(32) Théorème de Thalès

4ème : connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés de deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux demi droites de même origine.

3ème : théorème de Thalès dans sa généralité (2 cas de triangle)
+ réciproque.

Prérequis : géométrie du triangle + théorème de la droite des milieux.

→ activités d'introduction sous geogebra :

- 1ère activité niveau 4ème :  cf act 1 p 232 (4ème)

- 2ème activité niveau 3ème :  moins guidé vu qu'ils auront déjà vu le 1er cas.

I. Le théorème de Thalès.

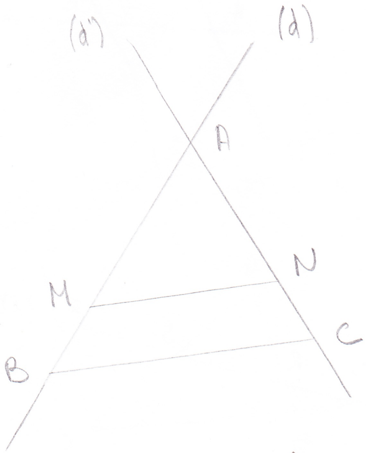
Théorème 1 : (d) et (d') sont deux droites sécantes en A.

B et M sont deux points de (d) distincts de A.

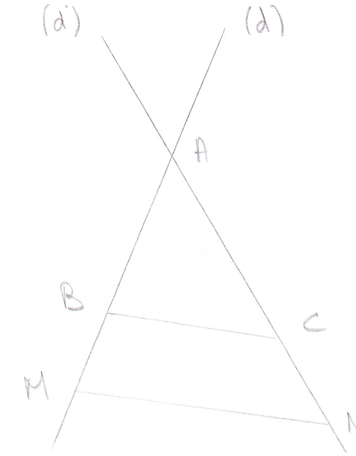
C et N sont deux points de (d') distincts de A.

Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

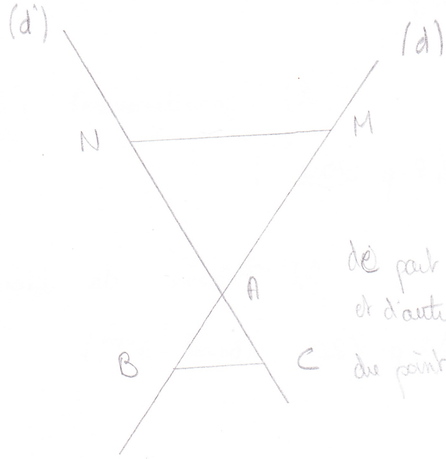
Remarque 1 : on peut utiliser le théorème de Thalès dans les trois configurations suivantes :



vu en classe de 4ème



configuration extérieure



de part et d'autre du point A

configuration "papillon"

Remarque 2 : dans le cas où M est le milieu de [AB] et N le milieu de [AC], on se retrouve dans la configuration de la réciproque du théorème de la droite des milieux.

Exercice : calculer une hauteur 58 p 246. (transmath 4ème)

II. La réciproque du théorème de Thalès

Théorème 2 : (d) et (d') sont deux droites sécantes en A.

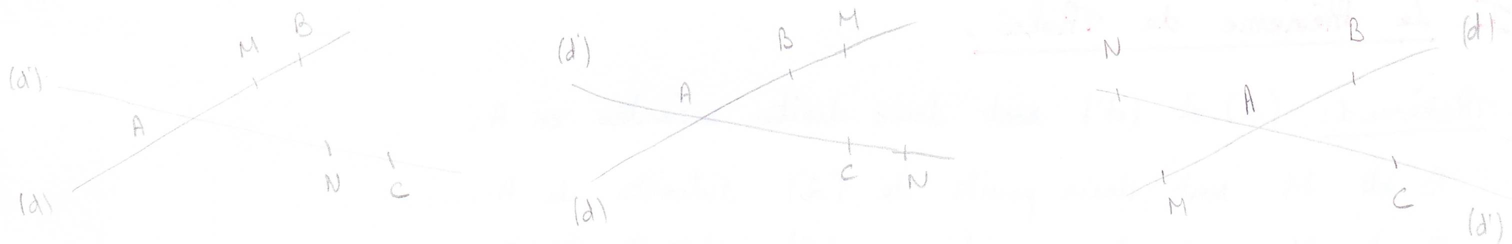
B et M sont deux points de (d), distincts de A.

C et N sont deux points de (d'), distincts de A.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A, B, M et les points A, C, N sont alignés dans le même ordre, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

cf contre exemple à la réciproque de Thalès.

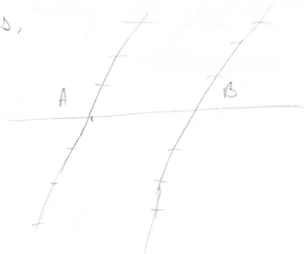
Remarque 3 : dans le cas où M est le milieu de [AB] et N le milieu de [AC], on retrouve le théorème de la droite des milieux.



