

Leçon 24

Théorème de Thalès.

Applications à la géométrie du plan et de l'espace.

Pré-requis : - Calcul vectoriel (en particulier la relation de Chasles)
 - Définition et propriété d'un parallélogramme
 - Mesure algébrique

Définition : Soit $\mathcal{D}$ une droite de ε et $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. $\forall (A,B) \in \mathcal{D}^2, \exists! \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AB} = \lambda \vec{u}$.

Ce scalaire est appelé **mesure algébrique** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ relative au vecteur $\vec{u}$ et on le note $\overline{AB}$.

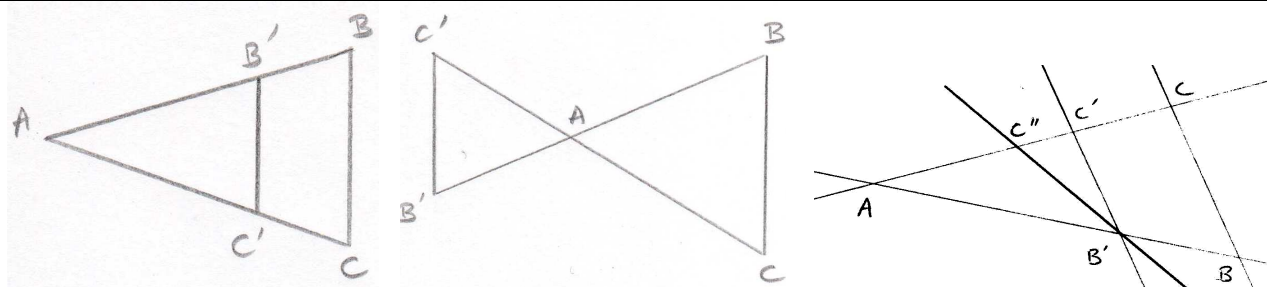
On se place dans le plan affine $\mathcal{P}$ ou l'espace affine ε .

Le théorème de Thalès permet de calculer des longueurs inaccessibles. On rappellera l'anecdote suivant laquelle Thalès, traversant l'Egypte dans une caravane, fut mis au défi de calculer la hauteur exacte de la grande pyramide de Kheops devant laquelle il passait. La mesure de la longueur de l'ombre de la pyramide, puis la mesure de la longueur de l'ombre d'un bâton enfoncé perpendiculairement au sol lui permit de réussir l'épreuve avec brio ! Et l'anecdote est toujours très utilisée au collège, puisqu'elle montre bien l'utilité du théorème pour le calcul de longueurs « que l'on ne peut pas aller mesurer sur place ».

1 – Théorème de Thalès dans le triangle

Théorème 1 : Soit ABC un triangle non aplati. Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$ ne passant pas par A , coupant (AB) en B' et (AC) en C' . Alors :

1/ Si $\mathcal{D} \parallel (BC)$ alors $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$. 2/ Si $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}$ alors $\mathcal{D} \parallel (BC)$.



Preuve : 1/ Ces égalités proviennent des axiomes d'espace affine et vectoriel.

En effet, dire $(B'C') \parallel (BC)$ signifie qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BC'} = k \overrightarrow{B'C'}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{BC'} = k \overrightarrow{B'A} + k \overrightarrow{AC'}$.

Par hypothèse, $\exists \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AB'} = \beta \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = \gamma \overrightarrow{AC}$; donc $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC'} = \beta \overrightarrow{B'A} + \gamma \overrightarrow{AC'}$.

D'où : $\beta \overrightarrow{B'A} + \gamma \overrightarrow{AC'} = k \overrightarrow{B'A} + k \overrightarrow{AC'}$. Or $\overrightarrow{B'A}$ et $\overrightarrow{AC'}$ sont linéairement indépendants (triangle non plat). Donc $\beta = k = \gamma$.

Ainsi, $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB'} = k \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC'} = k \overrightarrow{AC} \end{array} \right. \Rightarrow k = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}$ et $\overrightarrow{BC'} = k \overrightarrow{B'C'} \Rightarrow k = \frac{\overline{BC'}}{\overline{B'C'}}$ (car on choisit $\overrightarrow{B'C'}$ comme vecteur directeur

de $(B'C')$, donc $\overrightarrow{B'C'}$ vecteur directeur de (BC) , ce qui implique qu'il existe λ tel que $\overrightarrow{BC'} = \lambda \overrightarrow{B'C'}$ et on a $\lambda = k$).

