Leçon 12 : Multiples, diviseurs et division euclidienne

Niveau : sixième – terminale L spécialité - terminale S spécialité

Prérequis : Notions sur les nombres entiers - Congruences

I – Activités sur la division euclidienne

Voici deux exemples d'exercices types permettant d'aborder la division euclidienne dans deux niveaux de classe différents.

En sixième :

Ce matin, le fleuriste a reçu 71 œillets et 97 iris. Il souhaite confectionner des bouquets contenant 4 œillets et 5 iris.

1.- Quel est le nombre maximal de bouquets qu'il pourra composer ?

2.- Combien restera-t-il d'œillets ? Combien restera-t-il d'iris ?

En terminale S spécialité :

On sait que le 1er janvier 2011 est un samedi. A partir de ce renseignement, on aimerait pouvoir déterminer le jour de la semaine de n'importe quelle date de l'année 2011.

On se propose de chercher quel jour de la semaine tombe le 1er mai.

a.- Combien de jours n s'écoulent entre le 01 janvier et le 01 mai ?

b.- Combien de semaines complètes se sont écoulées entre le 01 janvier et le 01 mai ? On note dans la suite ce nombre q.

c.- Quel est le nombre r de jours restant après ces q semaines pour atteindre la date du 1er mai ?

d.- Écrire n en fonction de q et r.

e.- Quel jour de la semaine est le 01 mai 2011 ?

I – Division euclidienne

Division euclidienne dans $\mathbb{N}$:

Soient a et b deux entiers naturels, b non nul.

Théorème : Il existe un unique couple (q,r) d'entiers naturels tels que : $a=b\times q+r$ avec $0\leqslant r<b$

Preuve :

Existence de q et de r :

Premier cas : si $a<b$ avec a et b deux entiers naturels, q=0 et r=a convient

Second cas : supposons $a\geqslant b$ avec a et b deux entiers naturels

Soit M l'ensemble des multiples de b strictement supérieurs à a.

2ba appartient à M car c'est un multiple de b strictement supérieur à a ($b\geqslant 1$ et $a\neq 0$) donc M n'est pas vide.

Toute partie non vide $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

M admet donc un plus petit élément (car M est un sous ensemble $\mathbb{N}$), c'est à dire un multiple de b, strictement supérieur à a tel que le multiple précédent soit inférieur ou égal à a. Il existe donc q tel que $q\times b\leqslant a<(q+1)\times b$. Comme $b\leqslant a$, $b\leqslant a<(q+1)b$ et donc $1<q+1$ car $b\neq 0$ d'où $q>0$. q est donc un entier naturel non nul.

Posons alors $r=a-q\times b$, comme a,b et q sont des entiers, r est un entier. De $q\times b\leqslant a$, on en déduit que r est un entier naturel et de $a<(q+1)b$, on déduit que $r<b$. On a donc trouvé deux entiers q et r tels que $a=b\times q+r$ avec $0\leqslant r<b$.

Unicité de q et r :

Supposons qu'il existe deux couples d'entiers (q,r) et (q',r') tels que $a=b\times q+r$ et $a=b\times q'+r'$ (1) avec $0\leqslant r<b$ et $0\leqslant r'<b$ (2)

De (1), on déduit que $b(q'-q)=r'-r$ ($), avec q'-q entier donc r'-r est un multiple de b.

De (2), on déduit que $-b<-r\leqslant 0$ donc $-b<r'-r<b$ donc r'-r est un multiple de b strictement compris entre -b et b. C'est donc 0 et par suite, r'=r.

En reportant dans ($), on obtient b(q'-q)=0 et comme $b\neq 0$, q'-q=0.

Le couple (q,r) est donc unique.

Définition : Effectuer la division euclidienne de a par b revient à déterminer q et r

Les entiers a,b,q et r sont appelés respectivement dividende, diviseur, quotient et reste de la division euclidienne de a par b.

