Collection CAPES

Session 2011

Clément Boulonne
http://clementboulonne.new.fr/

Les leçons de mathématiques à l'oral du CAPES

Proposition de plan et références bibliographiques

1

Table des matières

L'ensemble de l'épreuve s'inscrit dans le cadre des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de techniciens supérieurs. La capacité du candidat à illustrer le sujet par des exemples sera valorisée.

1	Résolution de problèmes à l'aide des graphes	11
2	Techniques de dénombrement	21
3	Coefficients binomiaux	25
4	Expérience aléatoire et probabilités	31
5	Variable aléatoire discrète	39
6	Loi binomiale, loi de Poisson, loi normale	45
7	Variable aléatoire réelle à densité	51
8	Statistique descriptive à une variable	57
9	Séries statistiques à deux variables numériques	63
10	Estimation	69
11	Multiples, diviseurs, division euclidienne	75
12	PGCD, PPCM de deux entiers naturels	79
13	Égalité de Bézout	83
14	Nombres premiers	91
15	Congruences dans $\mathbb{Z}$	97
16	Équations du second degré	103
17	Module et argument d'un nombre complexe	109
18	Transformations planes et nombres complexes	117
19	Exemples d'utilisation des nombres complexes	123
20	Algèbre linéaire en section de technicien supérieur	133
21	Proportionnalité et linéarité	143
22	Pourcentages	147
23	Systèmes d'équations et systèmes d'inéquations	151
24	Droites du plan	161
25	Droites et plans de l'espace	169
26	Droites remarquables du triangle	175

27 Le cercle 181

28 Solides de l'espace 187

29 Barycentre 195

30 Produit scalaire 203

31 Théorème de Thalès 211

32 Trigonométrie 217

33 Relations dans un triangle 229

34 Produit vectoriel, produit mixte 237

35 Homothéties et translations 243

36 Isométries planes 261

37 Similitudes planes 273

38 Problèmes de constructions géométriques 287

39 Problèmes de lieux géométriques 299

40 L'orthogonalité 307

41 Suites monotones 315

42 Convergence de suites réelles 321

43 Suites arithmétiques, suites géométriques 327

44 Croissance comparée de suites 333

45 Suites récurrentes 339

46 Problèmes conduisant à l'étude de suites 351

47 Limite d'une fonction réelle de variable réelle 363

48 Théorème des valeurs intermédiaires 373

49 Dérivabilité 381

50 Fonctions polynômes du second degré 393

51 Fonctions logarithmes 401

52 Fonctions exponentielles 413

53 Croissance comparée de fonctions réelles 419

54 Courbes planes définies par des équations paramétriques 427

55 Intégrales, primitives 437

56 Techniques de calcul d'intégrales 451

57 Équations différentielles 457

58 Problèmes d'équations différentielles 465

59 Problèmes conduisant à l'étude de fonctions 473

60 Développements limités 491

61 Séries numériques 499

62 Séries de Fourier 505

63 Transformation de Laplace 515

64 Courbes de Bézier 527

65 Exemples d'études de courbes 537

66 Aires 549

67 Exemples d'algorithmes 563

68 Exemples d'utilisation d'un tableur 579

69 Les différents types de raisonnement en mathématiques 587

70 Applications des mathématiques à d'autres disciplines 593

Un mot de l'auteur

Bonjour,

Je suis heureux de vous présenter mon travail des grandes-vacances 2011. Le projet a débuté fin mai pour se terminer le 11 août. Après une semaine de correction intense, le voici sur mon site personnel : http://clementboulonne.new.fr.

En quelques mots, ce polycopié est une sélection de cours trouvés sur Internet ou sur des livres et qui traitent des sujets des 70 leçons demandées à la première épreuve orale du CAPES externe de mathématiques, session 2010–2011. Le document que je vous présente vous permet donc de réviser cette épreuve sans fouiller intensément le web ou dans vos livres. Dans chaque leçon, je vous propose un plan et le contenu des notions à traiter dans la leçon.

Je vous laisse quand même travailler chacune des leçons. Pourquoi ?

1. Certaines leçons ont beaucoup de contenu ! Je vous précise que votre passage devant le jury dure 30 minutes (15 minutes pour présenter tout votre plan, vous y mettrez les titres des sections, les définitions les plus importantes, les énoncés des théorèmes et l'énoncé d'un exercice et 15 minutes où le jury demande de développer une partie du plan proposé au tableau : une démonstration d'un théorème ou les solutions d'un exercice). Donc à vous de faire des fiches avec le contenu des 30 premières minutes de votre intervention.
2. Vous pouvez compléter (même si les leçons sont déjà complètes) le contenu des leçons que je vous propose par d'autres documents (livres, documents sur internet). A vous de chercher !
3. La meilleure façon de travailler est d'aller voir, dans chaque leçon, les références bibliographiques et faire ses propres fiches avec les contenus des polycopiés proposés.

Il se peut qu'une partie d'une leçon se retrouve dans une autre leçon (voir plusieurs leçons) : c'est parce qu'elle répond au thème de la leçon. Encore une fois, si vous voulez d'autres exemples ou - carrément - un autre plan pour la leçon, n'hésitez pas à y réfléchir et à chercher sur le web ou dans vos livres personnels.

On remarquera que chaque leçon est divisée en deux parties distinctes : Contenu et Compléments. J'ai voulu séparer le plus possible la première partie de l'intervention (présentation du plan) et la deuxième partie (développement du plan). Peut-être que cela vous déroutera car les démonstrations ne sont pas en dessous des théorèmes.

Le polycopié n'est pas parfait (car la perfection n'est pas de ce monde) alors - surtout ! - si vous trouvez une erreur de frappe ou mathématique dans ce polycopié, n'hésitez pas à me contacter (Rubrique Contact de mon site).

Il ne me reste plus qu'à vous souhaiter bonne lecture et bonnes révisions !

Clément BOULONNE

Intitulé de l'épreuve

Pour la première épreuve, dite de leçon, le candidat tire au sort une enveloppe contenant deux sujets et il choisit l'un des deux. Il bénéficie de deux heures et demie de préparation. L'épreuve devant le jury dure une heure.

Dans un premier temps (15 minutes maximum), le candidat expose un plan du sujet qu'il a choisi. Ce plan peut comprendre des définitions, propriétés, théorèmes, exemples d'application, exercices, etc. Aucune démonstration ne doit être présentée à ce moment-là.

Dans un second temps (quinze minutes maximum), le candidat développe une partie du plan choisie par le jury. Ce développement, qui doit permettre au candidat de faire la preuve de sa culture mathématique, peut aussi bien concerner une démonstration, un exemple d'application, un exercice, une illustration à l'aide d'un logiciel, etc.

L'épreuve se termine par un entretien avec le jury, selon les mêmes modalités qu'antérieurement.

Les programmes de cette épreuve sont ceux du collège, du lycée et des sections de techniciens supérieurs. La liste des sujets qui seront proposés à la session 2011 est disponible sur le site du jury.

Il est attendu du candidat qu'il soit capable d'illustrer le sujet par des exemples. Cette capacité sera prise en compte dans l'évaluation. De façon générale, les libellés des leçons sont un peu plus larges que dans les listes antérieures, conduisant à un travail de synthèse, qui peut amener à structurer le plan différemment selon le sujet choisi.

Il est bien évident qu'il n'existe pas pour chaque leçon un modèle unique de plan qui correspondrait aux attentes du jury.

Pour les deux épreuves orales, la bibliothèque du concours permettra d'emprunter quelques manuels de collège, lycée et STS. Plus largement, le candidat a la possibilité d'utiliser des ouvrages personnels du commerce (dotés d'un numéro ISBN), à l'exclusion des livres spécifiques de préparation aux concours de recrutement d'enseignants et à condition qu'ils ne soient pas annotés.

Pour les deux épreuves orales, pendant la préparation et l'interrogation, le candidat peut utiliser le matériel informatique mis à sa disposition. Les logiciels fournis sont mentionnés sur le site du jury.

Parmi ceux-ci figurent des émulateurs de calculatrices.

En conséquence, l'usage des calculatrices n'est plus autorisé, aussi bien pendant la préparation que l'interrogation.

L'utilisation de tout support numérique personnel est exclue.

Les versions numérisées de quelques manuels seront également disponibles, de même que les fichiers correspondant aux programmes officiels, ainsi que les documents ressources pour faire la classe accessibles sur le site Eduscol.

Le candidat dispose pour sa présentation d'un vidéoprojecteur.

En conséquence, on ne trouvera plus de rétroprojecteur en salle d'interrogation.

Il est important de préciser que le recours à l'informatique ne doit pas être considéré comme une fin en soi. La prestation du candidat n'est pas appréciée en fonction de sa virtuosité dans l'utilisation de tel ou tel logiciel. Il s'agit bien de tirer profit de cet outil à des fins pédagogiques, en vue d'illustrer ou enrichir la présentation d'une notion.

LEÇON 1

Résolution de problèmes à l'aide des graphes

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale ES Spécialité Math

Prérequis Les définitions de base d'un graphe

Références [1, 2, 3, 4]

Contenu de la leçon

1 Coloration d'un graphe

On se donne un graphe $G = (S, A)$ et le but de l'activité est de trouver en combien de couleurs minimum on peut colorier le graphe.

Définition 1.1. *On dit qu'on colorie un graphe si on affecte une couleur à chacun de ses sommets de façon à ce que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.*

Définition 1.2 (Nombre de chromatique)**.** *On appelle* nombre chromatique *d'un graphe G, le plus petit nombre de couleurs permettant de le colorer. On note $\gamma(G)$ le nombre chromatique de G.*

Propriété 1.3. *Soit un graphe G. S'il existe un sous-graphe de G complet d'ordre p alors le nombre chromatique $\gamma(G)$ de G vérifie la relation $\gamma(G) \geq p$.*

Algorithme 1.4 (Algorithme de Welsh/Powell)**.** *Soit G un graphe. L'algorithme de Welsh/Powell a pour but de :*

- *déterminer le degré de chaque sommet*
- *ranger dans un tableau les sommets par ordre de degrés décroissants.*

Etape 1 *On attribue une couleur C_1 au premier sommet de la liste.*

Etape 2 *Puis, en suivant la liste, on attribue cette couleur C_1* ***à tous les sommets qui ne lui sont pas adjacents et qui ne sont pas adjacents entre eux.***

Etape 3 *On attribue une couleur C_2 au premier sommet non coloré et on recommence comme à l'étape 2.*

C'est un algorithme glouton, c'est-à-dire qu'étape par étape, on essaie de faire un choix optimal local pour espérer obtenir un résultat optimum global.

Théorème 1.5 (Vizing, admis)**.** *Soit G un graphe et soit Δ le plus grand des degrés. Alors le nombre chromatique $\gamma(G)$ est inférieur ou égal à $\Delta + 1$; soit $\gamma(G) \leq \Delta + 1$.*

2 Recherche du plus court chemin

Définition 1.6. *Soit $G = (S, A)$ avec $S = (s_1, \dots, s_n)$. Pondérer un graphe est équivalent à se donner une fonction $f : S \times S \to \mathbb{R}$ tel que $f(s_i, s_j)$ est la longueur de l'arête qui relie le sommet s_i au sommet s_j.*

On se place dans le cadre de graphe pondéré. Dans cette section, on va étudier l'algorithme de Dijsktra

Algorithme 1.7 (Algorithme de Dijsktra). *Soit G un graphe pondéré.*

1. *On trace un tableau avec autant de colonnes qu'il y a de sommets dans le graphe G. La première colonne est réservée au sommet de départ.*
2. *Dans la ligne suivante, on met 0 dans la première colonne et ∞ dans les colonnes suivantes pour indiquer que l'on commence l'algorithme (on part du sommet de départ et on n'avance pas vers d'autres sommets (sommets inaccessibles))*
3. *On met les valeurs des chemins qui partent du sommet qu'on a gardé précédemment vers les autres arêtes (sans se préoccuper des sommets déjà traités)*
4. *On entoure l'arête qui a la longueur minimale et on garde le sommet qui constitue le but de l'arête*
5. *On recommence à l'étape 3 jusqu'à tant qu'il n'y a plus d'arêtes à traiter.*

Ainsi on se constitue une suite de sommets qui sera notre chemin de longueur minimale.

Remarque 1.8. L'algorithme de Dijsktra peut se mettre en œuvre quand le graphe est connexe et que la valeur aux arêtes est positif ou nul.

3 Graphe probabiliste

Définition 1.9 (Graphe probabiliste). *On dit qu'un graphe est* probabiliste *si le graphe est orienté, pondéré et que les poids figurant sur chaque arête est un nombre réel dans l'intervalle $[0,1]$ et que la somme des poids des arêtes sortant de chaque sommet est égale à 1.*

Mathématiquement, on dit qu'un graphe $G=(S,A)$ est probabiliste s'il existe une fonction $f: S\times S\to[0,1]$ tel que

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} f(s_i,s_j)=1.$$

Exemple 1.10. On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs » et « non-fumeurs »
- 60% des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
- 10% des descendants de non fumeurs sont des fumeurs.

À la génération 1, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs. Ce problème peut se modéliser grâce à un graphe probabiliste.

Définition 1.11. *On appelle la* matrice de transition *(notée M) du graphe probabiliste, la matrice dont le terme de la i^e colonne et de la j^e colonne est égal au poids de l'arête allant du sommet s_i au sommet s_j si elle existe et à 0 sinon.*

Exemple 1.12. La matrice de transition à l'étape 0 de l'exemple précédent est :

$$M=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\ 0,1 & 0,9\end{pmatrix}$$

Théorème 1.13. *Soit P_0 la matrice représentant l'état probabiliste initial et P_n la matrice représentant l'état probabiliste à l'étape n, alors $P_n=P_0M^n$.*

Définition 1.14. *On dit que P est un état stable si $P=PM$.*

Exemple 1.15. On cherche l'état stable dans l'exemple 1.10. Pour cela on pose $P=(a,b)$ (avec a,b positifs et $a+b=1$) et on résout l'équation matricielle $PM=P$:

$$(a,b)\times\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\ 0,1 & 0,9\end{pmatrix}=(a,b)$$

d'où

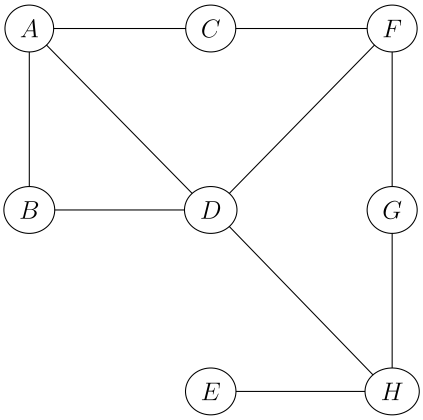
$$\begin{cases} a+b=1\\ 0,6a+0,1b=a\\ 0,4a+0,9b=b\end{cases}$$

et ainsi, on trouve $a = 0,2$ et $b = 0,8$.

