L'orthogonalité

Niveau: En classe de 6ème et en seconde en relation avec la notion de perpendicularité.
En 1èreS (dans le plan) et en Terminale S (dans l'espace) en relation avec le produit scalaire.
Prérequis:Le produit scalaire

Dans la suite, on munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et l'espace d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

I. Orthogonalité dans le plan

Définition: Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan, et soient A, B, C et D quatres points tels que $\vec{u}=\vec{AB}$ et $\vec{v}=\vec{CD}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Définition/Théorème: Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

On a l'équivalence $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$.

Démonstration: Soient A, B et C trois points du plan distincts deux à deux tels que $\vec{u}=\vec{AB}$ et $\vec{v}=\vec{AC}$.

On a $\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)=0\Leftrightarrow\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2=\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$.

Or $\|\vec{u}\|^2=\|\vec{AB}\|^2=AB^2;\|\vec{v}\|^2=\|\vec{AC}\|^2=AC^2\, et\, \|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{AB}-\vec{AC}\|^2=\|\vec{CB}\|^2=BC^2$.

Ainsi, $\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow AB^2+AC^2=BC^2\Leftrightarrow$ ABC est rectangle en A (théorème de Pythagore).

On conclut que $\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Exemple d'application:

Dans un repère orthonormé, on donne les points A(-3; 0), B(0; -2) et C(4; 4).

Démontrer que le triangle ABC est rectangle et préciser en quel sommet.

II. Orthogonalité dans l'espace

1- Droites orthogonales

Définition:Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.

Remarque: En particulier, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de l'espace.

Définition: On dit que deux droites D et D', de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, sont orthogonales lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Exemple d'application: On considère la droite D de vecteur directeur $\vec{u}(1;-2;3)$ et la droite (AB), avec A(-1; 0; 2) et B(-3; 2; 4).

Démontrer que les droites D et (AB) sont orthogonales.

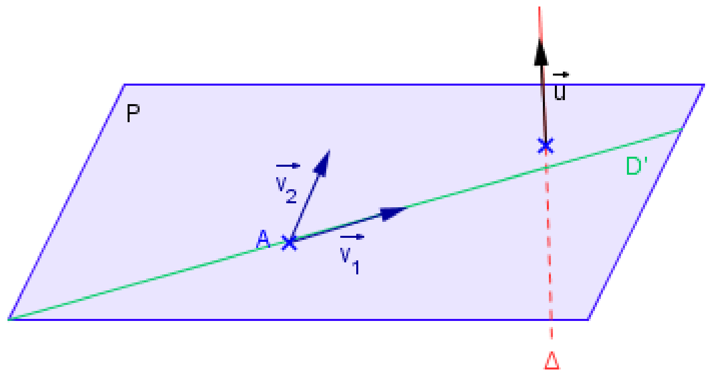
2- Droite orthogonale à un plan

Définition et théorème: Si une droite Δ est orthogonale à deux droites sécantes de vecteurs directeurs respectifs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ d'un plan *P*, alors Δ est orthogonale à toute droite de *P*.

On dit alors que Δ **est orthogonale au plan *P*.**

Soit $\vec{u}$ vecteur directeur de Δ et $(A;\vec{v}_1;\vec{v}_2)$ un repère de P.

On a l'équivalence $\Delta \perp P \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}_1=0$ et $\vec{u}.\vec{v}_2=0$.



Démonstration: Si Δ est orthogonale à *P*, alors Δ est orthogonale à la droite qui passe par A et qui admet pour vecteur directeur $\vec{v}_1$. Donc $\vec{u}.\vec{v}_1=0$.

De même, Δ est orthogonale à la droite qui passe par A et qui admet pour vecteur directeur $\vec{v}_2$. Donc $\vec{u}.\vec{v}_2=0$.

Réciproquement, si $\vec{u}.\vec{v}_1=0$ et $\vec{u}.\vec{v}_2=0$, alors pour toute droite *D'* de *P*, un vecteur directeur $\vec{u}'$ de *D'* s'écrit sous la forme $\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2$, avec α et β deux réels. On a :

$\vec{u}.\vec{u}'=\vec{u}.\overrightarrow{\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2}=\alpha\times\vec{u}.\vec{v}_1+\beta\times\vec{u}.\vec{v}_2=\alpha\times0+\beta\times0=0$ (par bilinéarité du produit scalaire).