Exercice : Écrire un algorithme permettant d'obtenir le quotient et le reste d'une division euclidienne (dans le cas où a et b sont des entiers naturels). Le tester sur algobox pour obtenir le quotient et le reste de la division euclidienne de 14398 par 24.

cf. fichier « Division euclidienne »

Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$:

Théorème : Il existe un unique couple (q,r) avec q entier relatif et r entier naturel tel que : $a=b\times q+r$ avec $0\leqslant r<|b|$

Preuve :

Premier cas : $a \geqslant 0 ; b > 0$: on a démontré qu'il existe un unique couple (q,r) d'entiers naturels tels que $a = b \times q + r$ et $0 \leqslant r < b = |b|$

Deuxième cas : $a \geqslant 0 ; b < 0$: il existe un unique couple d'entiers naturels tels que $a = |b| \times q + r$ avec $0 \leqslant r < |b|$ donc il existe un unique couple (-q,r) d'entiers tel que $a = b \times (-q) + r$ avec $0 \leqslant r < |b| = -b$

Troisième cas : $a \leqslant 0 ; b > 0$: il existe un unique couple (q,r) d'entiers naturels tels que $-a = b \times q + r$ avec $0 \leqslant r < b$. On a alors $a = -b \times q - r = b(-q-1) + b - r$

Or $r < b$ donc $b - r \geqslant 0$

De plus, si $0 < r$ alors $b - r < b$ et si $r = 0$ alors $a = b \times (-q)$

Dans ce cas, il existe un unique couple (-q-1, b-r) d'entiers tel que $a = b \times q + r$ avec $0 \leqslant r < b = |b|$

Quatrième cas : $a \leqslant 0 ; b < 0$: il existe un unique couple (q,r) d'entiers naturels tels que $-a = -b \times q + r$ avec $0 \leqslant r < |b| = -b$. On a alors $a = b \times q - r = b(q+1) - b - r$

Or $r < -b$ donc $-b - r > 0$

De plus, si $0 < r$ alors $-b - r < -b = |b|$ et si $r = 0$ alors $a = b \times q$

II – Multiples – Diviseurs

Soient a et b deux entiers relatifs, b non nul.

Définition : a est un multiple de b lorsque il existe un entier q tel que $a = b \times q$

Définition : Dire que a est un multiple de b revient à dire que a est divisible par b, que b est un diviseur de a, ou encore que b divise a.

Propriétés :

- si a divise b et b divise c, alors a divise c
- si a divise b et c, alors a divise toute combinaison linéaire mb + nc de b et c où m et n sont des entiers relatifs.

Preuve : si a divise b alors il existe un entier naturel k tel que b=ak. Si de plus b divise c, alors il existe un entier naturel k' tel que c=bk'. Ainsi, c=akk' avec kk' entier naturel donc a divise c.

si a divise b et c, alors il existe deux entiers naturels k et k' tels que b=ak et c=ak'. On a alors pour tous entiers m et n, on a mb + nc = amk + ank' = a(mk + nk') avec mk + nk' entier donc a divise mb + nc.

IV – Application

Dans le programme de Terminale L, il est indiqué que l'arithmétique peut s'appliquer « aux problèmes de divisibilité, et entre autres aux critères de divisibilité par 3, 4, 9 et 11 ».

Preuve des critères de divisibilité par 3, 4, 7, 9, 11

Pouvez-vous dire, sans effectuer de calculs, si le nombre 195 065 est divisible ou non par 5 ?
Si oui, vous avez utilisé ce que l'on appelle un critère de divisibilité par 5.

1 – Critère de divisibilité par 11

a – Montrer que, pour tout entier naturel non nul k, $10^k \equiv (-1)^k [11]$.

b – Prouver que tout entier naturel est congru à la somme alternée de ses chiffres modulo 11.

c – Énoncer un critère de divisibilité par 11.

d – Les nombres 425 612 et 415 781 sont ils multiples de 11 ?

2 -Critères à volonté

Cherchons par exemple un critère de divisibilité par 7. Pour cela, on examine les restes dans la division par 7 des puissances de 10 successives.

a – Compléter le tableau suivant :

10^k	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
Reste de la division de 10^k par 7									

b – Déterminer à l'aide du tableau si 689 243 157 est divisible par 7.

Exercice : On pourra également démontrer qu'un nombre est divisible :

- par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3
- par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4
- par 8 si et seulement si le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8.

Corrigé

Le chiffre des unités du nombre 195 065 est 5 donc 195 065 est divisible par 5.

1.a- On a $10 \equiv -1 [11]$ donc $10^k \equiv (-1)^k [11]$

1.b- Soit a = $\overline{an...a1a0}$ = a0 + a1 x 10 + a2 x 10^2 + … + an x 10^n

alors $a \equiv a0 + a1 \times 10 + a2 \times 10^2 + ... + an \times 10^n [11]$ donc

$a \equiv a0 + a1 \times (-1) + a2 \times (-1)^2 + ... + an \times (-1)^n [11]$ ou encore $a \equiv a0 - a1 + a2 - a3 ... [11]$ ce qui veut dire que a est congru à la somme alternée de ses chiffres.