2/ Soit C'' le point d'intersection de (AC) et de la droite Δ parallèle à (BC) passant par B' . D'après le sens direct, on a

$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}}$. Or $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}$, donc $\overline{AC'} = \overline{AC''}$. Comme C' et $C'' \in (AC)$, on a $C' = C''$. Donc $(BC) \parallel (B'C')$. ■

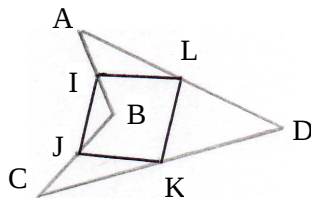
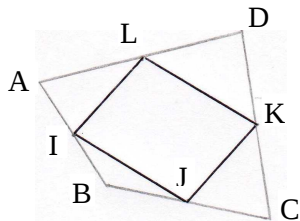
Remarque : ♣ Cas particulier, si B' et C' sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$, c'est le théorème de la droite des milieux : la droite joignant les milieux de 2 côtés d'un triangle est parallèle au 3^{ème} côté.

Dans ce cas, on a : $BC = 2 B'C'$.

La droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un autre coupe le 3^{ème} côté en son milieu.

♣ $\overline{AB}$ dépend de l'unité choisie sur la droite mais le rapport $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ est indépendant de l'unité choisie.

Exercice : Montrer que dans un quadrilatère quelconque, les milieux des côtés sont les sommets d'un parallélogramme.



Solution : Le théorème de Thalès montre en effet que (IJ) et (LK) sont parallèles à (AC) et que (IL) et (JK) sont parallèles à (BD). Le quadrilatère IJKL possède donc des côtés parallèles deux à deux. ♦

2 – Théorème de Thalès dans le plan

Théorème 2 : Soit $\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_C$ trois droites distinctes de $\mathcal{P}$ coupant deux droites distinctes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ respectivement en A, B, C et A', B', C'. Si $\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_C$ sont parallèles alors $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$.

Preuve : Comme les trois droites sont strictement parallèles, on a $A \neq C$ et $A' \neq C'$, donc les quotients ont bien un sens. On envisage 2 cas :

- Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles. Les quadrilatères $AA'B'B$ et $AA'C'C$ sont des parallélogrammes.

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$ $\Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$; et l'on a bien l'égalité des quotients.

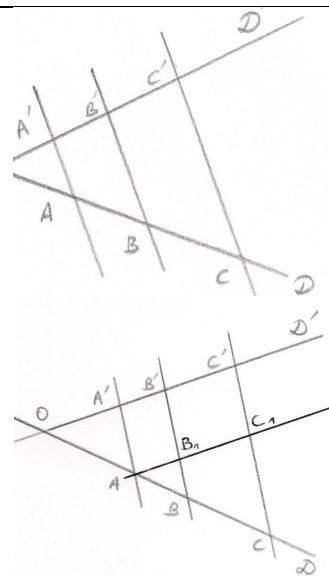
En effet, $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{A'C'} = \mu \overrightarrow{A'B'} \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{AC}{AB} \text{ et } \mu = \frac{A'C'}{A'B'}$.

Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$. Donc $\lambda = \mu$.

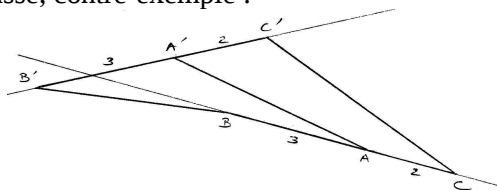
- Sinon $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent en un point O de $\mathcal{E}$. La parallèle à $\mathcal{D}'$ passant par A coupe (BB') en B₁ et (CC') en C₁.

Par le théorème de Thalès dans le triangle et par le résultat précédent, on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{A'B'}{A'C'}. \blacksquare$$



Remarque : La réciproque est fautive, contre-exemple :



Proposition 1 : « Une réciproque » du théorème de Thalès

Soit $\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_C$ trois droites distinctes de $\mathcal{P}$ coupant deux droites distinctes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ respectivement en A, B, C et A', B', C' tels que $C \neq C'$.

