72 Croissance comparée des fonctions réelles e^x, x^a, $ln(x)$ au voisinage de $+\infty$. Applications.

pré-requis :

- Fonctions exponentielles, logarithme népérien et puissance.
- Théorème des gendarmes
- Définition fonction classe $\mathscr{C}^\infty$

But : Dans cette leçon on cherche à comparer la vitesse de croissance des fonctions exponentielles, logarithme népérien et puissance.

A la calculatrice : $e^x, \ln(x), x^4$ et $x^{\frac{1}{4}}$ à première vue $x \mapsto e^x$ croît moins rapidement que $x \mapsto x^4$ de même $x \mapsto x^{\frac{1}{4}}$ à l'air de croître moins rapidement que $x \mapsto \ln(x)$ ($xmin = 0$, $xmax = 15$, $ymin = 0$, $ymax = 10$)

Pour se rendre compte un peu mieux de ce que l'on cherche à faire on va commencer par un exemple :

On considère la fonction $f(x) = \frac{x^{100}}{e^x}$ Le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers $+\infty$ donc nous sommes en présence d'une forme indéterminée.
à la calculatrice, les premières valeurs (entières) nous indiquent que cette fonction est croissante et atteint des valeurs très grandes rapidement (TBLSET: tblStart $= 0$, tbl $= 1$)

On peut conjecturer que cette fonction tend vers $+\infty$

Etudions ses variations : $f'(x) = \frac{(100-x)x^{99}}{e^x}$ donc f admet un maximum en $x = 100$ et décroît au-delà, puisque la limite n'est pas $+\infty$ essayons de voir à la calculatrice si on ne peut pas conjecturer une valeur :

(TBLSET : tblStart $=$ 100, tbl $= 1$) les valeurs sont très grandes, si on va voir un peu plus loin (TBLSET : tblStart $=$ 300, tbl $= 1$) les valeurs sont encore très grandes.

On remarque sur cet exemple qu'il est difficile de conjecturer la limite avec la calculatrice. Nous allons voir dans cette leçon comment on aurait pu affirmer sans calcul que cette limite est en fait nulle.

Pour pouvoir comparer ces fonctions nous avons besoin d'un outil de comparaison :

I. Relation de prépondérance

Définition : On dit que f est négligeable devant g ou que g est prépondérante devant f au voisinage de $+\infty$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage J de $+\infty$ tel que $|f(x)| \leqslant \varepsilon\, |g(x)|$ pour tout $x \in$J

En particulier si g ne s'annule pas sur son domaine de définition alors g est prépondérante devant f au voisinage de $+\infty$ si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Notation (dite de Hardy) : $f \ll g$ par abus de langage on notera par la suite $f(x) \ll g(x)$

Proposition : la relation de prépondérance est transitive

Exemple : soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$ alors $x^a \ll x^b$ au vois de $+\infty$

II. Croissances comparées.

1. Fonctions logarithme et puissance.

Théorème : Pour tout réel $a > 0$ $\ln x \ll x^a$ au vois de $+\infty$

Remarque : les cas a négatif ou nul ne nous intéressent pas puisqu'il ne s'agit pas de formes indéterminées, en effet lorsque $a < 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^a = 0$ et lorsque $a = 1$, $x^a = 1$.

Preuve : (On va chercher à démontrer que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^a}$ pour $a > 0$)

La fonction ln est concave , son graphe est situé en dessous de n'importe quelle tangente (faire dessin). En particulier en prenant la tangente en $x = 1$ on obtient la majoration suivante : $ln(x) \leqslant x-1 \quad \forall x > 0$

Donc $\forall u > 0 \quad ln(u) < u$

Pour $u = x^{\frac{a}{2}}$ avec $x > 0$ on a : $ln(x^{\frac{a}{2}}) < x^{\frac{a}{2}}$

C'est-à-dire que $\forall x > 0 \quad \frac{a}{2} ln(x) < x^{\frac{a}{2}}$

Donc $\forall x > 0 \; \frac{ln(x)}{x^a} < \frac{2}{a} x^{\frac{-1}{2}}$

De plus pour tout $x > 1 \quad 0 < \frac{ln(x)}{x^a}$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{a} x^{\frac{-1}{2}} = 0$

