq $\vec{AB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{s} + \gamma\vec{t}$

Soit I tq $\vec{AI} = \alpha\vec{u}$ alors $\vec{BI} = -\beta\vec{s} - \gamma\vec{t}$; $I \in \mathcal{P}(B,\vec{s},\vec{t})$.

3)... 2 plans.

définition

2 plans $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}(B, \vec{s}, \vec{t})$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, $\vec{s}$ et $\vec{t}$ non colinéaires

sont dits parallèles si $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Vect}(\vec{s}, \vec{t})$.

proposition Soit $\mathcal{P}_i : a_i x + b_i y + c_i z + d = 0$ $i \in \{1, 2\}$; $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles ssi $\exists k \in \mathbb{R}^*$ tq $(a_1, b_1, c_1) = k(a_2, b_2, c_2)$

proposition.

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2 \in \mathcal{E}$.

① Soit $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$ alors
soit $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$
sinon $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$

② Soit $\mathcal{P}_1 \nparallel \mathcal{P}_2$ alors $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$

démo. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$

① i) $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$

ii) Soit $C \in \mathcal{P}_1$ tq $C \notin \mathcal{P}_2$

$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}(C, \vec{u}, \vec{v})$

$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}(B, \vec{u}, \vec{v})$ car $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Vect}(\vec{s}, \vec{t})$ puisque $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$.

supposons $M \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$

$\overrightarrow{CM} \in \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ et $\overrightarrow{BM} \in \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

donc $\overrightarrow{BC} \in \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$

absurde (car sinon $C \in \mathcal{P}(B, \vec{u}, \vec{v}) = \mathcal{P}_2$). donc $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$.

② supposons que $\vec{s}$ ne s'écrive pas comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{s})$ définit un repère de l'espace $\mathcal{E}$

Donc $\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}$ tq $\vec{AB} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{s}$

Soit $J \in \mathcal{E}$ tel que $\vec{AJ} = a\vec{u} + b\vec{v}$ alors $\vec{JB} = c\vec{s}$

i.e $J \in \mathcal{P}(B, \vec{s}, \vec{t})$.

D'autre part, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq $\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{s}$.

de plus pour tout point M de $\mathcal{P}_2$; $\vec{JM} = \lambda\vec{s} + \mu\vec{t}$ $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\vec{JM} = \lambda\vec{s} + \mu(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{s})$$
$$= (\lambda + \mu\gamma)\vec{s} + \alpha\mu\,\vec{u} + \mu\beta\vec{v}.$$

par conséquent $M \in \mathcal{P}_1 \iff \lambda + \mu\gamma = 0$

$\iff \lambda = -\mu\gamma$

donc $\vec{JM} = -\mu\gamma\vec{s} + \mu\vec{t} = \mu(-\gamma\vec{s} + \vec{t})$.

donc $P_1 \cap P_2 = \{M \in \mathcal{E} \,/\, \exists \mu \in \mathbb{R}$ tq $\vec{JM} = \mu(-\gamma\vec{s} + \vec{t})\}$

ie $P_1 \cap P_2$ est la droite définie par J et le vecteur directeur $-\gamma\vec{s} + \vec{t}$.

III Plans contenant une droite donnée.

D'après ce qui précède

On peut toujours se ramener au cas où $\mathcal{D}$ est définie par un système de 2 équations du plan non parallèles, i.e. $\mathcal{D}$ est définie par (S) $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$

où (a_1, b_1, c_1, d_1) et (a_2, b_2, c_2, d_2) ne sont pas colinéaires.

Notons P_1 et P_2, les deux plans définis par les équations de (S)

On remarque que P_1 et P_2 sont deux plans qui contiennent $\mathcal{D}$

Théorème.

Tout plan P contenant $\mathcal{D}$ à une équation de la forme

$$\lambda(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) + \mu(a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) = 0 \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Réciproquement, toute équation de la forme

$$\lambda(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) + \mu(a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) = 0 \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

définit un plan contenant $\mathcal{D}$.

démo $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, \vec{u})$, $\vec{u} \neq 0$

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda u_1 \\ y = y_A + \lambda u_2 \\ z = z_A + \lambda u_3 \end{cases}$$

supposons $u_1 \neq 0$

$$\iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{x - x_A}{u_1} \\ y = y_A + \dfrac{x - x_A}{u_1} u_2 \\ z = z_A + \dfrac{x - x_A}{u_1} u_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{x - x_A}{u} \\ (y - y_A) u_1 = (x - x_A) u_2 \\ (z - z_A) u_1 = (x - x_A) u_3 \end{cases} \iff \begin{cases} u_2 x - u_1 y + (u_1 y_A - u_2 x_A) = 0 \\ u_3 x - u_1 z + (u_1 z_A - u_3 x_A) = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{D}$ peut être considéré comme l'intersection de 2 droites.