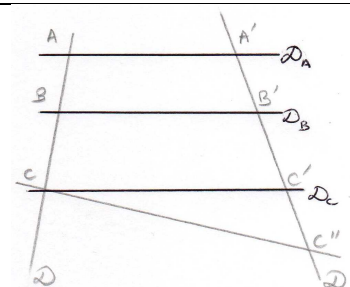
Si $\mathcal{D}_A \parallel \mathcal{D}_B$ et $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ alors les droites $\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_C$ sont parallèles.

Preuve : Soit Δ la parallèle à $\mathcal{D}_A$ passant par C, qui coupe $\mathcal{D}'$ en C''.

Le théorème de Thalès entraîne $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$; avec l'hypothèse $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$, et

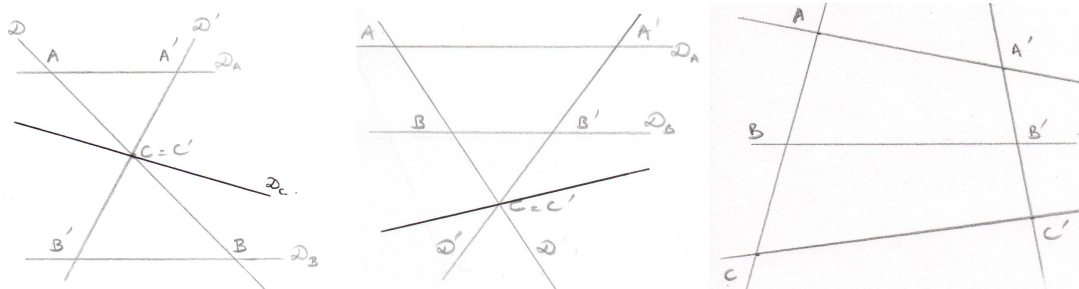
comme A', C', C'' sont alignés on obtient $\overrightarrow{A'C''} = \overrightarrow{A'C'}$, donc $C'' = C'$.

Donc $\mathcal{D}_C = \Delta$, finalement $\mathcal{D}_A \parallel \mathcal{D}_C$; $\mathcal{D}_B \parallel \mathcal{D}_C$. ■



Remarque : ♣ Ce n'est pas tout à fait la réciproque car on a ajouté des hypothèses.

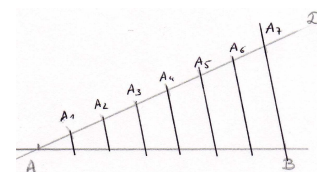
♣ Si $C = C'$, on a les configurations suivantes et n'importe quelle droite passant par C (i.e non parallèle à $\mathcal{D}_A$).



♣ Si $\mathcal{D}_A$ non parallèle à $\mathcal{D}_C$. Prenons $B = m[AC]$ et $B' = m[A'C']$. On a : $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} = \frac{A'B'}{A'C'}$. Mais $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$ ne sont pas parallèles. Donc $\mathcal{D}_A$ non parallèle à $\mathcal{D}_C$ et $\mathcal{D}_B$ non parallèle à $\mathcal{D}_C$.

Exercice : Partager un segment $[AB]$ donné en 7 segments de même longueur.

Solution : On trace une droite $\mathcal{D}$ (non perpendiculaire à $[AB]$) qui passe par A , on y construit 7 segments de même longueur arbitraire (à l'aide du compas), et on projette sur (AB) parallèlement à (A_7B) . ♦



3 – Théorème de Thalès dans l'espace

Théorème 3 : Soit $\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B, \mathcal{P}_C$ trois plans distincts de $\mathfrak{E}$, coupant deux droites distinctes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, respectivement en A, B, C et A', B', C' . Si $\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B, \mathcal{P}_C$ sont parallèles, alors $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$.

Preuve : Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires, on est ramenés au cas du théorème dans le plan.

