

Question: On considère la série harmonique $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, on note (s_n) la suite de ses sommes partielles. Donner N tel que $s_N \geq 10$.

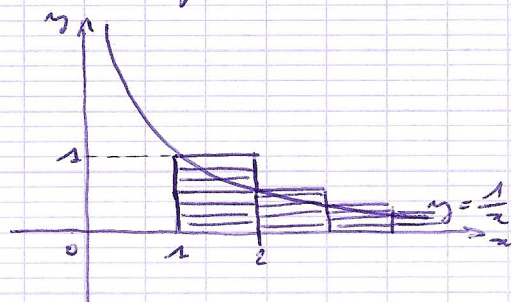
On cherche N tel que $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \geq 10$, on majore cette somme par l'intégrale correspondante:

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \geq \int_1^{N+1} \frac{1}{x} dx = \ln(N+1)$$

Donc on cherche N tel que:

$$\ln(N+1) \geq 10$$

$$\Leftrightarrow N \geq \text{Ent}(e^{10}-1) + 1$$



Remarque: On peut encadrer la somme:

$$\ln(N+1) \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^N \frac{1}{x} dx = 1 + \ln(N)$$

Question: On considère la suite $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ (série géométrique), on note (s_n) la suite de ses sommes partielles, que vaut $\lim s_n$ selon x ?

$$s_n = \sum_{k=0}^n x^k = x^0 \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

* 1^{er} cas: $|x| < 1$.

$\frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} = \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = |x| < 1$ donc $(|x^n|)$ est décroissante, elle est de + minorée par 0 donc elle converge. La limite

vérifie $l = |x| \times l$ (car $|x^{n+1}| = |x| |x^n|$) donc vaut 0.

Ainsi si $|x| < 1$ alors $s_n \rightarrow 0$ et $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ converge.

* 2^{ème} cas: $|x| > 1$.

On trouve alors que $(|x^n|)$ est croissante. Supposons qu'elle converge alors sa limite est nécessairement 0 ($l = |x|l$ et $|x| > 1 \Rightarrow l = 0$), absurde car $|x| > 1$ et $(|x^n|)$ croissante. Donc $(|x^n|)$ tend vers $+\infty$, d'où $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ diverge car (s_n) diverge.

* 3ème cas: $x = 1 \Rightarrow \rho_n = n+1$ qui diverge.
 $x = -1 \Rightarrow \rho_n = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2}$ qui ne converge pas.

Donc dans ce 3ème cas $\sum_{k \geq 0} x^k$ diverge.

Question: $\sum_{k \geq 2} \frac{2}{k^2 - 1}$ nature? somme?.

* $\frac{2}{k^2 - 1} \sim_{+\infty} \frac{2}{k^2}$ terme général d'une série de Riemann convergente donc $\sum_{k \geq 2} \frac{2}{k^2 - 1}$ converge (termes positifs OK).

* Décomposition en éléments simples:

$$\frac{2}{k^2 - 1} = \frac{2}{(k+1)(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}$$

$$\begin{aligned} \rho_n &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \longrightarrow \boxed{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Question: Nature de $\sum \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n} \ln^2(\ln)}}_{\geq \frac{1}{n}}$ (sans Bertrand)?

$\geq \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc diverge

↳ Comparaison avec une série de Riemann:

$$\frac{n}{\sqrt{n} \ln^2(\ln)} = \frac{\sqrt{n}}{\ln^2(\ln)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\text{Donc } \frac{1}{\sqrt{n} \ln^2(\ln)} \geq \frac{1}{n}.$$