Théorème 1.16 (Hors programme). *Pour toute matrice de transition M, il existe un état stable (c'est-à-dire qu'il existe P tel que $P = PM$).*

Compléments

Exemple d'application de l'algorithme de Welsh/Powell. Soit à colorier le graphe suivant :



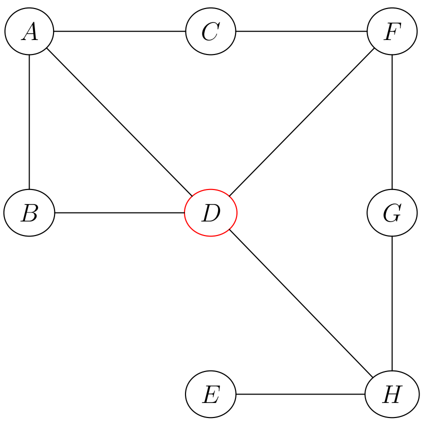
On va donner une approximation du nombre chromatique. Avant tout de chose, on sait que d'après le théorème de Vizing, $\gamma(G) \leq 5$. On va utiliser l'algorithme de Welsh/Powell pour en déduire une minoration. Dans un premier temps, on range les sommets et leur degré dans un tableau :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré	3	2	2	4	1	2	2	3

On range ainsi les sommets par ordre décroissant des degrés (l'ordre n'a pas d'importance) :

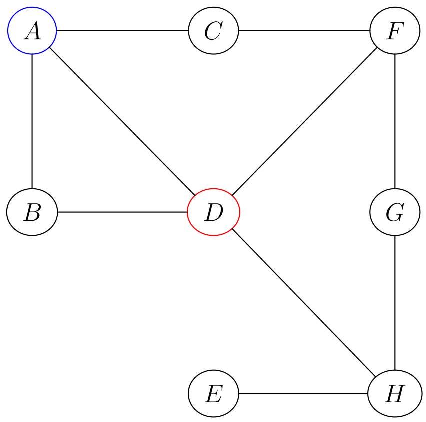
Sommet	D	A	H	B	C	F	G	E
Degré	4	3	3	3	2	2	2	1

On commence par appliquer à D la couleur rouge :



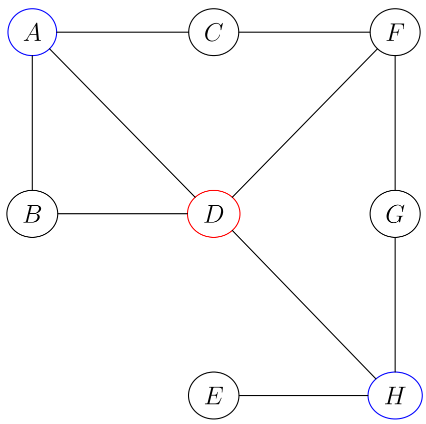

```
R = {D}
```

On traite ensuite le sommet A (classé deuxième dans le tableau précédent). Le sommet A est relié au sommet D donc on doit lui attribuer une deuxième couleur, disons bleue.



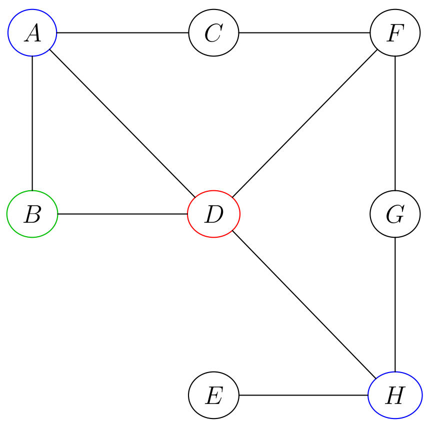
`R = {D}, B = {A}`

On traite le sommet H. Il n'est pas relié à A mais est relié à D donc on peut lui appliquer la couleur bleue.



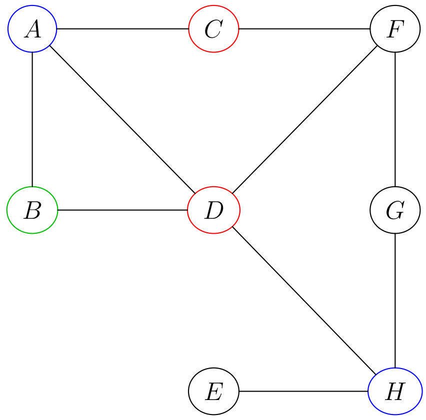
`R = {D}, B = {A,H}`

On traite le sommet B. Il est relié au sommet A et au sommet D donc on doit lui appliquer une autre couleur, disons verte.



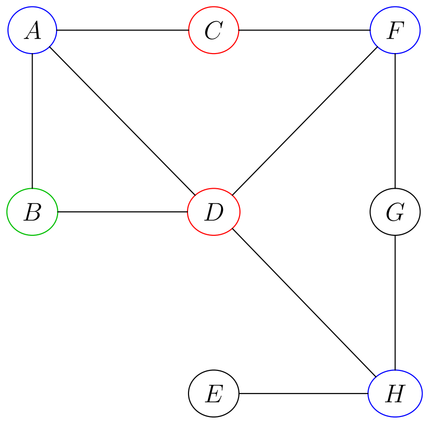
`R = {D}, B = {A,H}, V = {B}`

On traite le sommet C. Il n'est pas relié à D mais est relié à A donc on peut lui appliquer la couleur rouge.



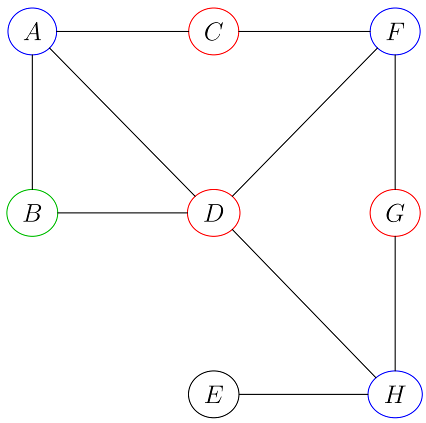
`R = {D,C}, B = {A,H}, V = {B}`

On traite le sommet F. Il est relié au sommet C mais n'est pas relié aux sommets A et H donc on peut lui appliquer la couleur bleue.



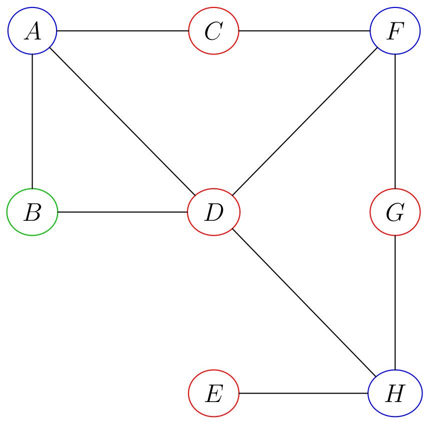
`R = {D,C}, B = {A,H,F}, V = {B}`

On traite le sommet G. Il est relié aux sommets F et H mais n'est pas relié aux sommets C et D donc on peut lui appliquer la couleur rouge.



`R = {D,C,G}, B = {A,H,F}, V = {B}`

On traite le sommet E. Il est relié au sommet H mais n'est pas relié aux sommets C, D et G donc on peut lui appliquer la couleur rouge.



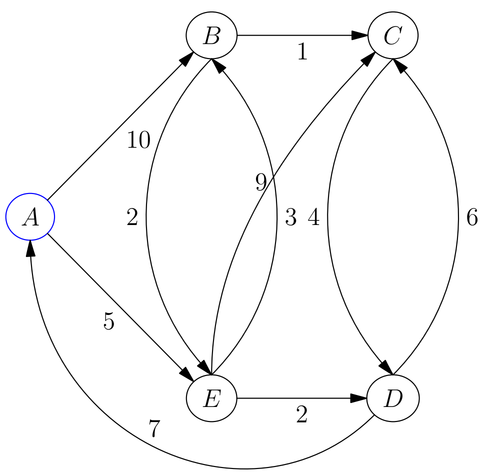

```
R = {D,C,G,E}, B = {A,H,F}, V = {B}
```

Ainsi,

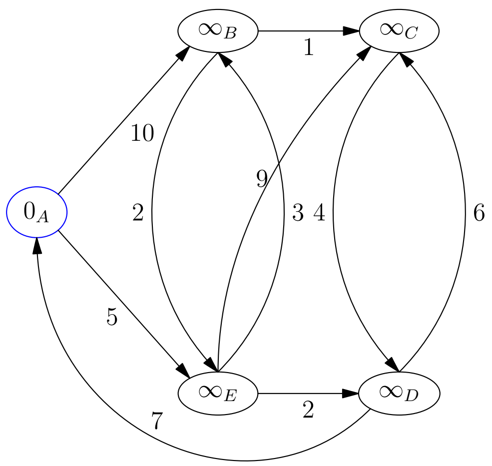
$$3 \leq \gamma(G) \leq 5.$$

□

Exemple d'application de l'algorithme de Dijsktra. On se donne le graphe suivant et on cherche les plus courts chemins (de source A).

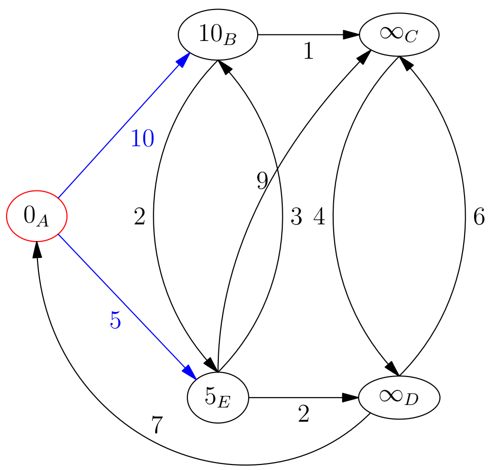


On se place sur le sommet de plus petit poids (ici, c'est le sommet A) et on construit le tableau suivant :



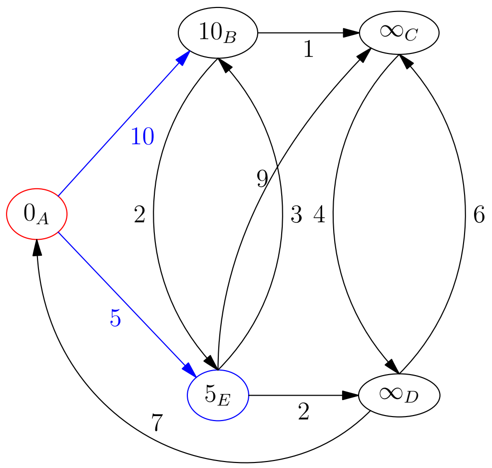
A	B	C	D	E
0	∞	∞	∞	∞
•				
•				
•				
•				

On étudie chacune des arêtes partant du sommet choisi. Dans les colonnes, on met la distance à A et le sommet d'où l'on vient.



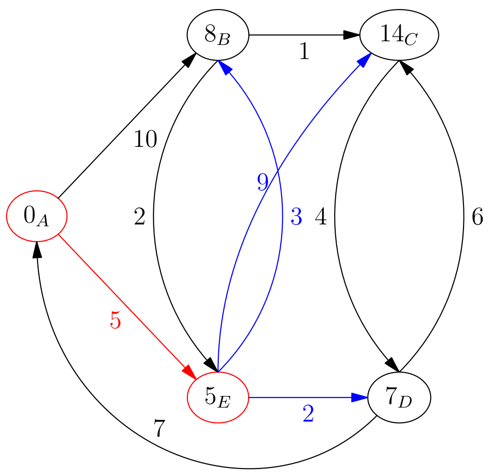
A	B	C	D	E
0	∞	∞	∞	∞
•	10_A	∞	∞	5_A
•				
•				
•				
•				

On se place de nouveau au sommet du plus petit poids, ici E.

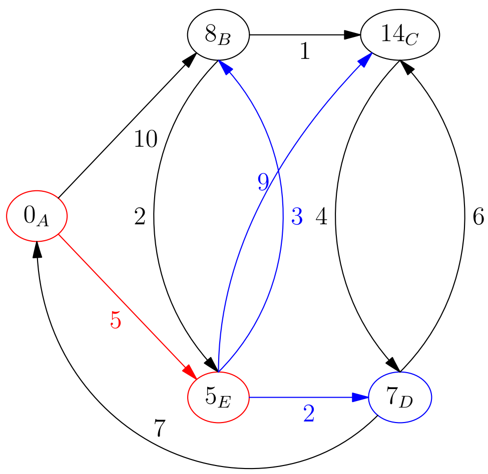


A	B	C	D	E
0	∞	∞	∞	∞
•	10_A	∞	∞	$\boxed{5_A}$
•				•
•				•
•				•

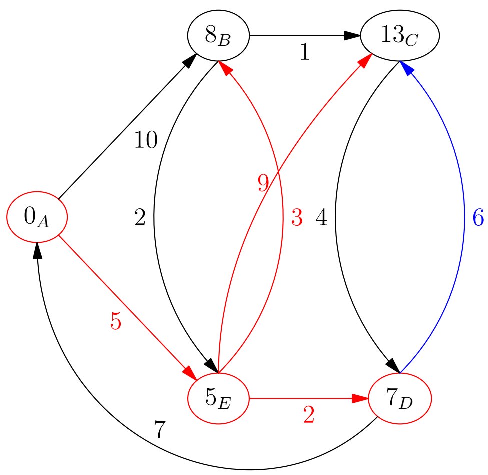
Et ainsi de suite.