Sinon, on suppose $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ non coplanaires. Soit $\mathcal{D}''$ la parallèle à $\mathcal{D}'$ passant par A . On applique deux fois le théorème de Thalès dans le plan :

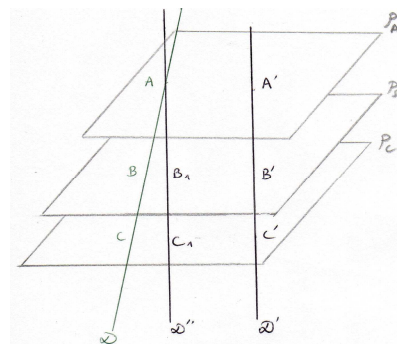
- Plan déterminé par $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}''$ car $\mathcal{P}_B$ et $\mathcal{P}_C$ sont coupés par le plan $(\mathcal{D}, \mathcal{D}'')$ selon deux droites parallèles : (BB_1) et (CC_1) .

$$\text{Donc } \frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1}.$$

- Plan déterminé par $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ car $\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B$ et $\mathcal{P}_C$ sont coupés par le plan $(\mathcal{D}', \mathcal{D}'')$

selon trois droites parallèles : $(AA'), (B_1B')$ et (C_1C') . Donc $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{A'B'}{A'C'}$.

$$\text{On obtient } \frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{A'B'}{A'C'}; \text{ d'où le résultat. } \blacksquare$$



Remarque : La réciproque est fausse, en effet en supposant $\mathcal{P}_A // \mathcal{P}_B$, alors en prenant un plan $\mathcal{P}_C$ passant par C et C' , on a bien l'égalité des rapports mais $\mathcal{P}_C$ n'est pas forcément parallèle à $\mathcal{P}_A$ ou $\mathcal{P}_B$. Mais on peut citer les propositions suivantes :

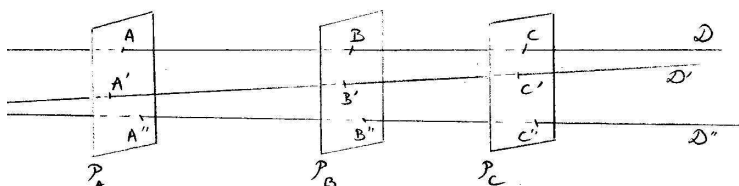
Proposition 2 : Soit A, B, C trois points d'une droite $\mathcal{D}$ et A', B', C' trois points d'une droite $\mathcal{D}'$, on suppose que ces 6 points sont distincts. Si $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ alors les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont parallèles à un même plan.

Preuve : Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires, elles sont incluses dans un même plan et donc (AA') , (BB') et (CC') sont incluses dans ce même plan.

Sinon, (AA') et (CC') ne sont pas coplanaires et il existe un unique plan $\mathcal{P}_B$ passant par B et parallèle à (AA') et (CC') . La droite $\mathcal{D}'$ coupe $\mathcal{P}_B$ en un point B_1 (autrement (AA') , (CC') et $(A'B'C')$ seraient parallèles à un même plan et les points A, A', B', C, C' seraient coplanaires, ce qui est absurde).

Le sens direct donne : $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B_1}{A'C'}$, d'où $\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{A'B_1}{A'C'}$ i.e $B_1 = B'$ et (BB') , (AA') et (CC') sont parallèles. ■

Proposition 3 : Soit $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}''$ trois droites distinctes. Trois plans distincts $\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B, \mathcal{P}_C$ coupent $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}', \mathcal{D}''$) en A, B, C (resp. A', B', C' et A'', B'', C'') distincts. On suppose que C, C' et C'' ne sont pas alignés. Si $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{A''B''}{A''C''}$ et si $\mathcal{P}_A // \mathcal{P}_B$ alors $\mathcal{P}_C$ est parallèle à $\mathcal{P}_A$ et à $\mathcal{P}_B$.