D'après le théorème des gendarmes $\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x^a} = 0$ ie : $ln(x) \ll x^a$ au vois de $+\infty$ ∎

Remarque : pour $a = 1$ ce résultat était déjà connu puisque la courbe représentative de ln admet une branche parabolique en $+\infty$ de direction $(O,\vec{\imath})$

On peut faire une généralisation :

Généralisation : pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$ $ln(x)^b \ll x^a$ au vois de $+\infty$

Remarque : On ne s'intéresse pas aux autres valeurs de a et b car il ne s'agit pas formes indéterminées sauf lorsque $a < 0$ et $b < 0$ mais dans ce cas on peut se ramener à celui étudié.

2. Fonctions exponentielle et puissance.

Théorème : Pour tout $a > 0$ $x^a \ll e^x$ au vois de $+\infty$

Remarque : (toujours pareil) on ne s'intéresse pas aux cas $a = 0$ et $a < 0$ car ce ne sont pas des formes indéterminées.

Si on revient à l'exemple de l'introduction pour $a = 100$ on a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{100}}{e^x} = 0$

Généralisation : Pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$ $x^a \ll e^{bx}$ au vois de $+\infty$

Remarque : une nouvelle fois, on restreint l'étude à $a > 0$ et $b > 0$ car les autres cas ne sont pas des formes indéterminées.

3. Bilan

On a démontré que pour tout $a > 0$ $\ln x \ll x^a \ll e^x$ au vois $+\infty$ et plus généralement :
$\forall a > 0$ $\forall b > 0$ $\forall c > 0$ $\ln(x)^b \ll x^a \ll e^{cx}$ au vois de $+\infty$

Remarque : il faut faire attention à ce que l'on peut voir à la calculatrice puisque finalement les conjectures faites en introduction étaient fausses. Par exemple si on reprend les exemples $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x^4$ c'est la fonction exponentielle qui croît plus vite, pour le voir il suffit de changer la fenêtre de la calculatrice ($xmin = 0$, $xmax = 10$, $ymin = 0$, $ymax = 10000$)

III. Applications.

1. Calcul de limites

Calculer $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\ln(x)}}{(\ln x)^x}$

$\forall x > 0$ $x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$ or $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc puisque $x \mapsto e^x$ est continue en 0, par composition des limites : $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = e^0 = 1$

A la calculatrice on peut conjecturer la limite de $\frac{x^{\ln(x)}}{(\ln x)^x}$:
($xmin = 1$, $xmax = 15$, $ymin = 0$, $ymax = 3$)

Il semble que la limite soit 0.

2. *ln* n'est pas une fonction rationnelle

Supposons par l'absurde que $ln\ x = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où

$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ avec $a_n \neq 0$

$Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_p x^p$ avec $b_p \neq 0$ $Q(x) \neq 0$

$$ln\ x = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_p x^p} = \frac{x^n\left(a_n + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)}{x^p\left(b_p + \cdots + \frac{b_1}{x^{p-1}} + \frac{b_0}{x^p}\right)}$$

or $lim_{x\to+\infty}\, a_n + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} = a_n$ et $lim_{x\to+\infty}\, b_p + \cdots + \frac{b_1}{x^{p-1}} + \frac{b_0}{x^p} = b_p$

d'où $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n\, a_n}{x^p\, b_p}$ (*)

On a alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x^{n-p}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p x^{n-p}} = \frac{a_n}{b_p} \neq 0$

or par croissance comparée puisque $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ alors d'après (*) $n > p$

donc $n\text{-}p > 0$ et alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x^{n-p}} = 0$ contradiction.

3. Une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$

Exercice : Soit $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$

1) Montrer que : $\forall x \neq 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ f^{(n)}(x) = F_n(x)\, e^{-1/x^2}$ où $F_n(x)$ est une fraction rationnelle.
2) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

DEMONSTRATIONS

I. Relation de prépondérance

Proposition : Soient f, g, h trois fonctions telles que $f \ll g$ et $g \ll h$ au vois de $+\infty$

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage J de $+\infty$ tel que $\forall x \in J$ $|f(x)| \leq \varepsilon\, |g(x)|$ de même pour tout $\varepsilon' > 0$ il existe un voisinage J' de $+\infty$ tel que $\forall x \in J'$ $|g(x)| \leq \varepsilon\, |h(x)|$

Pour tout $x \in J \cap J'$ on a $|f(x)| \leq \varepsilon\varepsilon'\, |h(x)|$ donc $f \ll h$.