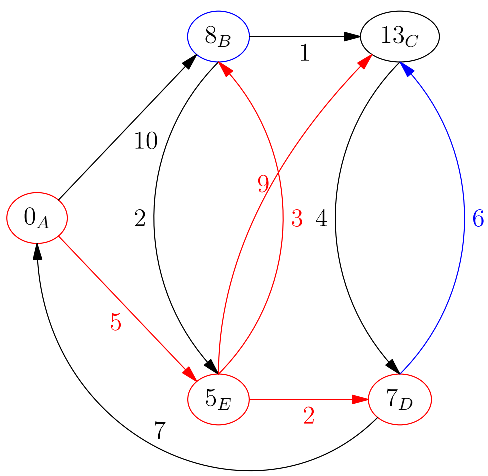
A	B	C	D	E
0	∞	∞	∞	∞
•	10_A	∞	∞	$\boxed{5_A}$
•	8_E	14_E	7_E	•
•				•
•				•



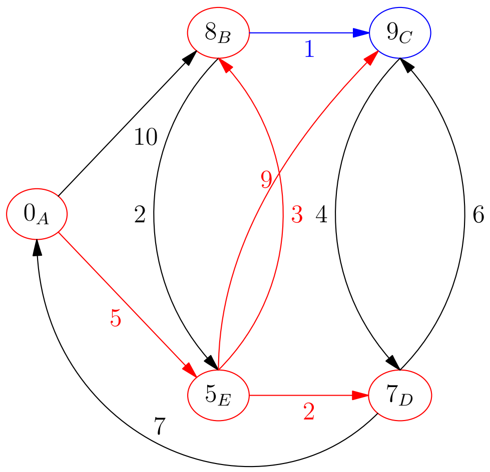
A	B	C	D	E
0	∞	∞	∞	∞
•	10_A	∞	∞	5_A
•	8_E	14_E	$\boxed{7_E}$	•
•			•	•
•			•	•



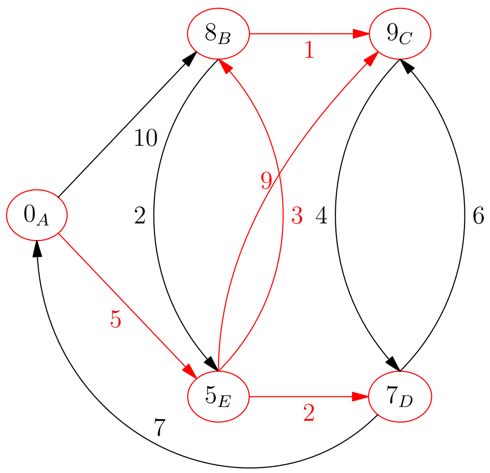
A	B	C	D	E
0	∞	∞	∞	∞
•	10_A	∞	∞	5_A
•	8_E	14_E	$\boxed{7_E}$	•
•	8_E	13_D	•	•
•			•	•



A	B	C	D	E
0	∞	∞	∞	∞
•	10_A	∞	∞	5_A
•	8_E	14_E	7_E	•
•	$\boxed{8_E}$	13_D	•	•
•	•		•	•



A	B	C	D	E
0	∞	∞	∞	∞
•	10_A	∞	∞	5_A
•	8_E	14_E	7_E	•
•	8_E	13_D	•	•
•	•	$\boxed{9_B}$	•	•



A	B	C	D	E
0	∞	∞	∞	∞
•	10_A	∞	∞	5_A
•	8_E	14_E	7_E	•
•	8_E	13_D	•	•
•	•	9_B	•	•

$\square$

Démonstration. Soit $P = (\alpha, \beta)$ et $M = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$. On dit que λ est valeur propre de M si $PM = \lambda P$. Donc $PM = P$ si et seulement si 1 est valeur propre de M. On regarde le polynôme caractéristique de M :

$$\begin{aligned}\chi_M(X) &= X^2 - \operatorname{tr}(M^T) + \det M \\ &= X^2 - (a+1-b)X + a(1-b) - b(1-a) \\ &= X^2 - (a+1-b)X + a - b\end{aligned}$$

1 est racine de $\chi_M(X)$ car :

$$1 - (a+1-b) - a - b = 0.$$

$\square$

LEÇON 2

Techniques de dénombrement

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S

Prérequis Théorie des ensembles

Références [5, 6, 7]

Contenu de la leçon

Dans cette leçon, il s'agit de donner des formules qui permet de compter des objets. On va fournir des méthodes de dénombrements qui seront utiles en théorie des probabilités. L'exemple le plus important est, de loin, la démonstration du binôme de Newton qu'on utilisera pour le calcul des probabilités d'une loi binomiale.

1 Principe de multiplication et d'addition

On dispose de k cases distinctes et l'on désire placer un objet dans chacune de cases. Le choix du

- 1er objet se fait parmi les objets d'un ensemble A_1
- 2e objet se fait parmi les objets d'un ensemble A_2
- ...
- ke objet se fait parmi les objets d'un ensemble A_k.

On cherche le nombre de possibilités pour ce problème. Pour cela, on va utiliser une méthode de dénombrement qu'on appelle principe de multiplication.

1.1 Principe de multiplication

Définition 2.1 (Principe de multiplication). *Soit k ensembles $(A_1, \dots, A_k)$ de cardinal $(n(A_1), \dots, n(A_k))$ et un damier à k cases. Le nombre de façons différentes de placer un objet de A_i dans la ie case (pour $1 \leq i \leq k$) est donné par la formule suivante :*

$$n(A_1) \times n(A_2) \times \cdots \times n(A_k).$$

Exemple 2.2. On lance une pièce quatre fois. Il y a $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$ résultats possibles.

1.2 Principe d'addition

Définition 2.3 (Principe d'addition). *Si E, A et B sont trois ensembles tels que*

$$E = A \cup B \quad \text{et} \quad A \cap B = \emptyset$$

alors

$$n(E) = n(A) + n(B).$$

2 Arrangements

Exemples 2.4.

1. Combien y-a-t-il de façons pour former un mot de 5 lettres (avec ou sans signification) avec les 26 lettres de l'alphabet ?
2. Combien y-a-t-il de possibilités de tiercé dans l'ordre lors d'une course de 20 chevaux ?

Pour répondre aux question des exemples précédents, nous avons besoin de compter le nombre *d'arrangement* de p objets parmi les n objets.

Définition 2.5 (Arrangement)**.** *Soit E un ensemble de n objets. On appelle* arrangements *de p objets, toutes suites ordonnées de p objets parmi les n objets. Le nombre d'arrangements de p objets pris parmi n est noté : A_n^p.*

Remarques 2.6.

1. Si $n < p$ alors $\mathrm{A}_n^p = 0$.
2. Deux arrangements de p objets sont distincts s'ils diffèrent par la nature des objets qui les composent ou par leur ordre dans la suite.

On donne quand même des réponses aux questions précédentes :

Exemples 2.7.

1. Il s'agit du nombre d'arrangements possibles avec $p = 5$ et $n = 26$.
2. Il s'agit du nombre d'arrangements possibles avec $p = 3$ et $n = 20$.

On distingue les arrangements avec répétition et les arrangements sans répétition.

2.1 Arrangement avec répétition

Proposition 2.8. *Lorsqu'un objet peut être observé plusieurs fois dans un arrangement, le nombre d'arrangement avec répétition de p objets pris parmi n, est alors :*

$$\mathrm{A}_n^p = n^p \quad \textit{avec } 1 \leq p \leq n.$$

Exemple 2.9. Une séquence d'ADN est constituée d'un enchaînement de 4 nucléotides [A,C,G,T]. Si l'on fait l'hypothèse qu'une base peut être observée plusieurs fois dans la séquence est de :

$$\mathrm{A}_4^2 = 4^2 = 16 \text{ dinucléotides possibles.}$$

2.2 Arrangement sans répétition

Définition 2.10 (Factorielle)**.** *Soit n un entier naturel non nul. On appelle factorielle du nombre n, le produit suivant :*

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = n \times (n-1) \times \cdots 2 \times 1.$$

Par convention, on note $0! = 1$.

Proposition 2.11. *Lorsque chaque objet ne peut être observé qu'une seule fois dans un arrangement, le nombre d'arrangements possibles sans répétition de p objets pris parmi n est alors :*

$$\mathrm{A}_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \textit{avec } 1 \leq p \leq n.$$

Exemple 2.12. Pour répondre à la dernière question du premier exemple, le nombre de tiercé possible dans une course de 20 chevaux est :

$$\mathrm{A}_{20}^3 = \frac{20!}{17!} = 20 \times 19 \times 18 = 6\,840.$$

3 Permutations

Définition 2.13. *Soit E un ensemble de n objets. Une* permutation *de n objets distincts est une suite ordonnée de n objets. Le nombre de permutations de n objets est noté $P_n = n!$.*

Remarque 2.14. Une permutation de n objets peut être assimilé à un arrangement à n objets. Ainsi, le nombre de permutations de n objets est :

$$\mathrm{A}_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!.$$

Exemples 2.15. 1. Dans une salle de classe, il y a 30 chaises. Pour une classe de 30 élèves, il y a $30!$ plans de classe possibles.

2. Il y a 6 anagrammes possibles pour le mot ZOÉ.

À propos du premier exemple, $30! = 2,65 \times 10^{32}$ est un nombre très grand. En effet, quand n dépasse la dizaine, $n!$ se compte en millions. Pour donner une approximation de $n!$ quand n est assez grand, on peut utiliser la formule suivante :

Proposition 2.16 (Formule de Stirling, hors programme)**.** *Pour tout $n \geq 1$,*

$$n! \approx n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

4 Combinaisons

Définition 2.17 (Combinaisons)**.** *Soient n et p deux entiers naturels et E un ensemble contenant n éléments. Un sous-ensemble de E contenant p éléments est appelé une* combinaison *de p éléments de E.*

Le nombre de p-combinaisons d'un ensemble contenant n éléments est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$.

Exemple 2.18. Pour gagner au Loto, il faut trouver 3 numéros parmi 5. On veut savoir combien il y a de grilles possibles. Considérons une grille quelconque (c'est-à-dire une 3-combinaison de l'ensemble des 5 numéros) : par exemple $\{1, 3, 4\}$. Il y a $3!$ façons possibles d'ordonner ces nombres. Or, il y a $\mathrm{C}_5^3 \times 3!$ suites de 3 nombres ordonnées. Mais, on compte $5 \times 4 \times 3$ de ces dernières suites. Donc :

$$\mathrm{C}_5^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3!}.$$

On peut maintenant généraliser la formule :

Proposition 2.19. *Le nombre de p-combinaisons d'un ensemble contenant n éléments est noté*

$$\mathrm{C}_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot(n-(p-1))}{p!} \tag{2.1}$$

$$= \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{2.2}$$

Définition 2.20 (Coefficients binomiaux)**.** *Soit p un entier naturel non nul. Les nombres C_n^p sont appelés les* coefficients binomiaux.

On donne les propriétés de combinaisons dans la **leçon 3 : Coefficients binomiaux** ainsi que le triangle de Pascal et le binôme de Newton.

Compléments

Démonstration de la prop. 2.8. Pour le premier objet tiré, il existe n manières de ranger l'objet parmi n. Pour le second objet tiré, il existe également n possibilités d'arrangements car le premier objet fait parti des n objets. On parle de *tirage avec remise*. Ainsi, pour les p objets tirés, il y aura $n \times n \times \cdots \times n$ (p fois) arrangements possibles, soit :

$$\mathrm{A}_n^p = n \times n \times \cdots \times n = n^p.$$

□

Démonstration de la prop. 2.11. Pour le premier objet tiré, il y a n manières de ranger l'objet parmi n. Pour le second objet tiré, il n'existe plus que $n-1$ manières de ranger l'objet car le premier objet ne peut plus être pris en compte. On parle de tirage sans remise. Ainsi, pour les p objets tirés parmi n, si $1 \leq p \leq n$, il y aura :

$$\mathrm{A}_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1).$$

De plus,

$$\mathrm{A}_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)\frac{(n-p)\times\cdots\times 2\times 1}{(n-p)\times\cdots\times 2\times 1},$$

d'où

$$\mathrm{A}_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

□

Démonstration de la prop. 2.19. On part de la formule (2.1) pour arriver à la formule (2.2) :

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_n^p &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!}\frac{(n-p)(n-p-1)\cdots 2\times 1}{(n-p)(n-p-1)\cdots 2\times 1} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!}\end{aligned}$$

Une autre façon de voir la formule (2.2). Il y a A_n^p manières de tirer p objets parmi n en les ordonnant soit

$$\mathrm{A}_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Une fois les p objets tirés, il y a $p!$ manières de les ordonner. Il y a donc $\frac{\mathrm{A}_n^p}{p!}$ manières de tirer p objets parmi sans les ordonner. D'où

$$\mathrm{C}_n^p = \frac{\mathrm{A}_n^p}{p!} = \frac{1}{p!}\frac{n!}{(n-p)!}.$$

□

LEÇON

3 Coefficients binomiaux

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S

Prérequis Cardinal d'un ensemble fini, arrangements, raisonnement par récurrence, arithmétique dans $\mathbb{Z}$, probabilités.

Références [8, 9, 10]

Contenu de la leçon

1 Définitions et propriétés

Définition 3.1 (Combinaisons)**.** *Soient n et p deux entiers naturels et E un ensemble contenant n éléments. Un sous-ensemble de E contenant p éléments est appelé une* combinaison *de p éléments de E.*

Le nombre de p-combinaisons d'un ensemble contenant n éléments est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$.

Exemple 3.2. Pour gagner au Loto, il faut trouver 3 numéros parmi 5. On veut savoir combien il y a de grilles possibles. Considérons une grille quelconque (c'est-à-dire une 3-combinaison de l'ensemble des 5 numéros) : par exemple $\{1, 3, 4\}$. Il y a $3!$ façons possibles d'ordonner ces nombres. Or, il y a $\mathrm{C}_5^3 \times 3!$ suites de 3 nombres ordonnées. Mais, on compte $5 \times 4 \times 3$ de ces dernières suites. Donc :

$$\mathrm{C}_5^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3!}.$$

On peut maintenant généraliser la formule :

Proposition 3.3. *Le nombre de p-combinaisons d'un ensemble contenant n éléments est noté*

$$\mathrm{C}_n^p = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot (n-(p-1))}{p!} \tag{3.1}$$

$$= \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{3.2}$$

Définition 3.4 (Coefficients binomiaux)**.** *Soit p un entier naturel non nul. Les nombres C_n^p sont appelés les* coefficients binomiaux.