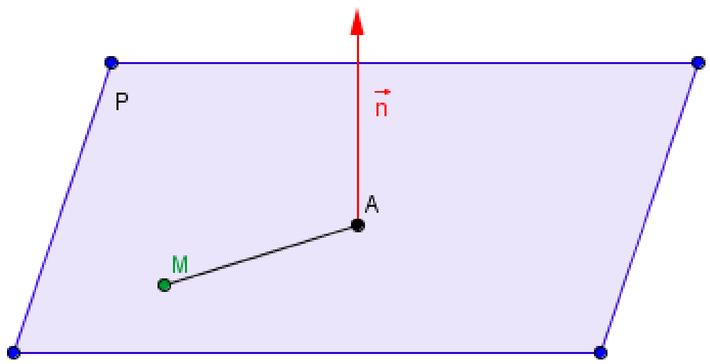
Ainsi, la droite Δ est orthogonale à toute droite *D'* de *P* et donc Δ est orthogonale à *P*.

3- Vecteur normal à un plan

Définition et théorème:

Un **vecteur normal à un plan** *P* est un vecteur directeur non nul d'une droite orthogonale au plan *P*.

Soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur normal non nul .
Le plan qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM}.\vec{n}=0$



Démonstration: Soit $\vec{n}$ un vecteur directeur de la droite d et A un point de d.

Le plan perpendiculaire à la droite d en A est l'ensemble des points M tels que la droite (AM) est perpendiculaire à d .

P est donc l'ensemble des points M tels que $\vec{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$. Donc $\vec{AM}.\vec{n}=0$.

Le vecteur $\vec{n}$ est donc normal à P.

Définition: On dit qu'**une droite est orthogonale à un plan** si un vecteur directeur de cette droite est normal à ce plan.

III. Équation cartésienne et vecteur normal

1- Équation cartésienne d'une droite

Propriété:

1) Si une droite *D* a pour vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ alors *D* admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$, où *a* et *b* sont des réels non tous nuls.

2) Réciproquement, toute équation de cette forme est celle d'une droite qui admet pour vecteur normal $\vec{n}(a;b)$.

Démonstration:

1) On pose $\vec{n}=\vec{AB}$. On a B distinct de A, puisque $\vec{n}\neq\vec{0}$.

$\vec{AM}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow \vec{AM}=\vec{0}$ ou les droites (AM) et (AB) sont perpendiculaires.

$\vec{AM}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow$ M appartient à la droite D perpendiculaire à (AB) passant par A.

L'équation de D résulte de l'expression du produit scalaire $\vec{AM}.\vec{n}$:

$M\in D \Leftrightarrow \vec{AM}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)=0 \Leftrightarrow ax+by+c=0$, où $c=-ax_A-by_A$.

2) Réciproquement, notons E l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $ax+by+c=0$.

Les réels a et b étant non tous nuls , donc E contient au moins un point. Par exemple, si $a\neq 0$, alors le point $A(\frac{-c}{a},0)$ est un point de E. Donc $A\in E$.

En considérant le vecteur non nul $\vec{n}(a;b)$, pour tout $M(x;y)$ on a:

$\vec{AM}.\vec{n}=a(x-x_A)+b(y-y_A)=ax+by+c$

Donc $M\in E \Leftrightarrow \vec{AM}.\vec{n}=0$.

Ainsi, *E* est la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

2- Équation cartésienne d'un plan

Propriété:

1) Si un plan *P* a pour vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ alors P admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$, où *a*, *b* et *c* sont des réels non tous nuls (puisque $\vec{n}$ est un vecteur normal).

2) Réciproquement, toute équation de cette forme est celle d'un plan qui admet pour vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.

Exercice 1: Orthocentre et hyperbole (niveau 1ère S)

Exercice 2: Sphère tangent à un plan (niveau terminale S)

Démonstration:

1) *P* est un plan et $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ un vecteur normal à *P*.

Le vecteur $\vec{n}$ est, par définition, non nul: les réels *a*, *b* et *c* sont non tous nuls. Choisissons un point A de *P*, alors *P* est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM}\,.\vec{n}=0$.

Notons $(x_0\,;y_0\,;z_0)$ les coordonnées de A.

Alors $\vec{AM}\,.\vec{n}=0$ se traduit par $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ c'est-à-dire par $a\,x+b\,y+c\,z-(a\,x_0+b\,y_0+c\,z_0)=0$, et en posant $d=-(a\,x_0+b\,y_0+c\,z_0)=0$, par $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$.

2) Réciproquement, notons *E* l'ensemble des points *M(x; y; z)* tels que $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$.

Les réels *a, b* et *c* étant non tous nuls, donc *E* contient au moins un point A. Par exemple, si $a\neq 0$, alors le point $A(\frac{-d}{a}\,;0\,;0)$ est un point de *E* (A vérifie bien l'équation). Donc $A\in E$.

En considérant le vecteur non nul $\vec{n}(a\,;b\,;c)$, pour tout $M(x\,;y\,;z)$ on a:

$$\vec{AM}\,.\vec{n}=a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=a\,x+b\,y+c\,z+d$$

Donc $M\in E\Leftrightarrow \vec{AM}\,.\vec{n}=0$.

Ainsi, *E* est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.