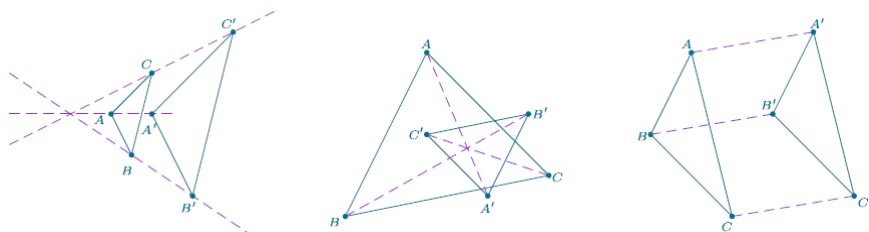
Preuve : Soit $\mathcal{P}'$ le plan passant par C et parallèle à $\mathcal{P}_A$ et $\mathcal{P}_B$. Il coupe $\mathcal{D}'$ en Q et $\mathcal{D}''$ en R de sorte qu'on peut utiliser le théorème de Thalès aux 3 plans parallèles $\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B, \mathcal{P}'$. Donc $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'Q} = \frac{A''B''}{A''R}$ ce qui entraîne avec les hypothèses $Q = C'$ et $R = C''$. Ainsi, $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_C$ et $\mathcal{P}_C // \mathcal{P}_A$. ■

Remarque : Là non plus, il ne s'agit pas vraiment de réciproques.

4 – Applications

a) Théorème de Desargues

Théorème : Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles non aplatis avec $A \neq A', B \neq B'$ et $C \neq C'$. Si les côtés $[AB], [BC]$ et $[CA]$ sont respectivement parallèles aux côtés $[A'B'], [B'C']$ et $[C'A']$ alors les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont parallèles ou concourantes.



Preuve : Si $(AA'), (BB'), (CC')$ ne sont pas parallèles, deux d'entre elles sont concourantes en un point I . Supposons que ce soit (AA') et (BB') . On sait que $(AB) // (A'B')$ donc d'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{IA'}{IA} = \frac{IB'}{IB} = k$.

Soit C'' le point de (IC) tel que $\frac{IC''}{IC} = k$. Par la réciproque du théorème de Thalès (dans le plan), on a $(AC) // (A'C'')$ et

$(BC) // (B'C'')$. On a donc $(A'C') = (A'C'')$ et $(B'C') = (B'C'')$ en utilisant les hypothèses, d'où $C'' = C'$ puisque ces deux points sont à l'intersection de $(A'C'')$ et $(B'C'')$.

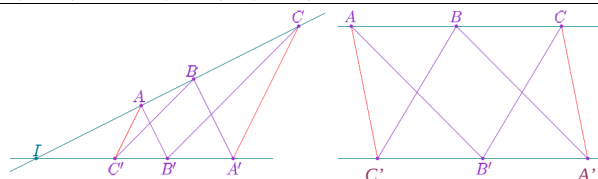
C' est donc aligné avec I et C : $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes en I .

Si $(AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles, $ABB'A'$ est un parallélogramme. Soit C'' tel que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC''}$. Alors $ACC''A'$ et $BCC''B'$ sont des parallélogrammes et on a $(AC) // (A'C'')$ et $(BC) // (B'C'')$. On termine comme précédemment. ■

Remarque : Il existe une réciproque : si ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles sans points communs tels que : $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes ou parallèles, $(AB) // (A'B')$ et $(AC) // (A'C')$ alors $(BC) // (B'C')$.

b) Théorème de Pappus

Théorème : Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites de $\mathcal{P}$, A, B, C (resp. A', B', C') trois points de $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}'$), tous distincts du point d'intersection éventuel de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
Si $(AB') \parallel (A'B)$ et si $(BC') \parallel (B'C)$ alors $(A'C') \parallel (A'C)$.



Preuve : Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes : Notons I le point d'intersection entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Par le théorème de Thalès on a :

$$\frac{IA'}{IB'} = \frac{IB}{IA} = k \text{ car } (AB') \parallel (A'B) \text{ et } \frac{IB'}{IC'} = \frac{IC}{IB} = k' \text{ car } (BC') \parallel (B'C).$$

$$\text{Donc } \overline{IA'} \times \overline{IA} = \overline{IB} \times \overline{IB'} \text{ et } \overline{IB} \times \overline{IB'} = \overline{IC} \times \overline{IC'} \Rightarrow \overline{IA'} \times \overline{IA} = \overline{IC} \times \overline{IC'} \Leftrightarrow \frac{\overline{IA'}}{\overline{IC'}} = \frac{\overline{IC}}{\overline{IA}}.$$

Donc par la réciproque de Thalès (dans le triangle) on obtient $(AC') \parallel (A'C)$.

