Leçon 55 : Equations différentielles

La notion d'équation différentielle a disparu des programmes des sections générales du baccalauréat mais est présente dans ceux de certaines sections techniques (Sciences et Technologie de l'Industrie et du Développement Durable ou STI2D et Sciences et Technologies de Laboratoire ou STL) ainsi que des BTS.

On travaille dans $\mathbb{R}$.

I. Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

<u>Activité d'introduction (diapo) :</u> Vitesse de refroidissement (Mathématiques Term STI2D-STL, Foucher 2012, p257). On obtient une équation dont **l'inconnue** n'**est** pas une valeur réelle ou complexe mais **une fonction**.

<u>Définitions :</u>

- On appelle équation différentielle une équation mettant en relation une variable x, une fonction inconnue y de cette variable.et certaines de ses dérivées. Elle s'écrit :

  $$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots) = 0$$

  où F est une fonction des variables x, y(x), y'(x), y''(x), … à valeur dans $\mathbb{R}$.

  Remarque : On écrit souvent y au lieu de y(x).

- L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre maximum des dérivées figurant dans l'équation.
- Une solution de l'équation différentielle sur l'intervalle I est une fonction φ vérifiant l'équation pour tout $x \in I$ *(donc au moins autant de fois dérivable que l'ordre de l'équation)*. Résoudre l'équation différentielle c'est trouver l'ensemble de ses solutions.

Exemple : Illustrer ces définitions avec l'activité présentée.

II. Des équations différentielles aux solutions connues

A- <u>Equations différentielles linéaires d'ordre 1 :</u>

<u>Définition :</u> Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est une équation différentielle de la forme suivante :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

où a, b et c sont des fonctions définies sur un intervalle I.
L'équation $a(x)y' = b(x)y = 0$ est appelée équation homogène associée à l'équation différentielle (ou équation sans second membre) et c(x) est appelé second membre de l'équation différentielle.

Remarque : On se limite au cas où les fonctions a, b et c sont dérivables et a ne s'annule pas sur l'intervalle d'étude.

Résolution : Si a et b sont dérivables sur I et a ne s'annule pas sur I alors les solutions sur I de l'équation homogène sont les fonctions :

$x \mapsto k \exp(-F(x))$ où k une constante réelle quelconque et F une primitive sur I de b/a.

Les solutions sur I de l'équation différentielle $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ sont les fonctions de la forme :

$y(x) = p(x) + k \exp(-F(x))$ où p est une solution particulière sur I de l'équation différentielle.

Remarque : Résoudre une EDL1 revient donc à en chercher une solution particulière et à résoudre l'équation homogène associée (solution générale = solution particulière + solution EH).

Recherche d'une solution particulière :

- Sous la même forme que le second membre *lorsque celui-ci est un polynôme ou est de la forme $A \cos(wx) + B \sin(wx)$ (polynôme de même degré que c - $c(x) = -4t^2 + 3$ on cherche $p(x) = Ax^2 + Bx + C$-, combinaison linéaire de sinus et cosinus de même période que c – $c(t) = 13 \sin(3x)$ on cherche $p(x) = A \cos(3x) + B \sin(3x)$-).*
- Variation de la constante *(nécessite pour $y' = a(x)y + b(x)$ que a et b soient continues).*

B- Equation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :

Définition : Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est une équation différentielle de la forme suivante :

$ay'' + by' + cy = f(x)$ où a, b et c sont des réels, a non nul, et f une fonction définie sur un intervalle I.

Remarque : On distingue à nouveau l'équation homogène associée ou équation sans second membre et le second membre.

Remarque : On se limite au cas où le second membre est une fonction exponentielle fois polynôme.

Résolution : Solutions de l'équation homogène, équation caractéristique associée (cf diapo).

Les solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = f(x)$ s'obtiennent en ajoutant une solution particulière de l'équation à la solution générale de l'équation homogène associée.

A savoir : Pourquoi s'intéresse-t-on à l'équation caractéristique ? Parce que si on cherche des solutions de l'équation homogène sous la même forme que celles d'une EDL1 c'est-à-dire $x \mapsto \exp(rx)$, alors on a :

$$ar^2 \exp(rx) + br \exp(rx) + c \exp(rx) = 0 \text{ ie en factorisant } (ar^2 + br + c) \exp(rx) = 0$$

et donc $ar^2 + br + c = 0$ puisque l'exp ne s'annule pas.

A savoir : Pour $y'' + \omega^2 y = 0$ où $\omega \in \mathbb{R}^*$, les solutions sont les fonctions $t \mapsto A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, A et B deux réels ce qui peut aussi se mettre sous la forme $t \mapsto C \sin(\omega t + \varphi)$, C réel.

A savoir : La tête des solutions de l'équation homogène.

Remarque : Résoudre une EDL2 à coefficients constant revient donc à en chercher une solution particulière et à résoudre l'équation homogène associée (solution générale = solution particulière + solution EH).

Recherche d'une solution particulière :

- Lorsque le second membre est de la forme $x \mapsto \exp(\alpha x)P(x)$, *P un polynôme, on cherche une solution particulière sous de la forme* $x \mapsto x^{mult(\alpha \text{ dans } EC)}\exp(\alpha x)Q(x)$ *avec* $deg(Q) = deg(P)$ *ou plus simplement de la forme .* $x \mapsto \exp(\alpha x)Q(x)$ *avec* $deg(Q) = deg(P)+2$.
- Combinaison linéaire de sinus et cosinus de même période.

C- Problème de Cauchy (à intégrer aux paragraphes « résolution » pour raccourcir l'exposé) :

Théorème : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b et c des fonctions continues sur I, alors pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ il existe une unique fonction y vérifiant : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ et $y(x_0) = y_0$
Soit a, b, c des réels, a non nul, et f une fonction, alors pour tout $x_0 \in I$ et y_0, $y_1 \in \mathbb{R}$ il existe une unique fonction y vérifiant : $ay'' + by' + cy = f(x)$ et $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$

Exemples : cf diapo (famille de courbes solutions et exercices tirés de BTS Secteur industriel groupement B, C, D, Hachette 2006, pp164-188). *On peut relier les équations différentielles à beaucoup de domaines concrets (physique, chimie, démographie …*

III· D'autres équations différentielles et outils pratiques

A- Equation différentielle à variables séparables :

Définition : Une équation différentielle d'ordre 1 est dite à variable séparables si elle peut s'écrire sous la forme :

$y' f(y) = g(x)$ où f et g sont des fonctions, f non nulle.

Résolution : On se limite au cas où f et g sont dérivable respectivement sur un intervalle I et un intervalle J de $\mathbb{R}$. Il suffit alors d'intégrer l'équation, c'est-à-dire chercher une primitive de f et g, pour résoudre l'équation différentielle.

Exemple : Résoudre $\exp(y)y' = 2x$ avec $y(1) = 1$.

B- Méthode d'Euler :

La méthode d'Euler est une méthode de résolution approchée d'une équation différentielle d'ordre 1. Une condition initiale étant donnée, on utilise y' (connue grâce à l'équation différentielle) pour approcher la courbe solution par sa tangente (procédé itératif).

Prolongements possibles : Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1, utilisation de la transformée de Laplace (dont l'avantage par rapport à la méthode classique est de donner directement la solution du problème de Cauchy).