18

Interprétation géométrique des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par $f(z)=z+b$, $f(z)=az$ et $f(z)=\bar{z}$, où a et b appartiennent à $\mathbb{C}$, a non nul. Exemples d'applications à l'étude de configurations géométriques du plan.

pré-requis

nombre complexe (module, argument, affixe, conjugué)
définitions et propriétés des translations, réflexions, rotations et homothéties.
définition similitude direct (composée d'une rotation et d'une homothétie)
Pour les exercices : barycentres, nombre complexe j et écriture sous forme exponentielle.

Cadre :

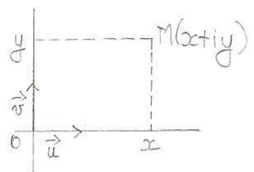
$\mathcal{P}$ plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
$\vec{\mathcal{P}}$ plan vectoriel associé.

Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z' \end{array}$

introduction

L'application $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{P} \\ z=x+iy \longmapsto M(x;y) \end{array}$ est bijective.

à tout nombre complexe on peut associer un point du plan et inversement donc $\mathcal{P}$ peut être identifié au corps $\mathbb{C}$ des complexes.

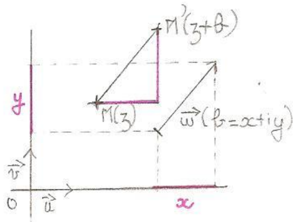


On notera $M(z)$ et $M'(z')$

I interprétation géométrique

proposition

Soit $b \in \mathbb{C}$. L'application $f : z \mapsto z+b$ est l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b. Réciproquement toute translation du plan admet une écriture de cette forme.

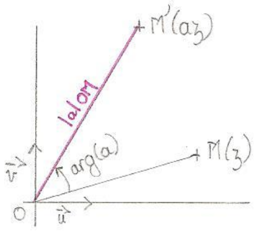


remarque

si $b=0$ $f=id$.

proposition

Soit $a \in \mathbb{C}$. L'application $f : z \mapsto az$ est l'écriture complexe de la similitude directe de centre O, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$ (2π). Réciproquement toute similitude directe de centre O, de rapport k $(\neq 0)$ et d'angle θ s'écrit sous la forme $f(z)=az$ où $a=|k|e^{i\theta}$.



démonstration

Soit $f : z \mapsto az$. On a $z' = az$.

si $z = 0$ alors $z' = 0$. Le point O est invariant par f.

si $z \neq 0$ alors :

$$\begin{cases} \dfrac{OM'}{OM} = \dfrac{|az|}{|z|} = |a| \\ \arg(z') = \arg(a) + \arg(z) \ (2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \arg(a) \ (2\pi) \\ OM' = |a| OM \end{cases}$$

donc f est la composée de l'homothétie de centre O et de rapport $|a|$ avec la rotation de centre O et d'angle $\arg(a)$ (2π).

f est donc une similitude directe de centre O, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$ (2π)

remarques

si $a = 1$ f est l'identité

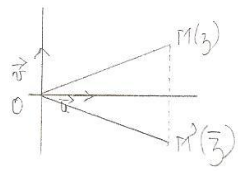
si $a = -1$ f est la symétrie de centre O.

si $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\}$ f est l'homothétie de centre O et de rapport a

si $|a| = 1$ f est la rotation de centre O et d'angle $\arg(a)$ (2π)

proposition

L'application $f : z \mapsto \bar{z}$ est l'écriture complexe de la réflexion d'axe $(O, \vec{u})$



remarque

Par ces applications on peut retrouver des résultats déjà connus des transformations que l'on a reconnu comme l'ensemble des points fixes ou encore les transformations réciproques. } oral

Par exemple soit F l'ensemble des points fixes de la réflexion d'axe $(O, \vec{u})$.

$F = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z} \}$, en posant $z = x + iy$ on a $F = \left\{ z = x + iy \mid \begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases} \right\}$ autrement dit F est l'axe des réels.

De même on retrouve l'involutivité de f :

$z' = \bar{z} \iff \bar{z'} = z$ donc $f^{-1} : z' \mapsto \bar{z'}$ càd que $f = f^{-1}$.

exercice

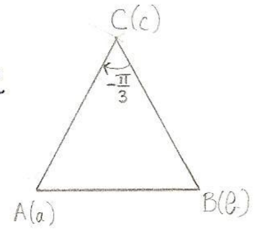
transparent. (nature de $f : z \mapsto az + b$)

II Applications

Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan d'affixes respectives a, b, c, d.