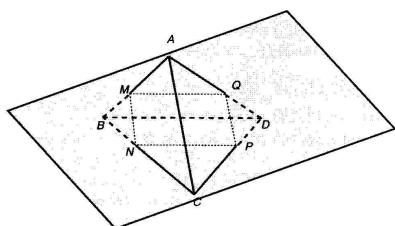
Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles : On a par hypothèse que $ABA'B'$ et $BCB'C'$ sont des parallélogrammes. On a : $\overline{AB} = \overline{B'A'}$ et $\overline{BC} = \overline{C'B'}$. On additionne ces égalités, ce qui donne $\overline{AC} = \overline{C'A'}$ et donc $ACA'C'$ est un parallélogramme et $(AC') \parallel (A'C)$. ■

c) Théorème de Ménélaüs dans l'espace

Théorème : Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires de l'espace ϵ et M, N, P, Q quatre points distincts appartenant respectivement aux droites (AB), (BC), (CD), (DA) distincts de A, B, C, D.

$$M, N, P, Q \text{ coplanaires} \Leftrightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \times \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \times \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1.$$

Démonstration



- Si M, N, P, Q sont coplanaires dans un plan $\mathcal{P}$ parallèle à (BD), alors la droite (MQ) intersection de $\mathcal{P}$ et de (ABD) est parallèle à (BD).
D'après le théorème de Thalès dans le triangle (ABD) :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QD}}.$$

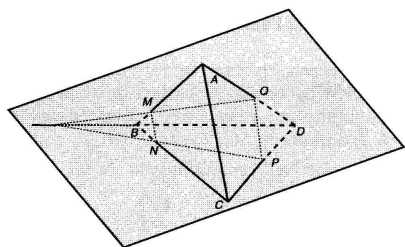
De même dans le triangle (BCD), $(PN) \parallel (BD)$ et $\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}}.$

En multipliant membre à membre : $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QA}}{\overline{QD}}.$

On en déduit le résultat cherché :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \times \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \times \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1.$$

- Si M, N, P, Q sont coplanaires dans un plan $\mathcal{P}$ non parallèle à (BD), (BD) et $\mathcal{P}$ se coupent en K. Alors $K \in (BDA)$ et $K \in \mathcal{P}$ et donc puisque $\mathcal{P}$ et (BDA) se coupent selon (MQ), $K \in (MQ)$.



De même $K \in (BCD)$ et $K \in \mathcal{P}$ et donc puisque $\mathcal{P}$ et (BCD) se coupent selon (NP), $K \in (NP)$.

On ne peut avoir $K = B$ car alors M et N seraient en B ni $K = D$ car alors Q et P seraient en D.

D'après le théorème de Ménélaüs dans (ABD) :

$$K, M, Q \text{ alignés} \Rightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{KB}}{\overline{KD}} \times \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1$$

De même d'après le théorème de Ménélaüs dans (BCD) :

$$N, P, K \text{ alignés} \Rightarrow \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \times \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \times \frac{\overline{KD}}{\overline{KB}} = 1$$

On multiplie membre à membre et on obtient :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \times \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \times \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1 \quad (E)$$

Réciproquement :

- si M, N, P, Q vérifient (E) et si (MQ) $\parallel$ (BD), alors d'après le théorème de Thalès dans le plan (ABD), $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QD}}$ et donc :

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \times \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}}.$$

On a alors d'après la réciproque du théorème de Thalès dans le plan (BCD), $(NP) \parallel (BD)$.

D'où : (MQ) $\parallel$ (BD) et (BD) $\parallel$ (NP), et donc M, N, P, Q sont coplanaires.

- si M, N, P, Q vérifient (E) et si $(MQ) \cap (BD) = \{K\}$:
K n'est pas en B car sinon M serait en B, K n'est pas en D car sinon Q serait en D.
Dans (ABD), M, Q, K sont alignés, donc d'après le théorème de Ménélaüs :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{KB}}{\overline{KD}} \times \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1 \quad (1)$$

On divise membre à membre (1) et (E) et on obtient :

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \times \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \times \frac{\overline{KD}}{\overline{KB}} = 1$$

D'après la réciproque du théorème de Ménélaüs dans le triangle BCD :

N, P, K sont alignés.