2 Triangle de Pascal

Proposition 3.5 (Formule de Pascal)**.** *Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tel que $p < n$. On a :*

$$\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_{n-1}^p + \mathrm{C}_{n-1}^{p-1}.$$

Proposition 3.6 (Formule itérée de Pascal)**.** *Soit $p \leq n$ deux entiers naturels. Alors*

$$\sum_{k=p}^{n} \mathrm{C}_p^k = \mathrm{C}_{n+1}^{p+1}.$$

$n\backslash p$	0	1	2	3	$\cdots$
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

FIGURE 3.1 – Triangle de Pascal

3 Formule du binôme de Newton

On note $A = \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}$).

Théorème 3.7 (Formule du binôme)**.** *Soient deux éléments a, b de A qui commutent. Alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}.$$

Remarque 3.8. Certains auteurs, par exemple dans [6], définissent le coefficient binomial comme le coefficient du monôme $a^k b^{n-k}$ dans le développement de l'expression $(a+b)^n$ en remarquant que ce développement est homogène en a et b.

Corollaire 3.9. *On a les égalités suivantes :*

1. $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k = 2^n$,
2. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k = 0$.

Remarque 3.10. On remarque que l'égalité 1 du corollaire 3.9 traduit le fait que le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n. En effet, ce nombre est la somme des nombres de parties ayant respectivement $0, 1, \dots$ éléments (le cardinal d'une union disjointe est la somme des cardinaux), ce qui correspond bien à la somme indiquée.

4 Applications

4 1 Un exemple en dénombrement

Exemple 3.11. On tire au hasard 5 cartes d'un jeu en comptant 32. Il y a

- $\mathrm{C}_4^3 \times \mathrm{C}_{28}^2 = 1\,512$ tirages possibles qui contient exactement trois rois.
- $\mathrm{C}_4^3 \times \mathrm{C}_{28}^2 + \mathrm{C}_4^4 \times \mathrm{C}_{28}^1 = 1\,540$ tirages contenant au moins trois rois.
- $\mathrm{C}_8^2 \times \mathrm{C}_8^3 = 1\,568$ tirages contenant deux cœurs et trois piques.

4 2 Sommes

La formule itérée de Pascal permet de déterminer des sommes de la forme $\sum_{k=0}^{n} k^p$ pour un certain p donné. Dans ce qui suit, on voit un exemple pour $p = 1$ et $p = 2$:

Exemple 3.12. $p = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_k^1 = \mathrm{C}_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$p = 2$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_k^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{2!(n-2)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \mathrm{C}_{n+1}^3,$$

les premières égalités étant du calcul formel, et la dernière application de la formule itérée de Pascal. On en tire alors (connaissant le résultat pour $p=1$) :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k^2 = \mathrm{C}_{n+1}^{3} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4 3 Linéarisation trigonométrique

Exemple 3.13. Pour linéariser $\sin^3(x)$, on doit faire :

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = \frac{1}{8\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^3 \\
&= -\frac{1}{8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{C}_3^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{C}_3^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right) \\
&= -\frac{1}{8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} - 3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\right) = -\frac{1}{4}(\sin(3x) - 3\sin x).
\end{aligned}$$

4 4 Petit théorème de Fermat

Lemme 3.14. *Soit p un nombre premier et $k < p$ alors $p \mid \mathrm{C}_p^k$.*

Théorème 3.15 (Petit théorème de Fermat)**.** *Soient p un entier naturel premier et $a \in \mathbb{Z}$. Alors $a^p \equiv a \pmod{p}$.*

4 5 Formule de Van der Monde

Proposition 3.16. *Pour tous entiers m, n et p tels que $p \leq m+n$, on a l'égalité :*

$$\mathrm{C}_{m+n}^{p} = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_m^k \mathrm{C}_n^{p-k}.$$

4 6 Un peu de probabilité

Loi binomiale Le résultat d'un tirage de Bernoulli donne deux valeurs :
- « Vrai » avec la probabilité p,
- « Faux » avec la probabilité $q = 1-p$.

Quand on effectue une *suite* de n tirages de Bernoulli, *indépendants* mais de *même loi*, on obtient l'arborescence de la figure 3.3 ($n=3$) Le modèle de Bernoulli ne s'intéresse pas aux

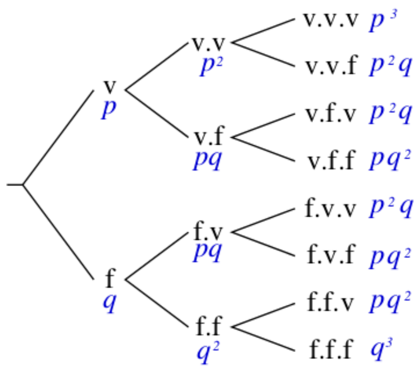


FIGURE 3.2 – Arborescence sur une suite de 3 tirages de Bernoulli

« suites » de tirages mais au résultat global, indépendant de l'ordre. Certains diront que les tirages sont simultanés.
La probabilité de l'événement « $\{v, v, f\}$ » est alors la somme des probabilités des trois événements disjoints « $\{v, v, f\}$ », « $\{v, f, v\}$ » et « $\{f, v, v\}$ », soit $\mathrm{C}_3^2 p^2 q^{3-2}$.
On dit que la variable aléatoire qui à l'entier k associe la probabilité $P(k) = \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}$, d'obtenir k résultats « Vrai » sur n tirages de Bernoulli suit une loi binomiale.

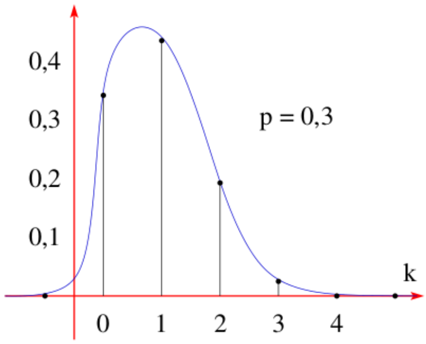


FIGURE 3.3 – Représentation de la loi étudiée pour $p = 0{,}3$. En trait bleu, l'allure estimée de la courbe.

Calcul de moments Pour calculer les moments d'une loi binomiale $X(n, p)$, on part de l'identité

$$(x+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k q^{n-k}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

En dérivant l'identité (3.3) par rapport à x, nous obtenons l'identité (3.4) :

$$n(x+q)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k x^{k-1} q^{n-k}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

En particulier, pour $x = p$, on en déduit la *moyenne*, $\overline{X}$, de la loi binomiale X :

$$n = \sum_{k=1} k\mathrm{C}_n^k p^{k-1} q^{n-k} \Rightarrow \overline{X} = np.$$

En dérivant l'identité (3.4) par rapport à x, nous obtenons les identités (3.5) et (3.6) :

$$n(n-1)(x+q)^{n+2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathrm{C}_n^k x^{k-2} q^{n-k}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

$$n(n-1)p^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}. \tag{3.6}$$

Nous en déduisons la variance de X : $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

Compléments

Démonstration de la proposition 3.3. On part de la formule (3.1) pour arriver à la formule (3.2) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_n^p &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!} \frac{(n-p)(n-p-1)\cdots 2\times 1}{(n-p)(n-p-1)\cdots 2\times 1} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!}
\end{aligned}$$

Une autre façon de voir la formule (3.2). Il y a A_n^p manières de tirer p objets parmi n en les ordonnant soit

$$\mathrm{A}_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Une fois les p objets tirés, il y a $p!$ manières de les ordonner. Il y a donc $\frac{\mathrm{A}_n^p}{p!}$ manières de tirer p objets parmi sans les ordonner. D'où

$$\mathrm{C}_n^p = \frac{\mathrm{A}_n^p}{p!} = \frac{1}{p!}\frac{n!}{(n-p)!}.$$

□

Démonstration de la formule de Pascal. Soit un ensemble E à n éléments. On suppose que l'on a « extrait » une partie à p éléments. Si l'on retire un élément $\{a\}$ à E, c'est soit un élément de la combinaison, soit non. Dans le premier cas, les $p-1$ restants forment une partie de l'ensemble $E\setminus\{a\}$ de cardinal $n-1$, et dans le second, ce sont les p éléments qui forment une partie de $E\setminus\{a\}$. Cette union étant disjointe, les cardinaux s'ajoutent pour aboutir à l'égalité demandée. □

Démonstration de la formule itérée de Pascal. On effectue une récurrence sur l'entier n.

Initialisation Lorsque $n = p$, les deux membres valent 1.

Hérédité On suppose que la formule est vraie au rang n et on montre qu'elle est encore vraie au rang $n+1$:

$$\sum_{k=p}^{n+1} \mathrm{C}_k^p = \sum_{k=p}^{n} \mathrm{C}_k^p + \mathrm{C}_p^{k+1}$$

et d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=p}^{n+1} \mathrm{C}_k^p = \mathrm{C}_{n+1}^{p+1} + \mathrm{C}_{n+1}^p = \mathrm{C}_{n+2}^{p+1}.$$

La dernière égalité est justifiée par l'emploi de la formule de Pascal.

□

Démonstration de la formule du binôme de Newton. On démontre la formule par récurrence sur n.

Initialisation Lorsque $n = 0$, les deux membres sont égaux à 1 (avec le cas échéant la convention $0^0 = 1$).

Hérédité On suppose que la formule est vraie au rang n et on montre qu'elle est encore vraie au rang $n+1$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{C}_n^{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^{k-1} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k+1} \\
&= \mathrm{C}_{n+1}^0 a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k) a^k b^{n+1-k} + \mathrm{C}_{n+1}^{n+1} a^{n+1} b^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k a^k b^{n-k}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité utilise la formule de Pascal pour l'addition des deux coefficients binomiaux.

□

Démonstration du corollaire 3.9. 1. On utilise le binôme de Newton avec $a = 1$ et $b = 1$.

2. On utilise le binôme de Newton avec $a = -1$ et $b = 1$.

□

Démonstration du lemme 3.14. On a :

$$\mathrm{C}_p^k = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!} \Leftrightarrow k!\mathrm{C}_p^k = p(p-1)\cdots(p-k+1).$$

Comme p est premier, il est premier avec tout entier le précédent donc $\mathrm{PGCD}(p,k) = 1$ et il vient que p ne divise pas $k!$. Par le lemme de Gauss, il s'ensuit que p divise C_p^k. □

Démonstration du petit théorème de Fermat. On démontre le petit théorème de Fermat par récurrence sur l'entier $a \in \mathbb{N}$.

Initialisation Si $a = 0$, le résultat est évident.

Hérédité Supposons que $(a-1)^p \equiv a-1 \pmod p$.

$$a^p = (a-1+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k (a-1)^k \equiv (a-1)^p + 1 \equiv a-1+1 \equiv a \pmod p.$$

Si $a \in -\mathbb{N}^*$, alors $-a \in \mathbb{N}$, ce qui implique que $(-a)^p \equiv -a \pmod p$. Supposons que $p \neq 2$ de sorte que la condition p premier soit équivalente à dire que p est impair. La relation de congruence précédente devient alors $-a^p \equiv -a \pmod p \Leftrightarrow a^p \equiv a \pmod p$. Enfin, si $p = 2$, alors quelque soit a, l'entier $a^p - a$ est pair, et donc divisible par p.

□

Démonstration de la formule de Van der Monde. Soit x un réel. Alors :

$$(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n} = \sum_{p=0}^{m+n} \mathrm{C}_{m+n}^p x^p.$$

Or

$$\begin{aligned}(1+x)^m(1+x)^n &= \left(\sum_{i=0}^{m} \mathrm{C}_m^i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_n^j x^j\right) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_m^i \mathrm{C}_n^j x^{i+j} \\ &= (\mathrm{C}_m^0\mathrm{C}_n^0) + ((\mathrm{C}_m^0\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_m^1\mathrm{C}_n^0)x) \\ &\qquad + ((\mathrm{C}_m^0\mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_m^1\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_m^2\mathrm{C}_n^0)x^2) + \cdots \\ &= \sum_{p=0}^{m+n}\Big(\big(\sum_{\substack{i,j>0 \\ i+j=p}} \mathrm{C}_m^i\mathrm{C}_n^j\big)x^p\Big).\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de ce polynôme de degré p, on obtient finalement que, pour tout entier $0 \leq p \leq m+n$,

$$\mathrm{C}_{m+n}^p = \sum_{\substack{i,j>0 \\ i+j=p}} \mathrm{C}_m^i\mathrm{C}_n^j = \sum_{i=0}^{p} \mathrm{C}_m^i \mathrm{C}_n^{p-i}.$$

□

LEÇON

4 Expérience aléatoire, probabilité, probabilité conditionnelle

Niveau, prérequis, références

Niveau Première S-Terminale S

Prérequis Théorie des ensembles

Références [11, 12]

Contenu de la leçon

1 Expérience aléatoire, événements

1.1 Expérience aléatoire

Définition 4.1 (Expérience aléatoire)**.** *On dit qu'on fait une expérience de type* aléatoire *si on ne peut pas prévoir le résultat final de cette expérience.*

Exemples 4.2.
1. On lance une pièce et on observe le côté exposé (pile ou face). Il y a deux issues possibles sur cette expérience.
2. On dispose d'une urne avec 100 boules, on tire une d'entre elles et on note le numéro. Cette expérience aléatoire a 100 issues possibles.

Définition 4.3 (Univers)**.** *L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé* univers. *On note généralement cet ensemble Ω.*

Remarque 4.4. Dans cette leçon, on se limitera au cas où Ω est un ensemble fini.

Exemple 4.5. On reprend les expériences de l'exemple précédent.
1. Si on lance une pièce de monnaie, on obtient $\Omega = \{P, F\}$.
2. Si on tire une boule numérotée dans une urne où il en contient 100 alors $\Omega = \{1, 2, \dots, 100\}$.