① triangle équilatéral.

Théorème Le triangle ABC est équilatéral direct ssi $a + bj + cj^2 = 0$



démonstration ABC équilatéral direct

$\iff$ A image de B par la rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de centre C

$\iff a - c = e^{-i\pi/3}(b - j) = -j(b - c)$ (car $e^{-i\pi/3} = -j$)

$\iff a + c(-j-1) + bj = 0$

$\iff a + bj + cj^2 = 0$ (car $j^2 = -j-1$)

Théorème de Napoléon (transparent)

démonstration (PQR équilatéral direct)

Soit r la rotation de centre P et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ $r(c) = B$ donc $b - cz_P = j(c - z_P)$

càd $z_P = \frac{b - jc}{1 - j}$

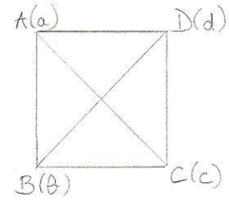
Puisque les sommets des triangles jouent des rôles symétriques on trouve:

$z_Q = \frac{c - ja}{1 - j}$ et $z_R = \frac{a - jb}{1 - j}$.

$$z_P + j z_Q + j^2 z_R = \frac{b - jc + j(c - ja) + j^2(a - jb)}{1 - j} = \frac{b - b - jc + jc - j^2a + j^2a}{1 - j} = 0$$

donc PQR est équilatéral direct.

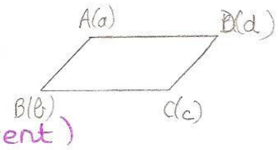
②. carré



propriété ABCD est un carré de sens direct ssi $\begin{cases} a - c = i(d - b) \\ d - a = c - b \end{cases}$

exercice un triangle et deux carrés (transparent)

③ parallélogramme



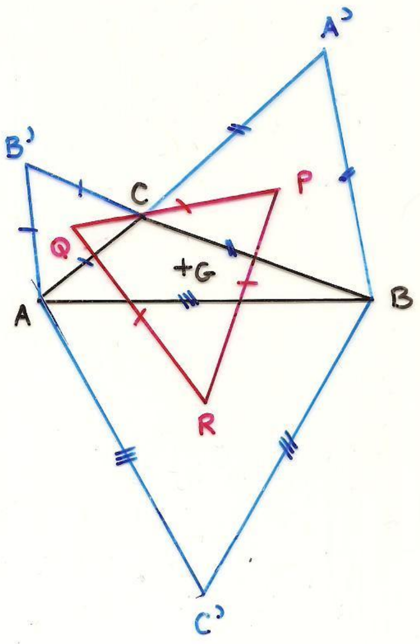
propriété ABCD est un parallélogramme ssi $d - a = c - b$

exercice parallélogramme et quatre carrés. (transparent)

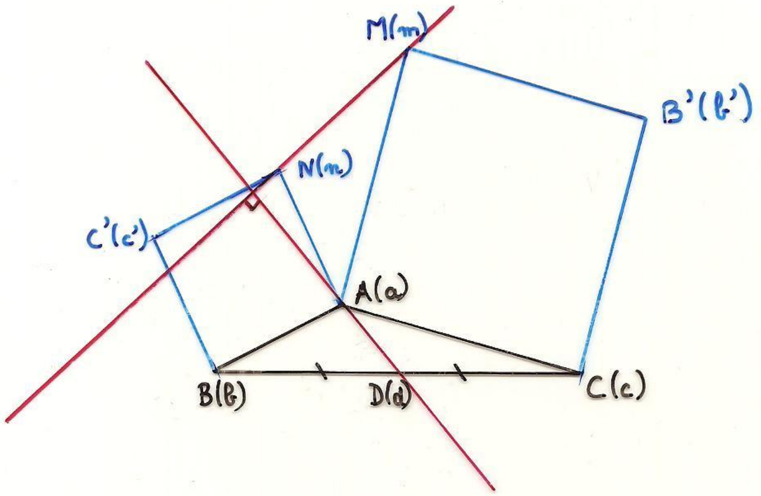
<u>exercice</u> : Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\} \times \mathbb{C}$. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto az + b$

Montrer que f est la similitude directe de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)\ (2\pi)$.