II. Croissances comparées

1. ln et puissance

Généralisation : $\frac{ln(x)^b}{x^a} = \left(\frac{ln(x)}{x^{a/b}}\right)^b$

$\frac{a}{b} > 0$ donc d'après le théorème (comparaison entre ln et puissance) $lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x^{a/b}} = 0$

De plus la fonction $x \mapsto x^b$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc par composition des limites $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)^b}{x^a} = 0$ ie : $ln(x)^b \ll x^a$

2. exp et puissance

Théorème : $\frac{x^a}{e^x} = e^{aln(x)-x} = e^{x\left(a\frac{ln x}{x}-1\right)}$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^a}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

Généralisation: $\frac{x^a}{e^{bx}} = e^{aln(x)-bx} = e^{x\left(a\frac{ln x}{x}-b\right)}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-bx} = 0$ car $b > 0$

3. bilan

Bilan : se déduit par transitivé de la relation de prépondérance .

III. Applications

1. Calcul de limites

Calcul de : $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\ln(x)}}{(ln\, x)^x}$

$$\frac{x^{\ln(x)}}{(ln\, x)^x} = \left(\frac{x^{\ln(x)/x}}{\ln(x)}\right)^x = e^{x\left(\ln\left(x^{\ln(x)/x}\right)-\ln(ln(x))\right)} = e^{x\left(\ln\left(e^{\ln^2(x)/x}\right)-\ln(ln(x))\right)}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} ln^2(x)/x = 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to+\infty} e^{ln^2(x)/x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(e^{ln^2(x)/x}\right) = 0$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(ln(x)) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln\left(e^{ln^2(x)/x}\right) - \ln(ln(x))\right) = -\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{\ln(x)}}{(ln\, x)^x} = 0$

3. une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$$

On a besoin du <u>théorème de prolongement $\mathscr{C}^{\,1}$</u> (qui se généralise à $\mathscr{C}^{\,n}$)

(à mettre en pré-requis)

> Soit I un intervalle ouvert et $a \in$ I.
> Si f :I $\mapsto \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur I$\setminus\{a\}$
> et si $f\,'(x)$ tend vers une limite finie ℓ quand x tend vers a
> alors f dérivable en a et $f\,'(a) = \ell$

1) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}_n : \forall x \neq 0 \ \ f^{(n)}(x) = F_n(x)\, e^{-1/x^2}$ où $F_n(x)$ est une fraction rationnelle.
Soit $x \neq 0$.
*initialisation : $n = 0 \ \ f^{(0)}(x) = f(x) = e^{-1/x^2}$ en posant $F_0(x) = 1$ $\mathscr{P}_0$ est vraie.
* Supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain $n > 0$, montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
On a par hypothèse de récurrence : $f^{(n)}(x) = F_n(x)\, e^{-1/x^2}$
$f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (car produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$) d'où :
$f^{(n+1)}(x) = \left(F'_n(x) + \frac{2}{x^3} F_n(x)\right) e^{-1/x^2}$
Or $F'_n(x) + \frac{2}{x^3} F_n(x)$ est une fraction rationnelle donc on peut poser :
$F_{n+1}(x) = F'_n(x) + \frac{2}{x^3} F_n(x)$ et alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
* conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \ \ f^{(n)}(x) = F_n(x)\, e^{-1/x^2}$

2) $\lim_{x\to 0} F_n(x)\, e^{-1/x^2} = F_n(0) \times 0 = 0$
donc $f^{(n)}$ est prolongeable par continuité en 0
De plus d'après ce qui précède $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ $\forall n \in \mathbb{N}$
et $f^{(n+1)}(x) = F_{n+1}(x)\, e^{-1/x^2}$ où F_{n+1} est une fraction rationnelle
$\lim_{x\to 0} f^{(n+1)}(x) = F_{n+1}(0) \times 0 = 0$
Donc d'après le théorème ci-dessus $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$
Conclusion : f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$