1.2 Evénement associé à une expérience aléatoire

Dans ce qui suit, nous allons décrire ce qu'est un événement :

Définition 4.6 (Vocabulaire des événements)**.**
- *Un* événement élémentaire *(qu'on note ω) est ce qui constitue l'une des issues de la situation étudiée (un élément de Ω).*
- *Un* événement *est un ensemble de plusieurs issues.*
- *L'événement « A* et *B » (qu'on note $A \cap B$) est l'événement constitué des issues communes aux deux événements.*
- *L'événement « A* ou *B » (qu'on note $A \cup B$) est l'événement constitué des toutes les issues des deux événements.*
- *Deux événements* incompatibles *A et B (qu'on note $A \cap B = \emptyset$) sont deux événements qui n'ont pas d'éléments en commun.*
- *L'événement est dit* contraire *de A (qu'on note $\overline{A}$) si A et $\overline{A}$ sont incompatibles et $A \cup \overline{A}$ forme la totalité des issues.*

Exemples 4.7.
1. Obtenir un 7 est un événement élémentaire : $\omega = \{7\}$.
2. Obtenir un nombre pair est un événement :

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}.$$

3. Obtenir un multiple de trois est un événement :
$$B = \{3, 6, 9, 12\}.$$
4. $A \cap B = \{6, 12\}$.
5. $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$.
6. Si
$$C = \{10, 11, 12\}$$
et
$$D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$
alors $C \cap D = \emptyset$ donc C et D sont incompatibles.
7. Ici, $\overline{A}$ représente l'événement « obtenir une somme impaire ». On a alors :
   - $A \cap \overline{A} = \emptyset$,
   - $A \cup \overline{A} = \Omega$.

2 Probabilités

2.1 Loi de probabilités sur un univers Ω

Définition 4.8. *Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer, à chaque événement élémentaire ω_i, des nombres $p_i \in [0\,,1]$ tels que :*
$$\sum_i p_i = 1.$$
On appelle les nombres p_i, les probabilités *(qu'on peut noter $p_i = P(\omega_i)$).*

Proposition 4.9 (Principe fondamental)**.** *La probabilité $P(E)$ d'un événement E est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.*

Corollaire 4.10. $P(\Omega) = 1$

Exemple 4.11. On se donne les probabilités d'apparition des faces d'un dé truqué :

Issue ω	1	2	3	4	5	6
Probabilités $P(\omega)$	0,05	0,05	0,1	0,1	0,2	inconnue

1. On veut calculer la probabilité de l'événement
$$A = \text{« obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ».}$$
D'après le principe,
$$P(A) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}1.$$
2. On veut calculer la probabilité d'obtenir 6. Le corollaire 4.10 nous donne :
$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$
donc $P(6) = 0{,}5$.

Définition 4.12 (Autre définition)**.** *Soit Ω un univers et $\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{A}$ l'ensemble des parties de Ω (c'est-à-dire l'ensemble de tous les événements associé à cette expérience aléatoire). On appelle* probabilité *P toute application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie :*
1. *$P(\Omega) = 1$*
2. *Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $I \subset \mathbb{N}$ une famille d'événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ deux à deux disjoints (si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \emptyset$) alors :*
$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i).$$

2.2 Propriétés de calcul de probabilités

Propriétés 4.13. *Soient $A, B \subset \Omega$. Alors :*

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2.3 Équiprobabilité

Définition 4.14 (Équiprobabilité)**.** *Si tous les éléments de Ω (l'univers d'une expérience aléatoire) ont la même propriété d'apparition alors Ω est dit* équiprobable*. Si $\Omega = \{a_1, \dots, a_n\}$ alors :*

$$P(\{a_i\}) = \frac{1}{n}, \quad \forall a_i \in \Omega.$$

Propriété 4.15. *Si Ω est équiprobable, la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ contenant n_A éléments est :*

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n_A \text{ fois}} = \frac{n_A}{n} = \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)}.$$

Exemples 4.16. On lance un dé (non truqué) ; $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On est dans le cas d'une équiprobabilité.

1. La probabilité d'avoir un 5 est $P(5) = 1/6$ (5 est un événement élémentaire)
2. La probabilité d'obtenir un nombre pair est :

$$P(\text{« obtention d'un nombre pair »}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

3 Probabilités conditionnelles

3.1 Un exemple pour débuter

Exemple 4.17. On considère une population de 500 individus parmi lesquels il y a 180 femmes et 90 des 500 individus ont l'allèle du daltonisme. On choisit un individu au hasard dans cette population (c'est une expérience aléatoire). On note :

$$F = \text{« l'individu choisi est une femme »}$$
$$D = \text{« l'individu choisi possède l'allèle du daltonisme ».}$$

L'univers Ω est l'ensemble des individus, il est *équiprobable*. Chaque individu a la même probabilité d'être choisi $\frac{1}{500}$. Donc,

$$P(D) = \frac{\operatorname{card}(D)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{90}{500} = 0{,}18.$$

Maintenant, on se restreint à la *sous-population des femmes*. On sait que 9 femmes possèdent l'allèle du daltonisme. L'univers Ω' est l'ensemble des femmes F. Il est équiprobable. Chaque femme a $\frac{1}{180}$ chance d'être choisie.

On cherche la probabilité qu'une femme choisie au hasard possède l'allèle du daltonisme :

$$\frac{\operatorname{card}(D \cap F)}{\operatorname{card}(\Omega')} = \frac{9}{180} = 0{,}05.$$

On note cette probabilité :

$$P_F(D) = \frac{\mathrm{card}(D \cap F)}{\mathrm{card}(F)} = \frac{P(D \cap F)}{P(F)}.$$

3 2 Probabilité conditionnelle

Définition 4.18. *Soit F un événement de probabilité* strictement positive *(c'est-à-dire $F \subset \Omega$ et $P(F) > 0$). On appelle* probabilité conditionnelle *à F, l'application $P_F(\cdot)$ de l'ensemble des événements ($\mathcal{P}(\Omega)$) dans $[0\,,1]$ telle que :*

$$\begin{array}{rccl} P_F & : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0\,,1] \\ & & A & \mapsto & P_F(A) = \frac{P(A\cap F)}{P(F)} \end{array}.$$

Proposition 4.19. *L'application $P_F(\cdot)$ est une probabilité.*

Propriété 4.20 (Probabilités composées)**.** *Soit Ω un univers, F et A deux événements tel que $P(F) > 0$. Alors,*

$$P(A \cap F) = P_F(A) \times P(F) = P_A(F) \times P(A)$$

3 3 Formule des probabilités totales et de Bayes

Propriété 4.21 (Formule des propriétés totales)**.** *Soit $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ une partition de Ω d'événements non vides. Soit $A \subset \Omega$. Alors :*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P_{E_i}(A) \times P(E_i).$$

Exemple 4.22. On considère deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 6 boules rouges et 4 boules vertes et l'urne U_2 contient 7 boules vertes et 3 boules rouges. On lance un dé. S'il indique le chiffre 1, on choisit l'urne U_1 sinon on choisit l'urne U_2. On effectue ensuite deux tirages avec remise. On cherche la probabilité d'avoir tiré deux rouges en tout. On note :

$$R = \{\text{rouge au 1}^{\text{er}} \text{ tirage}\}\,, \quad R' = \{\text{rouge au 2}^{\text{e}} \text{ tirage}\}$$

$$H_1 = \{\text{choix de l'urne } U_1\}\,, \quad H_2 = \overline{H}_1 = \{\text{choix de l'urne } H_2\}\,.$$

On a ainsi :

$$P_{H_1}(R) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \quad P_{H_1}(R \cap R') = \left(\frac{3}{5}\right)^2.$$

$$P_{H_2}(R) = \frac{3}{10}, \quad P_{H_2}(R \cap R') = \left(\frac{3}{10}\right)^2.$$

La formule de conditionnement donne :

$$\begin{aligned} P(R) &= P_{H_1}(R)P(H_1) + P_{H_2}(R)P(H_2) \\ &= \frac{1}{6}\frac{3}{5} + \frac{5}{6}\frac{3}{10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} = \frac{4+10}{40} = \frac{7}{20}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(R \cap R') &= P_{H_1}(R \cap R')P(H_1) + P_{H_2}(R \cap R')P(H_2) \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{5}{6}\left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{27}{200}. \end{aligned}$$

Propriété 4.23 (Formule de Bayes)**.** *Soit $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ une partition de Ω d'événements non vides. Soit $A \subset \Omega$. Alors :*

$$P_A(E_i) = \frac{P_{E_i}(A) \times P(E_i)}{\sum_{i=1}^n P_{E_i}(A) \times P(E_i)}.$$

Exemple 4.24. Un test sanguin a une probabilité de $0{,}95$ de détecter un certain virus lorsque celui-ci est effectivement présent. Il donne néanmoins un faux résultat positif pour 1% des personnes non infectées. On cherche la probabilité ait le virus sachant qu'elle est positif (et on sait que $0{,}5\%$ de la population est porteuse du virus). On note :

$$\begin{aligned} V &= \{\text{la personne testée a le virus}\}, \\ T &= \{\text{la personne testée a un test positif}\}. \end{aligned}$$

On cherche $P_T(V)$. Or, on sait que :

$$P(V) = 0{,}005, \quad P_V(T) = 0{,}95, \quad P_{\overline{V}}(T) = 0{,}01.$$

On en déduit par la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} P_T(V) &= \frac{P(T \cap V)}{P(T)} = \frac{P_V(T)P(V)}{P_V(T)P(V) + P_{\overline{V}}(T)P(\overline{V})} \\ &= \frac{0{,}95 \times 0{,}005}{0{,}95 \times 0{,}005 + 0{,}01 \times 0{,}995} \simeq 0{,}323. \end{aligned}$$

3 4 Indépendance

Définition 4.25 (Indépendance de deux événements)**.** *Deux événements E et F sont indépendants si :*

$$P(E \cap F) = P(E) \times P(F).$$

Remarque 4.26. D'après la propriété des probabilités composées, $P(E) = P_F(E)$ (si $P(F) > 0$). Ce résultat correspond à l'idée intuitive que si E et F sont *indépendants* alors la réalisation de F n'apporte pas d'information sur E.

Exemple 4.27. On jette deux fois le même dé. Les événements

$$\begin{aligned} A &= \{\text{obtention d'un chiffre pair au premier lancer}\}, \\ B &= \{\text{obtention du 1 au deuxième lancer}\}, \end{aligned}$$

sont indépendants. En effet, en prenant $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ et si on fait l'hypothèse de l'équiprobabilité dans Ω (P équiprobable), on vérifie que :

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{3 \times 6}{36} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{6 \times 1}{36} = \frac{1}{6}. \\ P(A \cap B) &= \frac{3 \times 1}{36} = \frac{1}{12}, \quad P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

3 5 Schéma de Bernoulli

Définition 4.28. *Toute expérience aléatoire conduisant à deux issues possibles S (Succès) et $\overline{S}$ (Echec) est appelée* épreuve de Bernoulli.

Exemple 4.29. Si on appelle Succès lors d'un lancé d'un dé, l'événement noté :

$$S = \text{« Le six sort »}.$$

Le lancer du dé peut alors être considéré comme une épreuve de Bernoulli avec

- $S = \{6\}$ et $p = P(S) = 1/6$.
- $\overline{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ avec $q = 1 - p = 5/6$.

Définition 4.30 (Schéma de Bernoulli)**.** *Si on répète n fois et de façon indépendante une épreuve de Bernoulli, on obtient un* schéma de Bernoulli*.*

Propriété 4.31. *Soit $0 \leq k \leq n$,*

$$P(\text{« obtenir } k \text{ succès »}) = \mathrm{C}_n^p p^k q^{n-k}.$$

Exemple 4.32. On lance 3 fois une pièce et on dit qu'on fait « succès » si la pièce tombe sur pile. On cherche la probabilité de faire 2 succès.

$$P(\text{« obtenir 2 succès »}) = \mathrm{C}_3^2 \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

Compléments

Démonstration du corollaire 4.10.

$$P(\Omega) = P(\bigcup_i \omega_i) = \sum_i P(\omega_i) = \sum_i \frac{1}{n} = 1.$$

□

Démonstration.

1. On applique la propriété 2 de la définition 4.12 à A et $\emptyset$ (ils sont disjoints car $A \cap \emptyset = \emptyset$) d'où
$$P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset) \Leftrightarrow P(A) = P(A) + P(\emptyset)$$
et donc on en déduit que $P(\emptyset) = 0$.
2. Comme $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$, on a :
$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Leftrightarrow P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}).$$
Or $P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = 1$ d'où $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.
3. On a : $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, de plus $(A \setminus B)$ et $A \cap B$ sont disjoints donc on peut appliquer la définition :
$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B).$$
4. $A \subset B$ implique que $B = (B \cap A) \cup A$ donc
$$P(B) = P(B \setminus A) + P(A) \leq P(A).$$
5. On a :
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$
2 à 2 disjoints donc :
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

□

Démonstration de la proposition 4.19. On vérifie que $P_F(\cdot)$ prend ses valeurs dans $[0\,,1]$. Si $A \cap F \subset F$ alors $P(A \cap F) \leq P(F)$ et ainsi :

$$\frac{P(A \cap F)}{P(F)} = P_F(A) \leq 1$$

et $P_F(A) \geq 0$ comme quotient de deux probabilités. On vérifie la propriété 1 de la définition 4.12 :

$$P_F(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1.$$

On vérifie ensuite la propriété 2 de la définition 4.12. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements dans Ω deux à deux disjoints.

$$P_F\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \frac{P((\bigcup_{i \in I} A_i) \cap F)}{P(F)} = \frac{P(\bigcup_{i \in I}(A_i \cap F))}{P(F)}.$$

Mais $A_i \cap F \subset A_i$ donc tous les $(A_i \cap F)$ sont disjoints 2 à 2 et :

$$P_F\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \frac{\sum_{i \in I} P(A_i \cap F)}{P(F)} = \sum_{i \in I} \frac{P(A_i \cap F)}{P(F)} = \sum_{i \in I} P_F(A_i).$$

□

LEÇON

5 Variable aléatoire discrète

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S-BTS
Prérequis Probabilités
Références [14, 15]

Contenu de la leçon

1 Loi de probabilités. Fonction de répartition

Exemple 5.1. On tire au hasard une boule dans une urne. Cette urne contient une boule rouge R, une verte V, une bleue B. On remet la boule dans l'urne et on effectue un deuxième tirage. On suppose qu'il y a équiprobabilité dans les deux tirages. Soit

$$\Omega = \{(R, R), (R, V), (R, B), (V, R), (V, V), (V, B), (B, B), (B, R), (B, V)\}.$$

Il y a neuf événements élémentaires. Il y a équiprobabilité, donc la probabilité de chaque événement élémentaire est $p = \frac{1}{9}$. La probabilité de tirer au moins une boule verte est :

$$q = \frac{5}{9}.$$

On fixe la règle suivante : « Si on tire une boule
- rouge, on gagne 6 euros,
- verte, on gagne 1 euro,
- bleue, on perd 4 euros. »

On définit ainsi une application de Ω dans $\mathbb{R}$, cette application est appelée *variable aléatoire*.