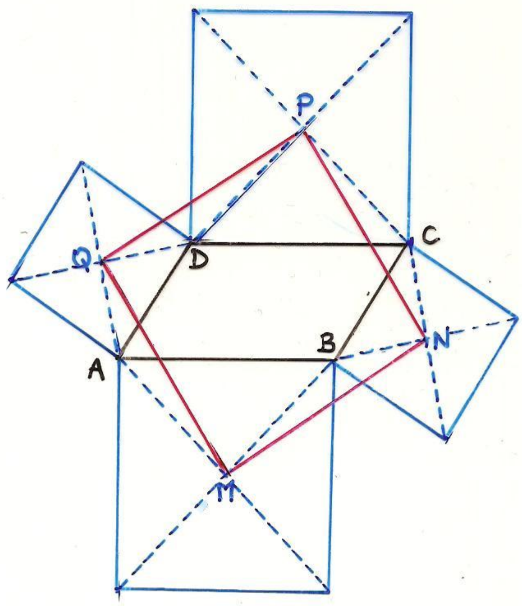
<u>Théorème de Napoléon</u> : Soit ABC un triangle direct quelconque. On construit les triangles équilatéraux directs CBA', ACB' et BAC' de centres de gravité respectifs P, Q et R. Montrer que PQR est un triangle équilatéral direct et que ABC et PQR ont même centre de gravité G.



Exercice : Soit ABC un triangle direct quelconque.
On construit les carrés directs ACB'M et BANC'.
Soit D le milieu de [BC], montrer que (AD) et (MN) sont perpendiculaires et que MN = 2 AD.



Exercice : Soit ABCD un parallélogramme de sens direct.
On construit extérieurement à ABCD quatre carrés de côtés AB, BC, CD et AD de centres respectifs M, N, P et Q.
Montrer que MNPQ est un carré de sens direct.



DEMONSTRATIONS

proposition

$f : z \mapsto z + b$.

soient $\vec{w}$ le vecteur d'affixe b et $t_{\vec{w}}$ la translation de vecteur $\vec{w}$.

$\forall z \in \mathbb{C} \quad z' = z + b \iff \forall z \in \mathbb{C} \quad z' - z = b \iff \forall M(z) \quad \overrightarrow{MM'} = \vec{w}$

$\iff \forall M(z) \quad t_{\vec{w}}(M) = M'$.

proposition

$f : z \mapsto az$

réciproque : soit s la similitude directe de centre O de rapport k et d'angle θ (2π)

puisque s conserve le rapport des distances et les angles orientés alors

$$\forall M(\neq O) \quad s(M) = M' \Rightarrow \begin{cases} OM' = |k| \, OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \ (2\pi) \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{d'où } (*) \Rightarrow \begin{cases} |z'| = |k||z| \\ \arg(z') = \arg(z) + \theta \ (2\pi) \end{cases}$$

or $z' = |z'| e^{i\arg(z')}$ donc $z' = |k||z| e^{i\arg(z)} e^{i\theta} = |k| e^{i\theta} z$ $\forall z \neq 0$ donc s a pour écriture complexe $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \longmapsto |k| e^{i\theta} z$

De plus $s(0) = 0$.

En posant $a = |k| e^{i\theta}$:

s a pour écriture complexe : $z \mapsto az$.

proposition

$f : z \mapsto \bar{z}$

Soit $M(z)$ tq $z = a + ib$.

$z' = \bar{z} = a - ib$.

soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe $(O, \vec{u})$ alors H a pour affixe a

donc $\overrightarrow{MH}$ a pour affixe $-ib$.

or $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $-2ib$ donc $2\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MM'}$ càd que H est le milieu du segment $[MM']$ et puisque H appartient à l'axe $(O, \vec{u})$ alors f est la réflexion d'axe $(O, \vec{u})$

exercice

nature de $f : z \mapsto az + b$.

$z = az + b \iff z = \dfrac{b}{1-a}$ $(a \neq 1)$

L'unique point invariant de f est Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.

$$z' = az + b \iff z' - \omega = az + b - \frac{b}{1-a} = az + \frac{b(1-a) - b}{1-a} = az - a \times \frac{b}{1-a} = a(z - \omega)$$

en posant $\begin{cases} Z = z - \omega \\ Z' = z' - \omega \end{cases}$ on a $Z' = aZ$ et d'après la proposition 2 f est la similitude

de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$ (2π).