III. Applications du théorème de Thalès

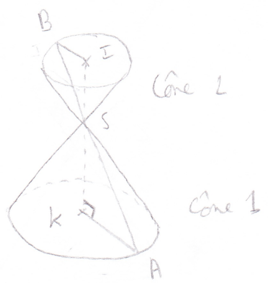
1) Construire des points définis par des rapports de longueurs.

3 p 227.



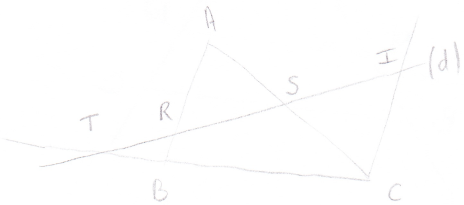
2) Agrandissement / réduction.

42 p 233.



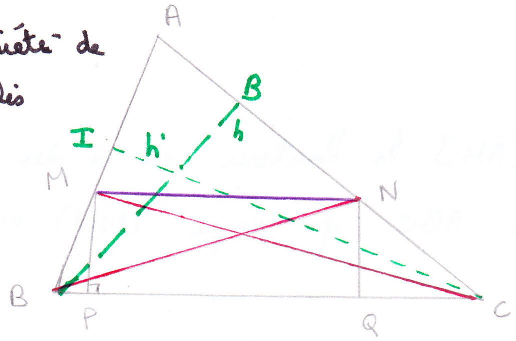
3) Théorème de Ménélaüs.

93 p 236 (Bréal 3ème)



Démonstration du théorème de Thalès par la méthode des aires : (Euclide)

a) propriété de Thalès



Les triangles MBC et NBC ont le côté [BC] en commun ;

les troisièmes sommets sont sur une parallèle à ce côté commun ;

ils ont des hauteurs MP et NQ égales ;

ces deux triangles ont la même aire et par complément dans le triangle ABC, on a l'égalité des aires $\mathcal{A}(AMC) = \mathcal{A}(ANB)$

En divisant les deux termes de l'égalité par $\mathcal{A}(ABC)$, on a : $\dfrac{\mathcal{A}(AMC)}{\mathcal{A}(ABC)} = \dfrac{\mathcal{A}(ANB)}{\mathcal{A}(ABC)}$

Soit $h' = CI$ la hauteur en C des triangles AMC et ABC.

On a : $\mathcal{A}(AMC) = AM \times \dfrac{h'}{2}$ et $\mathcal{A}(ABC) = AB \times \dfrac{h'}{2}$.

et $h = BH$ la hauteur en B des triangles ANB et ABC

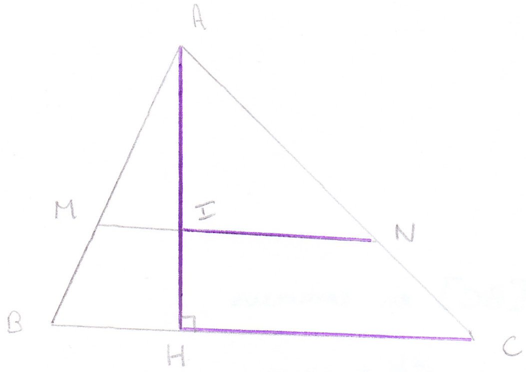
On a : $\mathcal{A}(ANB) = AN \times \dfrac{h}{2}$ et $\mathcal{A}(ABC) = AC \times \dfrac{h}{2}$

Les rapports des aires sont $\dfrac{\mathcal{A}(AMC)}{\mathcal{A}(ABC)} = \dfrac{AM}{AB}$ et $\dfrac{\mathcal{A}(ANB)}{\mathcal{A}(BAC)} = \dfrac{AN}{AC}$

Ccl : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

Objectif : $\frac{AI}{AH} = \frac{IN}{HC}$

b. Calcul de $\frac{MN}{BC}$.



Soit [AH] la hauteur en A du triangle ABC qui coupe (MN) en I.

Dans les triangles ABH et AHC, la propriété de Thalès démontrée précédemment permet d'écrire $\frac{AM}{AB} = \frac{AI}{AH} = \frac{AN}{AC}$. (1)

Les triangles INH et INC ont la même aire, car le côté [IN] est commun et les 3ème sommets sont sur une parallèle à ce côté commun.