Tirage 1	Tirage 2	Ω	Gain (en euros)
R	R	(R, R)	12
R	V	(R, V)	7
R	B	(R, B)	2
V	R	(V, R)	7
V	V	(V, V)	2
V	B	(V, B)	-3
B	R	(B, R)	2
B	V	(B, V)	-3
B	B	(B, B)	-8

TABLE 5.1 – Les gains et pertes pour le jeu

Définition 5.2. *Lorsque qu'à chaque événement élémentaire ω d'un univers Ω, on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une* variable aléatoire (réelle). *Une variable est donc une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Elle est dite* discrète *si $\Omega \subset \mathbb{N}$.*

Exemple 5.3. On lance trois fois une pièce non truqué et on compte le nombre de fois où on obtient « Face ». On définit ainsi une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ avec :

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}$$

et

$$X(PPP) = 0, \; X(PPF) = 1, \; X(PFP) = 1, \; X(FPP) = 1$$
$$X(FFP) = 2, \; X(FPF) = 2, \; X(PFF) = 2, \; X(FFF) = 3.$$

Définition 5.4 (Loi de probabilité)**.** *Soit P une probabilité sur un univers Ω. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω telle que $X(\Omega)$ soit fini de cardinal n. Lorsqu'à chaque valeur x_i ($1 \leq i \leq n$) de X on associe les probabilités p_i de l'événement « $X = x_i$ », on dit que l'on définit* une loi de probabilité *P_X de la variable aléatoire X.*

Exemple 5.5. Dans l'exemple précédent, on a équiprobabilité de Ω (la probabilité d'obtenir un des événements élémentaires étant de $\frac{1}{8}$). La probabilité d'obtenir 2 fois le côté face de la pièce est de :

$$P_X(2) = P(X = 2) = \frac{3}{8}.$$

Définition 5.6 (Fonction de répartition)**.** *La* fonction de répartition *de la variable aléatoire X est la fonction F telle que :*

$$\begin{array}{cccc} F & : & \mathbb{R} & \to & [0\,,1] \\ & & x & \mapsto & F(x) = P(X \leq x) \end{array}.$$

Propriété 5.7. *La fonction de répartition est toujours une fonction croissante et bornée par 0 et 1.*

Exemple 5.8. Avec l'exemple précédent, on a :

- Pour $x \in \,]-\infty\,,0[$, on a :
$$F(x) = 0$$
- Pour $x \in \,]0\,,1]$, on a :
$$F(x) = \frac{1}{8}$$
- Pour $x \in \,]1\,,2]$, on a :
$$F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$
- Pour $x \in \,]2\,,3]$, on a :
$$F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$
- Pour $x \in \,]3\,,4]$, on a :
$$F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1.$$

La représentation graphique est donnée à la figure 5.1

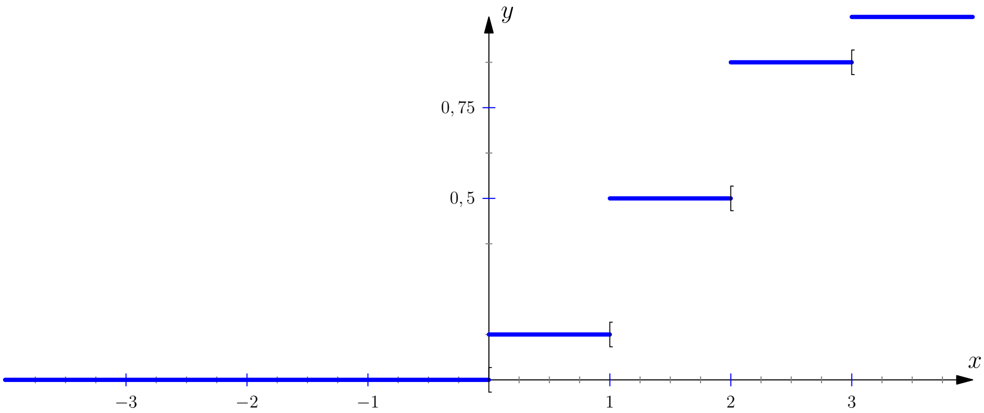


FIGURE 5.1 – Fonction de répartition de X

2 Espérance mathématique

Définition 5.9 (Espérance mathématique)**.** *Soient Ω l'univers correspondant à une expérience aléatoire, P une probabilité sur Ω et X une variable aléatoire sur Ω telle que $X(\Omega)$ soit fini*[a]*. On note $\{x_1, \dots, x_n\}$ l'ensemble $X(\Omega)$ (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X.* L'espérance mathématique *de la variable aléatoire X est le nombré, noté $\mathbf{E}(X)$, défini par :*

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

où $p_i = P(X = x_i)$.

a. Si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, l'espérance existe encore sous réserve de la convergence (absolue) de la série de terme général $x_n p_n$.

Remarque 5.10. L'espérance est la moyenne des valeurs x_i pondérées par les probabilités p_i.

Exemple 5.11. On reprend l'exemple de la pièce de monnaie. On a :

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{8} \times 0 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 = \frac{3}{2}.$$

Remarque 5.12. On pourrait aussi calculer l'espérance $\mathbf{E}(X)$ en revenant aux événements élémentaires de l'univers Ω au lieu d'utiliser les valeurs x_i de la variable aléatoire X :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) X(\omega).$$

Exemple 5.13 (Suite à la remarque 5.12)**.** Sur l'exemple précédent, comme $P(\omega) = \frac{1}{8}$, cela donnerait :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \frac{1}{8} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \\
&= \frac{1}{8} [X(PPP) + X(PPF) + X(PFP) + X(FPP) \\
&\qquad + X(PFF) + X(FPF) + X(FFP) + X(FFF)] \\
&= \frac{1}{8}(0 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 3) = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Théorème 5.14 (Linéarité de l'espérance)**.** *Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω de cardinal fini. Soit P une probabilité sur Ω. On a :*

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y).$$

En particulier, si b est un réel :

$$\mathbf{E}(X + b) = \mathbf{E}(X) + b$$

et pour tout réel k,

$$\mathbf{E}(kX) = k\mathbf{E}(X).$$

3 Variance et écart-type

Définition 5.15 (Variance et écart-type)**.** *Soient Ω l'univers correspondant à une expérience aléatoire, P une probabilité sur Ω et X une variable aléatoire sur Ω telle que $X(\Omega)$ soit fini. On note $\{x_1, \dots, x_n\}$ l'ensemble $X(\Omega)$ (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X).*

- *La* variance *de la variable aléatoire X est le nombre, notée $\operatorname{Var}(X)$, défini par :*

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - \mathbf{E}(X))^2 = p_1(x_1 - \mathbf{E}(X))^2 + \dots + p_n(x_n - \mathbf{E}(X))^2.$$

- *L'*écart-type *de la variable aléatoire X est le nombre, noté $\sigma(X)$ défini par :*

$$\sigma(X) = \sqrt{\operatorname{Var}(X)}.$$

Remarques 5.16.
1. La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.
2. La variance est une quantité positive, donc l'écart-type est bien défini.

Exemple 5.17. Sur le problème du comptage du côté face, on calcule la variance de X :

$$\operatorname{Var}(X) = \frac{1}{8}\left(0 - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

D'où :

$$\sigma(X) = \sqrt{\operatorname{Var}(X)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 5.18. Montrer que l'espérance $\mathbf{E}(X)$ minimise la fonction f définie par $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - x)^2$$

mais pas la fonction g définie par :

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left| x_i - x \right|.$$

Théorème 5.19 (Formule de Koenig)**.** *La variance d'une variable aléatoire X peut se calculer avec la relation suivante :*

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - [\mathbf{E}(X)]^2.$$

La variance est l'écart entre la moyenne des carrés et le carré de la moyenne.

Exemple 5.20. On reprend l'exemple de la pièce de monnaie lancée trois fois de suite. On rappelle que X est le nombre de « face » obtenu. On a déjà calculé $\mathbf{E}(X)$, on calcule $\mathbf{E}(X^2)$:

$$\mathbf{E}(X^2) = \frac{1}{8} \times 0^2 + \frac{3}{8} \times 1^2 + \frac{3}{8} \times 2^2 + \frac{1}{8} \times 3^2 = 3.$$

D'où :

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - [\mathbf{E}(X)]^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.$$

Corollaire 5.21 (Effet d'un changement affine sur la variance et l'écart-type)**.** *Soit X une variable aléatoire. Soient a et b deux réels. On :*

$$\operatorname{Var}(aX + b) = a^2 \operatorname{Var}(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX + b) = |a|\, \sigma(X).$$

En particulier :

$$\operatorname{Var}(aX) = a^2 \operatorname{Var}(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX) = |a|\, \sigma(X)$$

et

$$\operatorname{Var}(X + b) = \operatorname{Var}(X) \quad \text{et} \quad \sigma(X + b) = \sigma(X).$$

Démonstration du théorème 5.14. On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X+Y) &= \sum_{\omega\in\Omega}(X+Y)(\omega)P(\omega)\\ &= \sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)P(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega}Y(\omega)P(\omega) = \mathbf{E}(X)+\mathbf{E}(Y).\end{aligned}$$

En prenant Y constante égale à b, on obtient :

$$\mathbf{E}(X+b) = \mathbf{E}(X)+\mathbf{E}(b) = \mathbf{E}(X)+b.$$

De plus,

$$\mathbf{E}(kX) = \sum_{i=1}^n kp_ix_i = k\sum_{i=1}^n p_ix_i = k\mathbf{E}(X).$$

□

Réponse à l'exercice 5.18. La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables et on a, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -2\sum_{i=1}^n p_i(x_i-x) = -2\sum_{i=1}^n p_ix_i - 2x\sum_{i=1}^n p_i = -2(\mathbf{E}(X)-x).$$

On en déduit :

$$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \mathbf{E}(X).$$

Donc f admet un minimum en $\mathbf{E}(X)$ (et ce minimum est $f(\mathbf{E}(X)) = \mathrm{Var}(X)$. L'espérance est donc la quantité qui minimise la moyenne des carrés des écarts. Par contre, elle ne minimise ps la moyenne des écarts. En effet, on considère la variable aléatoire X définie par la loi suivante :

x_i	0	1000
p_i	0,9	0,1

On a :

$$\mathbf{E}(X) = p_1x_1 + p_2x_2 = 1000$$

$$g(\mathbf{E}(X)) = p_1\left|x_1-1000\right| + p_2\left|x_2-1000\right| = 90+90 = 180.$$

Or :

$$g(0) = \mathbf{E}(X) = 100.$$

Donc : $g(0) < g(\mathbf{E}(X))$. Conclusion : $\mathbf{E}(X)$ ne minimise pas la fonction g et on peut montrer que la médiane est ce minimum. □

Démonstration de la formule de Koeing. On rappelle que l'espérance d'une variable aléatoire constante $X=b$ est égale à la constante b. D'après la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathbf{E}((X-\mathbf{E}(X))^2) = \mathbf{E}(X^2-2X\mathbf{E}(X)+\mathbf{E}(X)^2)\\ &= \mathbf{E}(X^2) - 2\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(X)^2\mathbf{E}(1)\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - [\mathbf{E}(X)]^2$. □

Démonstration du corollaire 5.21. D'après la formule de Koeing, on a :

$$\mathrm{Var}(aX+b) = \mathbf{E}(a^2X^2 + 2abX + b^2) - [\mathbf{E}(aX+b)]^2$$

et d'après la linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(aX+b) &= a^2\mathbf{E}(X^2) + 2ab\mathbf{E}(X) + b^2 - [a\mathbf{E}(X)+b]^2 \\ &= a^2\mathbf{E}(X^2) + 2ab\mathbf{E}(X) + b^2 - a^2[\mathbf{E}(X)]^2 - 2ab\mathbf{E}(X) - b^2 = a^2\,\mathrm{Var}(X).\end{aligned}$$

D'où, par passage à la racine carrée :

$$\sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X).$$

Pour montrer la particularisation, il faut remplacer dans chaque formule $b=0$ et $a=1$ (selon le cas que l'on veut démonter). □

LEÇON

6 Loi binomiale, loi de Poisson, loi normale

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S - BTS

Prérequis Probabilités, variables aléatoires réelles discrètes et à densité, indépendance des variables aléatoires.

Références [16, 17, 18]

Contenu de la leçon

1 Loi binomiale

1.1 Définition et exemples

Définition 6.1. *Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0\,,1]$ lorsque :*
- $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$
- *pour tout* $k \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$P(\{X = k\}) = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Si X suit une loi binomiale de paramètres n, p alors on le note $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

Remarque 6.2. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} P(\{X = k\}) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n$$

Théorème 6.3. *On note $\mathcal{E}$ une épreuve comportant deux issues (Succès et Echec) et p la probabilité de « Succès ». On répète n fois, de façons indépendantes, l'épreuve $\mathcal{E}$. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de succès. Alors X suit une loi binomiale de paramètres n et p.*

Exemple 6.4. On suppose qu'un tireur atteigne sa cible avec une probabilité de $p = \frac{3}{4}$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des résultats (cible touché ou non) au cours de 5 lancers et X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fois que la cible a été atteinte (c'est-à-dire $X \sim \mathrm{Bin}(5, \frac{3}{4})$). La probabilité qu'il touche la cible 3 fois au cours de 5 lancers est de

$$P(\{X = 3\}) = \mathrm{C}_5^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{10 \times 27 \times 1}{4^5} \simeq 0{,}23.$$

Définition 6.5 (Variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli)**.** *Soit $\mathcal{E}$ une épreuve comportant deux issues (succès et échec). On note p la probabilité de Succès. Soit X la variable aléatoire qui est égal à 1 en cas de succès et 0 sinon. Alors, on dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p. On note alors $X \sim \mathrm{Bin}(1, p)$.*

Remarques 6.6.
1. La loi de Bernoulli est un cas particulier de la loi binomiale où l'épreuve $\mathcal{E}$ n'est réalisée qu'une seule fois.
2. Toute variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0\,,1]$ peut s'écrire comme somme $X = X_1 + \dots + X_n$, où, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, X_k est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p (X_k vaut 1 en cas de Succès à la k^{e} réalisation de $\mathcal{E}$ et 0 sinon).