(On a effectué une translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega O}$ d'affixe $-\omega$)

théorème de Napoléon.

(ABC et PQR ont même centre de gravité G)

On sait que : $z_P = \dfrac{b-jc}{1-j}$, $z_Q = \dfrac{c-ja}{1-j}$ et $z_R = \dfrac{a-jb}{1-j}$

$z_P + z_Q + z_R = a+b+c \quad (*)$

Soit $G = bar\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$ alors $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$ notons g l'affixe de G.

Soit $G' = bar\{(P,1)(Q,1)(R,1)\}$ alors $\vec{G'P}+\vec{G'Q}+\vec{G'R}=\vec{0}$ notons g' l'affixe de G'.

donc $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC} = \vec{G'P}+\vec{G'Q}+\vec{G'R}$.

$\Rightarrow a+b+c-3g = z_P+z_Q+z_R-3g'$

Par $(*)$ on conclut que $g=g'$ càd $G=G'$.

propriété carré.

ABCD carré de sens direct

(ABCD parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur = ABCD carré.)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AD} = \vec{BC} \\ (\vec{BD}, \vec{CA}) = \frac{\pi}{2} \ (2\pi) \\ CA = BD \end{cases}$$

(ABCD est un parallélogramme
(AC) et (BD) sont perpendiculaires $\oplus\frac{\pi}{2}$ sens direct.
diagonales de $\bar{m}$ longueur.)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d-a = c-b \\ \arg\left(\frac{a-c}{d-b}\right) = \frac{\pi}{2} \ (2\pi) \\ |a-c| = |d-b| \end{cases}$$

$d \neq b$ car $D \neq B$ et $a \neq c$ car $A \neq C$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d-a = c-b \\ \frac{a-c}{d-b} = \underbrace{\left|\frac{a-c}{d-b}\right|}_{=1} e^{i\pi/2} \end{cases} \quad d \neq b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d-a = c-b \\ \frac{a-c}{d-b} = i \end{cases} \quad d \neq b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d-a = c-b \\ a-c = i(d-b) \end{cases} \quad d \neq b.$$

exercice un triangle et deux carrés.

soit r la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$: $r(B) = N$ d'où $n-a = e^{-i\pi/2}(b-a)$

de même on trouve $m-a = e^{i\pi/2}(c-a)$ (rotat° de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$).

$n = a + i(a-b)$

$m = a + i(c-a)$

$\vec{NM}$ a pour affixe $i(c+b-2a)$

or $i(c+b-2a) = 2i(d-a)$ $\left(\text{car } D = m[BC] \Leftrightarrow d = \frac{b+c}{2} \Rightarrow \vec{AD} \text{ d'affixe } \frac{b+c-2a}{2}\right)$

donc $m-n = 2i(d-a) \Leftrightarrow m-n = 2e^{i\pi/2}(d-a)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{AD}, \vec{NM}) = \frac{\pi}{2} (2\pi) \\ |m-n| = 2|d-a| \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{AD}, \vec{NM}) = \frac{\pi}{2} (2\pi) \\ MN = 2AD \end{cases}$$

exercice

parallélogramme et quatre carrés.

Par des rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et centrées en P, Q, M et N on a :

$$\begin{cases} c-p = i(d-p) \\ d-q = i(a-q) \\ a-m = i(b-m) \\ b-n = i(c-n) \end{cases} \iff \begin{cases} p(i-1) = id-c \\ n(i-1) = ic-b \\ m(i-1) = ib-a \\ q(i-1) = ia-d \end{cases}$$

$(q-p)(i-1) = i(a-d)+c-d$ or $a-d = b-c$ et $c-d = b-a$

$(m-n)(i-1) = i(b-c)+b-a$ (car ABCD parallélogramme)

d'où $q-p = m-n$ (1)

De plus : $(m-p)(i-1) = i(b-d)+c-a$

$(n-q)(i-1) = i(c-a)+d-b = i(\,i(b-d)+c-a\,)$

d'où $i(m-p) = n-q$ (2)

(1) et (2) $\iff$ MNPQ carré de sens direct.

d'après prop carré.