En ajoutant l'aire du triangle AIN, on a : $\mathcal{A}(AHN) = \mathcal{A}(AIC)$

Or $\mathcal{A}(AHN) = \frac{1}{2} AH \times IN$ et $\mathcal{A}(AIC) = \frac{1}{2} \times AI \times HC$

soit $AH \times IN = AI \times HC$ d'où $\frac{AI}{AH} = \frac{IN}{HC}$

On démontre de même que, $\frac{AI}{AH} = \frac{MI}{BH}$

Un calcul sur les proportions : $\frac{AI}{AH} = \frac{MI}{BH} = \frac{IN}{HC} = \frac{MI + IN}{BH + HC} = \frac{MN}{BC}$ (2)

<u>ccl</u> : (1) et (2) $\Rightarrow$ $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

<u>Lemme</u> : si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

<u>démo</u> : Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $ad = bc$ d'où $ad + cd = bc + cd$

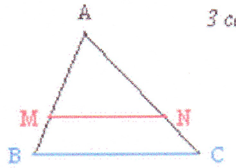
d'où $d(a+c) = c(b+d)$

d'où $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$.

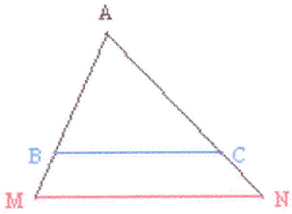
Enoncé du théorème:

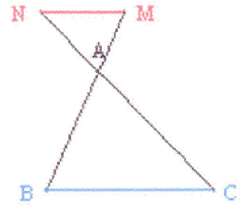
Soit ABC un triangle donné.

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{c} \text{A, B, M et A, C, N sont alignés dans le même ordre} \\ \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} \end{array} \right\} \text{ alors } (MN) // (BC)$$



3 cas de figure



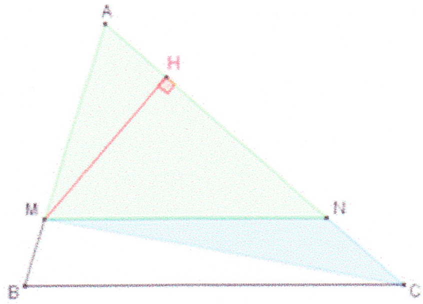


Démonstration:

1^{er} cas de figure:

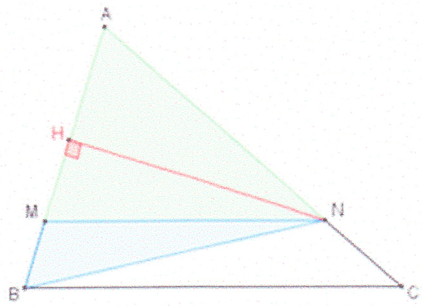
$$\text{Aire}(AMN) = \frac{AN \times MH}{2} \quad \text{et} \quad \text{Aire}(MNC) = \frac{MH \times NC}{2}$$

D'où $\dfrac{\text{Aire}(AMN)}{\text{Aire}(MNC)} = \dfrac{AN}{NC}$



$$\text{Aire}(AMN) = \frac{AM \times NH}{2} \quad \text{et} \quad \text{Aire}(MNB) = \frac{NH \times MB}{2}$$

D'où $\dfrac{\text{Aire}(AMN)}{\text{Aire}(MNB)} = \dfrac{AM}{MB}$



or $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ soit $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN}$

d'où $\dfrac{AM + MB}{AM} = \dfrac{AN + NC}{AN}$ soit $\cancel{1} + \dfrac{MB}{AM} = \cancel{1} + \dfrac{NC}{AN}$ donc $\boxed{\dfrac{AM}{NB} = \dfrac{AN}{NC}}$

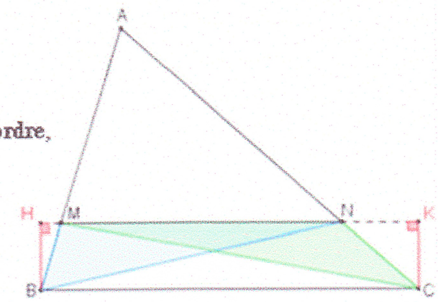
donc $\dfrac{\text{Aire}(AMN)}{\text{Aire}(MNB)} = \dfrac{\text{Aire}(AMN)}{\text{Aire}(MNC)}$ soit $\text{Aire}(MNB) = \text{Aire}(MNC)$

d'où $\dfrac{CK \times \cancel{MN}}{\cancel{2}} = \dfrac{BH \times \cancel{MN}}{\cancel{2}}$ soit $\boxed{CK = BH}$

De plus, $(HB) \perp (MN)$ et $(KC) \perp (MN)$ donc $(HB) // (KC)$.

Comme les points A, M, B et A, N, C sont **alignés dans le même ordre**, on en déduit que HKCB est un parallélogramme.

Donc $(MN) // (BC)$.



2^{ème} cas de figure:

Il est identique au cas précédent en permutant le nom des points.

3^{ème} cas de figure:

Par construction:
M' est le symétrique de M par rapport à A.
N' est le symétrique de N par rapport à A.
donc (M'N') est la droite symétrique de (MN) par rapport à A.
donc (M'N') // (MN).

On se retrouve donc dans les cas de figures 1 ou 2 selon la position des points M et N.