1 2 Espérance mathématique et variance

Proposition 6.7 (Espérance mathématique et variance d'une Bernoulli). *Si $X \sim \mathrm{Bin}(1, p)$ alors :*

$$\mathbf{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = pq \quad (\text{où } q = 1 - p).$$

Proposition 6.8 (Espérance mathématique et variance d'une binomiale). *Si $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0\,,1]$, alors :*

$$\mathbf{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = npq \quad (\text{où } q = 1 - p).$$

Exemple 6.9. On reprend les données de l'exemple 6.4. L'espérance et la variance de $X \sim \mathrm{Bin}(5, \frac{3}{4})$ se calculent facilement :

$$\mathbf{E}(X) = \frac{5 \times 3}{4} = \frac{15}{4} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{5 \times 3 \times 1}{4^2} = \frac{15}{16}.$$

1 3 Stabilité de la loi binomiale

Théorème 6.10 (Stabilité additive de la loi binomiale). *Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0\,,1]$. Si $X \sim \mathrm{Bin}(m, p)$ et $Y \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ avec X et Y indépendantes, alors $X + Y \sim \mathrm{Bin}(m + n, p)$.*

2 Loi de Poisson

2 1 Définition et caractérisation

Définition 6.11. *Soit $\lambda > 0$ un réel et X une variable aléatoire. On dit que la variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètres λ et on note $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ lorsque :*

- *l'ensemble des valeurs prises par X est l'ensemble de tous les entiers naturels : $X(\Omega) = \mathbb{N}$,*
- *pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Théorème 6.12 (Espérance mathématique et variance d'une Poisson). *Soit $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$. Alors :*

$$\mathbf{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

Théorème 6.13. *Si $X_1 \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathrm{Pois}(\lambda_2)$, X_1 et X_2 indépendantes alors $X = X_1 + X_2 \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$.*

2 2 Convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson

Exemple 6.14. Le président d'un bureau de vote est né le 1er avril. Il décide de noter le nombre X de personnes ayant leur anniversaire le même jour que lui parmi les 500 premiers électeurs qui se présentent.

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = \frac{1}{365}$ (on considère que toutes les années ont 365 jours). Ainsi,

$$P(X = k) = \mathrm{C}_{500}^{k} \left(\frac{1}{365}\right)^k \left(\frac{364}{365}\right)^{500-k}.$$

On montre, à travers cet exemple, que l'on peut approcher X par une variable Y qui suit une loi de Poisson. Soit $\alpha = np$. Faisons une comparaison numérique pour les petites valeurs de k :

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0,2537	0,3484	0,2388	0,1089	0,0372	0,0101
$\frac{\mathrm{e}^{-\alpha}\alpha^k}{k!}$	0,2541	0,3481	0,2385	0,1089	0,0373	0,0102

Théorème 6.15. *Lorsque n est « grand » et np « petit », on peut remplacer la loi binomiale* $\mathrm{Bin}(n,p)$ *par la loi de Poisson* $\mathrm{Pois}(\alpha)$ *où* $\alpha = np$.

3 Loi normale

3 1 Définitions

Définition 6.16 (Loi normale)**.** *Soient m un réel et σ un réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres m et σ si elle admet pour densité de probabilité :*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-[(x-m)^2/2\sigma^2]}.$$

On note $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma)$.

Théorème 6.17 (Espérance mathématique et variance d'une normale)**.** *Si $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma)$ alors $\mathbf{E}(X) = m$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.*

Définition 6.18 (Loi normale centrée réduite)**.** *On appelle la loi normale centrée-réduite, la loi $\mathcal{N}(0,1)$.*

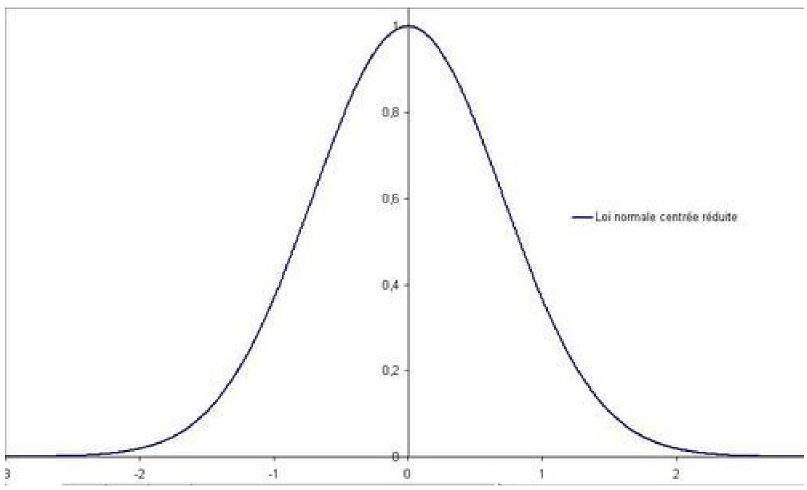


FIGURE 6.1 – Loi normale centrée-réduite

Théorème 6.19. *Si $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma)$, il existe une variable aléatoire Y tel que $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.*

Théorème 6.20. *Si $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1,\sigma_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2,\sigma_2)$ tels que X_1 et X_2 sont indépendantes, alors*

$$X = X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}\left(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.\right)$$

3 2 Convergence

Théorème 6.21. *La loi $\mathrm{Bin}(n,p)$ peut être approchée par la loi $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$ si $n \geq 30$, $np \geq 15$ et $np(1-p) > 5$.*

Corollaire 6.22. *La loi $\mathrm{Pois}(\lambda)$ peut être approchée par la loi $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$ si $\lambda \geq 15$.*

Démonstration du théorème 6.3. On considère l'ensemble des « mots » de n lettres qui se constituent que de S et de E. On sait qu'il y a exactement C_n^k qui contiennent exactement k fois la lettre S. On en déduit :

$$P(\{X = k\}) = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \text{ pour tout } 0 \leq k \leq n.$$

car la probabilité d'avoir k succès et $n-k$ échec est de $p^k(1-p)^{n-k}$. □

Démonstration de la proposition 6.7. On a :

$$\mathbf{E}(X) = P([X=0]) \times 0 + P([X=1]) \times 1 = q \times 0 + p \times 1 = p.$$
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \mathbf{E}(X^2) - p^2.$$

Comme $X^2 \sim \mathrm{Bin}(1,p)$ alors $\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}(X) = p$. Donc $\mathrm{Var}(X) = p - p^2 = pq$. □

Démonstration de la proposition 6.8. Puisque $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, il existe des variables aléatoires (réelles) $X_1, X_2, \dots, X_n$ définies sur Ω, indépendantes, de loi de Bernoulli de même paramètre p telles que $X = \sum_{i=1}^n X_i$. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i).$$

Or, d'après la proposition 6.7,

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^n p = np.$$

De même pour la variance,

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)$$

et comme $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, on a :

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i).$$

Or d'après la proposition 6.7,

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^n pq = npq.$$

□

Démonstration du théorème 6.10. On pose $S = X + Y$. On a donc :

$$S(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, m+n\}.$$

On calcule $P(S^{-1}(k))$, pour tout $0 \leq k \leq m+n$:

$$S^{-1}(k) = \bigcup_{i=0}^k X^{-1}(i) \cap Y^{-1}(k-i), \quad \text{(disjointe)}.$$

D'où :

$$P(S^{-1}(k)) = \sum_{i=0}^k P(X^{-1}(i) \cap Y^{-1}(k-i)).$$

Comme X et Y sont indépendantes :

$$P(S^{-1}(k)) = \sum_{i=0}^{k} P(X^{-1}(i))P(Y^{-1}(k-i)).$$

Comme $X \sim \mathrm{Bin}(m,p)$ et $Y \sim \mathrm{Bin}(n,p)$:

$$\begin{aligned} P(S^{-1}(k)) &= \sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_m^i p^i (1-p)^{m-i} \mathrm{C}_n^{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-(k-i)} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_m^i \mathrm{C}_n^{k-i} p^k (1-p)^{m+n-k} \right) \end{aligned}$$

et comme $\sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_m^i \mathrm{C}_n^{k-i} = \mathrm{C}_{m+n}^k$:

$$P(S^{-1}(k)) = \mathrm{C}_{m+n}^k p^k (1-p)^{m+n-k}.$$

Donc $S \sim \mathrm{Bin}(m+n,p)$. □

Démonstration du théorème 6.12. Avant de commencer la démonstration, on admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Ainsi :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$$

et

$$\mathbf{E}(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2.$$

On a :

$$\mathbf{E}(X(X-1)) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)$$

donc $\mathbf{E}(X^2) = \lambda^2 + \lambda$ et

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - [\mathbf{E}(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

□

Démonstration du théorème 6.19. Soit $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma)$. On considère la variable $Y = \frac{Xm}{\sigma}$. On a :

$$P(Y < y) = P(X < \sigma y + m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sigma x + m} \mathrm{e}^{-[(t-m)^2/2\sigma^2]} \,\mathrm{d}t.$$

On effectue le changement de variables : $u = \frac{t-m}{\sigma}$ qui donne $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{\sigma}$. On obtient :

$$P(Y < y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2} \sigma \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2} \,\mathrm{d}u.$$

Donc $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. □

LEÇON

7 Variable aléatoire réelle à densité

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S-BTS

Prérequis Probabilités, intégrales, primitives, croissance comparée, équations différentielles, désintégration radioactive.

Références [19]

Contenu de la leçon

1 Introduction

Nous avons vu dans la **Leçon n° 5 : Variables aléatoires réelles discrètes**, que des variables aléatoires peuvent prendre leur valeur dans un sous-ensemble des nombres entiers. On va essayer de généraliser en élargissant l'ensemble des valeurs de départ d'une variable aléatoire à un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple 7.1. On tire au hasard un point a sur le segment $[0\,,1]$ et on note $X = a$. On a alors $X(\Omega) = [0\,,1]$.

1. Calculer $P(\{X = 0{,}5\})$.
2. Calculer la probabilité que X appartienne au segment $[0\,,\frac{1}{2}]$.

2 Densité et loi de probabilité

Définition 7.2 (Densité de probabilité)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle* densité de probabilité sur *I, toute fonction f* continue et positive sur *I telle que :*

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Remarque 7.3. La notation $\int_I$ désigne l'intégrale sur l'intervalle I.

1. Si $I = [a\,,b]$ alors
$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Si I est non borné d'un coté (par exemple $I = [a\,,+\infty[$ alors
$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. Si $I = \mathbb{R}$ alors :
$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 f(x)\,\mathrm{d}t + \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 7.4. Soit f une fonction constante sur l'intervalle $[0\,,1]$. On cherche la valeur de cette constante pour que f soit une densité. On note γ cette constante :

$$\int_0^1 \gamma\,\mathrm{d}t = 1 \Leftrightarrow \gamma = 1.$$

Plus généralement, si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a\,,b]$, on montre que $f(t) = \gamma = \frac{1}{b-a}$.

Définition 7.5 (Loi de probabilité)**.** *Soit I un intervalle et f une densité de probabilité sur I. L'application P qui, à tout sous-intervalle $[a\,,b]$ de I associe la quantité :*

$$P([a\,,b]) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

est appelé loi de probabilité sur I.

Remarques 7.6. 1. On a bien $0 \leq P([a\,,b]) \leq 1$ car $[a\,,b]$ est inclus dans I.

2. On a :

$$P(\{x_0\}) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit alors que $\{x_0\}$ est un événement « *presque-sûrement impossible* ».

Exemples 7.7. 1. Si f est constante sur $[a\,,b]$, on dit que P est la *loi uniforme*.

