<u>LECON 15</u> : <u>PGCD, égalité de Bézout</u>

(Diaporama)

Activité :* *Ecrire une liste de diviseurs *(Transmath 3ème – Activité 3 p 52)*
Madame Champ vient de recevoir un arrivage de 84 grandes marguerites et 48 roses. Elle souhaite répartir toutes ces fleurs dans des bouquets identiques.

a) Peut-elle faire 7 bouquets ? 3 bouquets ? Si oui, quelle est alors la composition de chaque bouquet ?
b) Ecrire la liste de tous les diviseurs de 48, puis la liste de tous les diviseurs de 84.
c) En déduire les nombres possibles de bouquets identiques que peut faire Madame Champ.
d) En fait, elle veut réaliser le nombre maximal de bouquets identiques.
Quel est ce nombre ? Quelle est la composition de chaque bouquet ?

<u>Rappel :</u>
Soit a un entier. On dit que a est un multiple de b s'il existe un entier k tel que a=kb.
On dit aussi que b est un diviseur de a.

I) <u>Diviseurs communs de deux entiers</u>

1 – <u>Diviseurs communs à deux nombres entiers</u>

<u>Propriété 1 :</u>
Tout entier a non nul admet un nombre fini de diviseurs.

<u>Définition 1 :</u>
Si deux entiers a et b sont divisibles par un même entier d, on dit que d est un diviseur commun de a et b.

2 – <u>PGCD de deux nombres</u>

<u>Définition 2 :</u>
Le plus grand diviseur commun à deux entiers non nuls a et b est appelé PGCD de a et b. On le note PGCD(a,b).

<u>Propriété 2 :</u>
Le PGCD de deux entiers non nuls existe et est unique.

3 – <u>Nombres premiers</u>

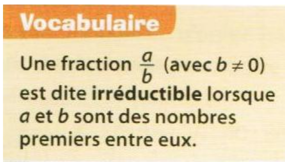
<u>Définition 3 :</u>
On dit que deux entiers naturels sont premiers entre eux lorsque leur PGCD est égal à 1.

(Diaporama)

<u>Application :</u> ***Rendre une fraction irréductible*** *(Transmath 3ème – Activité 6 p 53)*

Recopier et compléter :

$$\frac{42}{36} \underset{:2}{\overset{:2}{=}} \frac{\cdots}{\cdots} \underset{:3}{\overset{:3}{=}} \frac{\cdots}{\cdots}$$


Vocabulaire

Une fraction $\frac{a}{b}$ (avec $b \neq 0$) est dite **irréductible** lorsque a et b sont des nombres premiers entre eux.

Vérifier que la fraction est irréductible.
Par quel nombre faut-il diviser 42 et 36 pour obtenir directement cette fraction ?
Quel rôle joue ce nombre pour 42 et 36 ?

Exercice 1 : *Histoire (Myriade 3ème – Exercice 138 p 53)*

La galerie des glaces (ou Grande Galerie du Château de Versailles) est une grande pièce rectangulaire longue de 73,00 m, large de 10,50 m, éclairée par 17 fenêtres et décorée par 357 miroirs. Le conservateur du château décide de recarreler cette galerie avec des dalles de forme carrée. Il souhaite utiliser des dalles les plus grandes possible sans qu'aucune ne soit découpée.

a) Calculer la longueur du côté de la dalle carrée qu'il va choisir.
b) Combien de dalles devra t-il acheter ?

II) Algorithmes de calcul du PGCD

1 – Algorithme des soustractions successives *(3ème)*

Propriété 3 :
Soient a et b deux entiers naturels non nuls avec a > b, alors :
$$\mathrm{PGCD}(a,b) = \mathrm{PGCD}(b, a-b).$$

Exercice 2 :
Déterminer grâce au tableur le PGCD de 10 165 et 3 745 en utilisant l'algorithme des soustractions successives.

2 – Algortithme d'Euclide (Terme S spécialité)

Propriété 4 :
Soient a et b deux entiers non nuls avec a > b, alors :
$$\mathrm{PGCD}(a,b) = \mathrm{PGCD}(b,r)$$
où r désigne le reste de la division euclidienne de a par b.

Exercice 3 :
Programmer sous Algobox l'algorithme d'Euclide puis déterminer le PGCD de 10 165 et 3 745.

III) Egalité de Bézout *(Terme S spécialité)*

Identité de Bézout :
Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.
Si $d = \mathrm{PGCD}(a,b)$, alors il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = d$.

Théorème de Bézout :
Soient a et b deux entiers non nuls.
Les entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe des entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = 1$.

Ouverture : *équations diophantiennes*