On a donc (MQ) et (NP) sécantes en K et M, N, P, Q sont coplanaires. □

d) Exercices

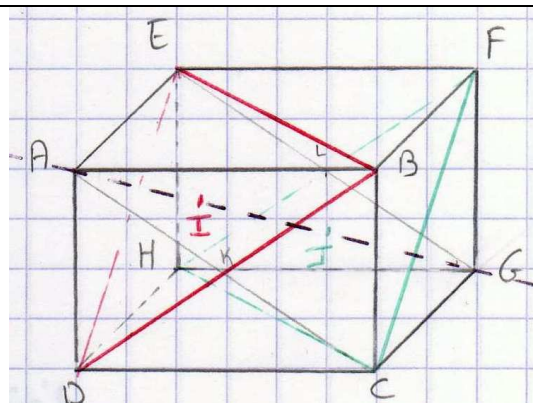
Soit ABCDEFGH un parallélépipède.

1/ Montrer que (EBD) et (HCF) sont parallèles

2/ (AG) coupe (HCF) en J et (EBD) en I.

Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AG}$.

3/ Montrer que I est l'isobarycentre de EDB et J celui de HCF.



Solution : 1/ On a (EB)/(HC) et (ED)/(FC). Or (EB) et (ED) sont deux droites sécantes de (EBD) et (HC) et (FC) deux droites sécantes de (HCF). Donc (EBD) et (HCF) sont parallèles (car deux droites sécantes de (EBD) qui sont parallèles à deux droites sécantes de (HCF)).

2/ D'après 1/ (EBD)//(HCF)

Soit K le milieu de [AC] et L le milieu de [EG].

* On a : - (AG) et (AC) sont sécantes en A.

- Les points d'intersections de (AG) avec (EBD) et (HCF) sont I et J.

- Les points d'intersections de (AC) avec (EBD) et (HCF) sont K et C.

Donc par le théorème de Thalès dans le triangle AJC (on a (IK)//(JC)) on obtient : $\frac{\overline{AI}}{\overline{AJ}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}$.

Comme A, I, J sont alignés $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AJ}$.

* On a : - (AG) et (EG) sont sécantes en G.

- Les points d'intersections de (AG) avec (EBD) et (HCF) sont I et J.

- Les points d'intersections de (EG) avec (EBD) et (HCF) sont E et L.

Donc par le théorème de Thalès dans le triangle GEI (on a (JL)//(IE)) on obtient : $\frac{\overline{GJ}}{\overline{GI}} = \frac{\overline{GL}}{\overline{GE}} = \frac{1}{2}$.

Comme G, I, J sont alignés $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{GI}$.

D'où $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GJ}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AG} + \frac{1}{2} \overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AG} + \frac{1}{4} \overrightarrow{GI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AG} + \frac{1}{4} (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AI})$. D'où $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AG}$.

Comme $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AJ}$; on obtient $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AG}$.

3/ On a : $\frac{1}{3} (\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{IA} + \frac{1}{3} (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{IA} + \frac{1}{3} (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EF}) = \overrightarrow{IA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AG} = \vec{0}$ (car $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AG}$).

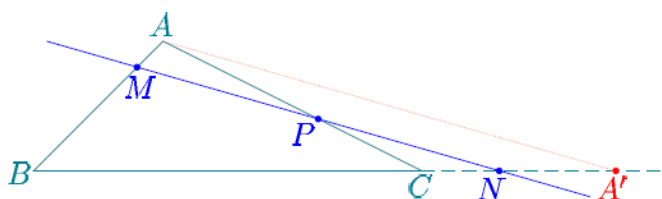
Et : $\frac{1}{3} (\overrightarrow{JH} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JF}) = \overrightarrow{JA} + \frac{1}{3} (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF}) = \overrightarrow{JA} + \frac{1}{3} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) = \overrightarrow{JA} + \frac{1}{3} (2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DH} + 2\overrightarrow{HG})$
 $= \overrightarrow{JA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AG} = \vec{0}$ (car $\overrightarrow{JA} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{AG}$). ♦