1.c- Un nombre entier est divisible par 11 lorsque la somme alternée de ses chiffres est divisible par 11.

1.d- On a $2-1+6-5+2-4=0$ donc 425 612 est divisible par 11.

On a $1-8+7-5+1-4=-8$ donc 415 781 n'est pas divisible par 11.

2.a-

10^k	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
Reste de la division de 10^k par 7	1	3	2	6	4	5	1	3	2

2.b- $689\,244\,157=7+5\times10+1\times10^2+4\times10^3+4\times10^4+5\times10^5+9\times10^6+8\times10^7+6\times10^8$

donc $689\,244\,157\equiv7\times1+5\times3+1\times2+4\times6+4\times4+2\times5+9\times1+8\times3+6\times2[7]$

donc $689\,244\,157\equiv119[7]$

Or $119\equiv9\times1+1\times3+1\times2[7]$

donc $119\equiv14[7]$ ou encore $119\equiv0[7]$

Écriture en base b

L'écriture d'un nombre en base b faisant appel aux congruences, demande également l'utilisation de la division euclidienne et permet la mise en place d'algorithmes.

I- On se propose de démontrer qu'étant donné un entier naturel b, b>1, on peut écrire de manière unique tout entier naturel a sous la forme :
a = $\alpha\times b^n+\beta\times b^{n-1}+...+\delta\times b+\varepsilon$ où α, β, …, δ, ε sont des entiers naturels plus petits que b-1 et α est différent de 0.
On écrira a = $\overline{\alpha\beta...\delta\varepsilon}^b$ et on dira alors que a est écrit en base b.

1- Justifier que a peut s'écrire a = $bq_0 + a_0$ où $0 \leq a_0 < b$ et $q_0 < a$. Justifier que si $q_0 < b$, alors le problème est résolu.
2- Si $q_0 \geq b$, justifier que $q_0 = bq_1 + a_1$ où $0 \leq a_1 < b$ et $q_1 < q_0$. Justifier que si $q_1 < b$, alors le problème est résolu.
3- Si $q_1 \geq b$, on réitère le procédé. Justifier que le procédé s'arrête au bout d'un nombre fini d'itérations.
En déduire l'existence recherchée.
4- Démontrer l'unicité de l'écriture.
5- Comment détermine-t-on l'écriture en base b d'un nombre dont on connaît l'écriture en base 10 ? Justifier que 451 = $\overline{2031}^6$
6- A l'aide d'un tableur, mettre en place une méthode permettant de donner l'écriture en base b<10 d'un nombre a écrit en base 10.
Variante : Concevoir un programme qui donne l'écriture en base b<10 d'un nombre a écrit en base 10.

Corrigé :

1- L'existence du couple (q0, r0) est assurée par le théorème 1 de la leçon, on a alors r0<b et comme b>1, q0<a. Si q0<b, alors on a écrit a = $\delta\times b+\varepsilon$ où ε = r0, δ = q0 avec q0<b et r0<b par le théorème.

2- Idem qu'en 1.

3- A chaque itération, on obtient qi+1<qi et comme {q0, q1, …, qn} forme une partie de $\mathbb{N}$, elle admet un plus petit élément.

L'existence de l'écriture est ainsi montrée :

a = $b\times q0+r0=b\times(b\times q1+r)=b^2\times q1+b\times r1+r0=...=b^n\times rn+...+b\times r1+r0$

4- Supposons qu'il existe deux écritures de a : a = $\overline{\alpha\beta...\delta\varepsilon}^b = \overline{\lambda\eta...\theta\mu}^b$

Alors $b^n\times(\alpha-\lambda)+b^{n-1}\times(\beta-\eta)+...+b\times(\delta-\theta)+(\epsilon-\mu)=0$ où $-b<(\epsilon-\mu)<b$ et $(\epsilon-\mu)\in\mathbb{Z}$ donc $b^n\times(\alpha-\lambda)+b^{n-1}\times(\beta-\eta)+...+b\times(\delta-\theta)+(\epsilon-\mu)=0$ si et seulement si $(\epsilon-\mu)=0$. Ainsi de suite, on trouve que les deux écritures sont identiques.

5- 6- cf. « Base b »