5 – Compléments

Théorème de Ménélaüs dans le plan

Théorème : Soit A, B, C non alignés du plan $\mathcal{P}$, M, N, P des points respectivement situés sur les droites (AB), (BC) et (CA) et distincts de A, B, C.

$$M, N, P \text{ alignés} \Leftrightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \times \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = 1.$$



Preuve : Supposons les points M, N, P alignés. La parallèle à (MP) passant par A coupe (BC) en A', et le théorème de Thalès

$$\text{donne : } \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NA'}}{\overline{NB}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{NA'}} \Rightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \times \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{NA'}}{\overline{NB}} \times \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA'}} = 1.$$

Réciproquement, si on suppose que $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \times \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = 1$ () est vraie, notons N' l'intersection des droites (MP) et (BC). Le*

point N' existe, autrement les droites (MP) et (BC) sont parallèles et le théorème de Thalès donne $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}$. Allié à

l'égalité () cela entraîne $\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = 1$ soit B = C, ce qui est absurde.*

Le sens direct du théorème permet d'écrire : $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{N'B}}{\overline{N'C}} \times \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = 1$. Cette égalité, alliée à (), donne $\frac{\overline{N'B}}{\overline{N'C}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}$, d'où*

N = N', et les points M, N et P sont bien alignés. ■

Théorème de Ceva

Théorème : Soit ABC un triangle non aplati et P, Q, R trois points différents de A, B, C respectivement sur les droites (BC), (CA), (AB). Alors les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes ou parallèles si, et seulement si :

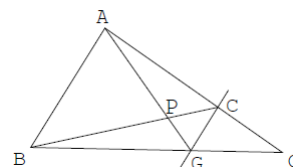
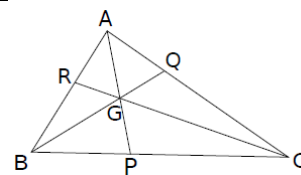
$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1.$$

preuve : ($\Rightarrow$) on peut déduire le théorème de Ceva de celui de Ménélaüs : si les trois droites se coupent en G, la droite (CR) coupe les côtés du triangle ABP en C, G, R. Par le théorème de Ménélaüs, on a

$$\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{GP}}{\overline{GA}} = 1. \text{ De même, la droite (BQ) coupe les côtés du triangle APC en B, G, Q donc } \frac{\overline{RB}}{\overline{RA}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{GP}} = 1. \text{ En multipliant les deux égalités obtenues, on obtient } \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$$

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$. Si les droites (AP), (BQ), (CR) ne sont pas parallèles, deux d'entre elles, par exemple (AP) et (BQ) se coupent en un point G. La droite (CG) coupe alors (AB) en un point R' : en effet si elle était parallèle à (AB), le théorème de Thalès impliquerait $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}$ car ces deux rapports sont égaux à $\frac{\overline{AB}}{\overline{GC}}$, ce qui impliquerait avec l'hypothèse $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$ ce qui est absurde.

Le théorème de Ceva dans le sens direct implique $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} = -1$, ce qui entraîne $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}}$, d'où R = R'. Les trois droites initiales concourent donc en G. □



Remarque : Ce théorème implique que les médianes d'un triangle sont concourantes, car les trois rapports figurant dans la relation donnée sont égaux à -1.

Mesure algébrique

Proposition : Soit A, B, C, D quatre points d'une droite $\mathcal{D}$.

1) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} \Rightarrow \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overline{AB} = \lambda \overline{CD} \Rightarrow \overline{AB} = \lambda \overline{CD}$.

Remarque : $\overline{AB}^u$ (resp $\overline{AB}^v$) la mesure algébrique de (A, B) pour le vecteur $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$), $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$.

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{AB}^u \vec{u} = \overline{AB}^v \vec{v} = \overline{AB}^v k \cdot \vec{u} \\ \overline{AC} = \overline{AC}^u \vec{u} = \overline{AC}^v \vec{v} = \overline{AC}^v k \cdot \vec{u} \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{AB}^u}{\overline{AC}^u} = \frac{k' \overline{AB}^v}{k' \overline{AC}^v}$$