2. Si f est de la forme $f(t) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}$ sur $\mathbb{R}$ avec $\lambda > 0$, on dit que P est la *loi exponentielle de paramètre* λ. On a tout de même besoin d'une justification. Soit $\lambda > 0$ un réel. On montre que $f(t) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}$ définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+$. On calcule :

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda\left[-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}t}{\lambda}\right]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Or, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) = 1.$$

La limite en $+\infty$ de $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe bien et on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

3 Variables aléatoires continues. Loi uniforme, loi exponentielle

Définition 7.8. *Soit P une loi de probabilité sur un intervalle I de f. On dit qu'une variable aléatoire X, à valeurs dans I, suit une loi de probabilité P lorsque pour tout sous-intervalle $[a\,,b]$ de I, on a :*

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemples 7.9. 1. On peut maintenant répondre aux questions de l'exemple introductif. X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0\,,1]$. Donc :

(a)

$$P(X = 0{,}5) = \int_{0{,}5}^{0{,}5} 1\,\mathrm{d}t = 0.$$

(b)

$$P(X \in [0\,,0{,}5]) = P(0 \leq X \leq 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} 1\,\mathrm{d}t = 0{,}5.$$

Dans le cas général, supposons que X suivent la loi uniforme sur $[a\,,b]$. Alors :

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

On note $L([a\,,b])$ la longueur de l'intervalle de $[a\,,b]$. Si X suit une loi uniforme sur un intervalle I, alors la probabilité d'un sous-intervalle J est donné par la formule :

$$P(X \in J) = \frac{L(J)}{L(I)}.$$

2. Si X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors

$$P(0 \leq X \leq x) = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

et par complémentarité :

$$P(X \geq x) = 1 - P(0 \leq X \leq x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Définition 7.10 (Fonction de répartition)**.** *Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans un intervalle I de la forme $[a\,,b]$ (ou de la forme $[a\,,+\infty[$) qui suit une loi de probabilité P. On appelle* fonction de répartition de X*, la fonction F définie pour tout réel x de I par :*

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Propriété 7.11. *Si F est une fonction de répartition de X alors :*

1. *F est croissante sur $[a\,,x]$,*
2. *$F(a) = 0$,*
3. *$F(b) = 1$ (si $I = [a\,,b]$) ou*

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \qquad \text{si } I = [a\,,+\infty[.$$

4. *$P(X > x) = 1 - F(x)$*
5. *$P(\alpha < X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.*

Exemple 7.12. Si X suit la loi exponentielle de paramètre λ, on a :

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

4 Espérance d'une variable aléatoire continue

Définition 7.13 (Espérance d'une variable aléatoire continue)**.** *Soit X une variable aléatoire continue prenant ses valeurs dans un intervalle I. On appelle* espérance *de X la quantité :*

$$\mathbf{E}(X) = \int_I t f(t) \,\mathrm{d}t$$

Exemples 7.14. 1. Si X suit une loi uniforme sur $I = [a\,,b]$ alors :

$$\mathbf{E}(X) = \int_a^b \frac{t}{b-a} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{b+a}{2}.$$

2. Soit X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ sur $\mathbb{R}_+$. On calcule l'intégrale suivante :

$$\int_0^x t\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^x t\mathrm{e}^{-\lambda t} \,\mathrm{d}t.$$

On pose :

$$u(t) = t \quad \text{et} \quad v'(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

ainsi

$$u'(t) = 1 \quad \text{et} \quad v(t) = -\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}.$$

Une intégration par parties donne :

$$\lambda \int_0^x t\mathrm{e}^{-\lambda t} \,\mathrm{d}t = \left[-t\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t} \,\mathrm{d}t = -x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\left[\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x = \frac{-\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1}{\lambda}.$$

Puis, on étudie la limite lorsque x tend vers $+\infty$. On sait que :

$$\lim_{x \to +\infty} -x\mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$$

grâce à la règle des croissances comparées et

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$$

donc $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.

5 Applications

5 1 Loi de durée de vie sans vieillissement

Définition 7.15. *Soit T une variable aléatoire correspondant à la durée de vie d'un individu ou d'un objet. On dit que T suit la* loi de durée de vie sans vieillissement *lorsque la probabilité que l'individu (ou l'objet) soit vivant (ou fonctionne) à l'instant $t+h$ sachant qu'il est vivant (ou qu'il fonctionne) à l'instant t ne dépend pas de son âge :*

$$P_{(T \geq t)}(T \geq t+h) = P(T \geq h).$$

Proposition 7.16. *Une variable aléatoire T suit la loi de durée sans vieillissement si et seulement si elle suit une loi exponentielle.*

5 2 Loi de désintégration radioactive

Selon les physiciens, la durée de vie T d'un noyau radioactif suit une loi de durée de vie sans vieillissement, autrement dit, une loi exponentielle. Considérons l'expérience $\mathcal{E}$: « on examine un noyau à l'instant[1] t ». On note S l'événement « Ce noyau n'est pas désintégré ». D'après la loi exponentielle, il existe un réel λ strictement positif tel que :

$$P(S) = P(T \geq t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Supposons que l'on ait au départ ($t=0$), dans notre corps radioactif, N_0 noyaux. On note X_t la variable aléatoire égale au nombre de noyaux non désintégrés à l'instant t. Comme chaque noyau se désintègre indépendamment aux autres, on peut affirmer que X_t suit une loi binomiale de paramètres $n = N_0$ et $p = P(S) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$. Le nombre moyen $N(t)$ de noyaux présents à l'instant t est donc donné par l'espérance de X_t :

$$N(t) = \mathbf{E}(X_t) = np = N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Compléments

Justification de la définition 7.5. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-intervalles disjoints de I, alors par linéarité de l'intégrale :

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{I_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(I_n)$$

et de plus $P(I) = 1$. □

1. La constante λ est appelée « constante radioactive du noyau

Démonstration de la proposition 7.16. ($\Leftarrow$) On suppose que T suive une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Par définition d'une probabilité conditionnelle, on a :

$$P_{(T \geq t)}(T \geq t+h) = \frac{P((T \geq t+h) \cap (T \geq t))}{P(T \geq t)}.$$

Or l'événement « $T \geq t+h$ » est inclus dans l'événement « $T \geq t$ » donc :

$$P((T \geq t+h) \cap (T \geq t)) = P(T \geq t+h) = \mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}.$$

Par ailleurs :

$$P(T \geq t) = \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

d'où :

$$P_{(T \geq t)}(T \geq t+h) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda h} = P(T \geq h).$$

($\Rightarrow$) Réciproquement, soit T une variable aléatoire suivant une loi de durée de vie sans vieillissement. Alors, pour tout réel t de $\mathbb{R}_+$ et tout réel h de $\mathbb{R}_+$:

$$P_{(T \geq t)}(T \geq t+h) = P(T \geq h) \Leftrightarrow P(T \geq t+h) = P(T \geq h)P(T \geq t).$$

Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire T. On note φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\varphi(t) = 1 - F(t) = 1 - P(T \leq t) = P(T > t) = P(T \geq t).$$

Comme F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, φ l'est aussi et on a :

$$\varphi(0) = 1 - F(0) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(t+h) = \varphi(t)\varphi(t),$$

autrement dit, φ vaut 1 en 0 et transforme les sommes en produits. Il existe donc un réel a (voir la **Leçon 57 Équations différentielles**) tel que

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{at}.$$

Mais comme φ est en fait une probabilité, on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi(t) \leq 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{at} \leq 1 \Leftrightarrow at \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 0.$$

On pose $\lambda = -a \in \mathbb{R}_+$. Si a était nul, on aurait, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi(t) = 1 \Leftrightarrow P(T \geq t) = 1$$

Ce qui signifierait que notre individu est éternel, hypothèse que l'on peut rejeter. Donc, on a bien $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \Leftrightarrow 1 - F(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

et en dérivant, on obtient :

$$-f(t) = -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \Leftrightarrow f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

La variable aléatoire T suit donc une loi exponentielle de paramètre λ.

□

LEÇON

8 Statistique descriptive à une variable

Niveau, prérequis, références

Niveau Seconde, Première S

Prérequis Aucun

Références [20, 21]

Contenu de la leçon

1 Premières définitions et exemples

Définition 8.1 (Statistiques). *La statistique étudie certaines caractéristiques :* caractères *ou* variables *d'un ensemble fini qu'on appelle* population. *Les éléments de cette population étudiée sont appelés* individus.

Définition 8.2 (Type de variables). *On peut classer en trois catégories les variables rencontrées :*

Quantitative *numérique et fait l'objet de calcul (par exemple : âge, taille, poids, notes...).*

Qualitative discrète *si la variable prend qu'un nombre fini de valeurs (on appelle* modalités *de telle valeur et on les notera x_i)*

Qualitative continue *si la variable prend ses valeurs dans un intervalle* (classe)*.*

Exemple 8.3. Voici une liste de 30 notes d'un Devoir Surveillé de 2nde d'un lycée parisien :

5	10	12	13	20	14
15	8	3	4	5	1
20	14	12	3	5	19
10	4	9	10	15	12
11	12	14	20	4	0

On peut regrouper ces notes par ordre croissant et on les compte :

Note	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Effectif	1	1	0	2	3	3	0	0	1	1	3	1	4	1	3	2	0	0	0	1	3

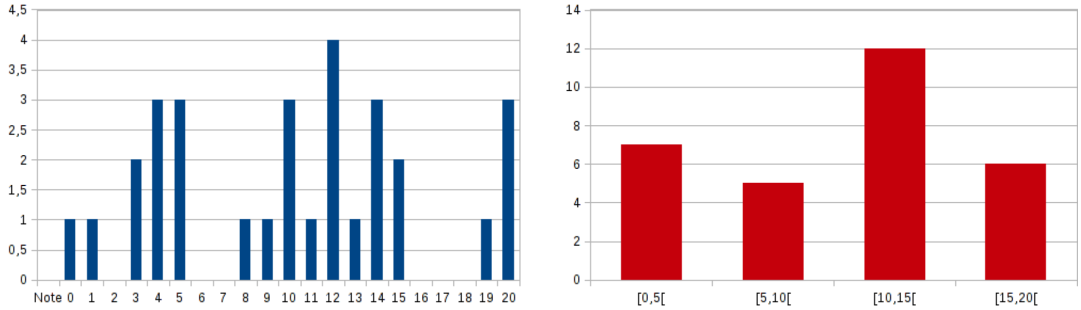
et on peut regrouper ces notes par intervalle :

Intervalle	$[0,5[$	$[5,10[$	$[10,15[$	$[15,20[$	Total
Effectif	7	5	12	6	30

Définition 8.4 (Représentation graphique de données statistiques).

- *Si le caractère est quantitatif discret, on peut utiliser le* diagramme en bâton *pour représenter graphiquement les données statistiques. Dans un repère orthogonal, pour chaque valeur de la série statistique, on trace un trait vertical dont la hauteur est proportionnelle.*
- *Si le caractère est quantitatif continue, on peut utiliser le* diagramme en rectangle *pour représenter graphiquement les données statistiques. Dans un repère orthogonal, la base des rectangles est proportionnelle à la longueur de l'intervalle et la hauteur est proportionnelle à l'effectif.*
- *Si le caractère est qualitatif, on utilise* les diagrammes circulaires.

Exemple 8.5. On donne en figure 8.1, la représentation graphique de la série statistique des classements de notes par ordre croissant et par intervalle de 5 notes.



(a) Représentation graphique du classement des notes par ordre croissant

(b) Représentation graphique du classement par intervalles

FIGURE 8.1

2 Effectif et fréquence

Définition 8.6 (Effectif)**.** *L'*effectif *d'une classe ou d'une modalité est le nombre d'individu de cette classe ou de cette modalité. Généralement, on note n_i l'effectif de la classe numéro i (ou de la modalité x_i).*

*L'*effectif total *est la somme des effectifs de toutes les classes. On le note souvent N.*

Exemple 8.7. Dans l'exemple précédent,

$$N = \sum_{i=1}^{5} n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 7 + 5 + 12 + 8 = 30.$$

Définition 8.8 (Effectif cumulé)**.** *L'*effectif cumulé *d'une modalité est la somme des effectifs des modalités qui lui sont inférieurs ou égales.*

Définition 8.9 (Fréquence)**.** *La* fréquence *notée f_i de la classe i (ou de la modalité x_i) est le rapport $\frac{f_i}{N}$, la fréquence d'une classe est un nombre de l'intervalle $[0\,,1]$.*

Définition 8.10. *La* fréquence cumulée *d'une modalité est la somme des fréquences des modalités qui lui sont inférieures ou égales.*

Exemple 8.11. Reprenons les données de l'exemple précédent. On a :

Note	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Effectif	1	1	0	2	3	3	0	0	1	1	3	1	4	1	3	2	0	0	0	1	3
Effectif cumul.	1	2	2	4	7	10	10	10	11	12	15	16	20	21	24	26	26	26	26	27	30

(par exemple, 20 personnes ont une note inférieure ou égale à 12) et

Intervalle	$[0\,,5[$	$[5\,,10[$	$[10\,,15[$	$[15\,,20[$	Total
Effectif	7	5	12	6	30
Effectif cumul.	7	12	24	30	30

(par exemple 12 personnes ont en dessous de la moyenne).

3 Etendue et mode d'une série statistique

Définition 8.12 (Etendue d'une série statistique)**.** *L'*étendue d'une série statistique *est la différence entre la plus grande modalité du caractère et la plus grande modalité.*

Exemple 8.13. Reprenons les données de l'exemple précédent. On a :

Note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectif	1	1	0	2	3	3	0	0	1	1	3	1	4	1	3	2	0	0	0	1	3

L'étendue de cette série est $20 - 0 = 20$.

Définition 8.14 (Mode d'une série statistique)**.** *Dans le cas continu, on dit qu'une classe est* modale *si elle a le plus grand effectif parmi toutes les casses.*

Dans le cas discret, le mode est la valeur de plus grand effectif.

Exemple 8.15. Dans cette série statistique, on a :

Intervalle	$[0\,,5[$	$[5\,,10[$	$[10\,,15[$	$[15\,,20[$	Total
Effectif	7	5	12	6	30

La classe modale de cette série statistique est $[10\,,15[$.

4 Paramètre de position

4 1 Moyenne

Définition 8.16 (Moyenne)**.** *Dans le cas discret, on appelle* moyenne *d'une série statistique d'effectif total N, le réel*

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k}{N}.$$

Exemple 8.17. Reprenons les données de l'exemple précédent. On a :

Note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectif	1	1	0	2	3	3	0	0	1	1	3	1	4	1	3	2	0	0	0	1	3

La moyenne de la série statistique est :

$$\overline{x} = \frac{1\times1+0\times2+2\times3+3\times4+3\times5+0\times6+0\times7+1\times8+1\times9+3\times10+11\times1+12\times4+13\times1+14\times3+15\times2+16\times0+17\times0+18\times0+19\times1+3\times20}{30}$$

$$\overline{x} = \frac{304}{30} \simeq 10,13.$$

Remarque 8.18. Pour calculer la moyenne d'une série statistique continu, on prend comme valeur de caractère *le milieu de chaque classe.*

Propriétés 8.19.

1. *Si on ajoute à toutes les valeurs d'une série statistique le même nombre b, on augmente la moyenne de cette série par b.*
2. *Si les valeurs d'une série statistique sont multipliées ou divisées par un même nombre a, la moyenne de cette série est aussi multipliée ou divisée par a.*
3. *Si une population d'effectif N est composée d'une partie d'effectif N_1 et de moyenne $\overline{x}_1$ et d'une autre partie d'effectif N_2 et de moyenne $\overline{x}_2$ alors la moyenne $\overline{x}$ de la population totale est telle que :*
$$\overline{x} = \frac{N_1\overline{x}_1 + N_2\overline{x}_2}{N}.$$

Exemple 8.20. Si, dans une classe, les 15 garçons d'une classe mesurent en moyenne 182 cm et si les 20 filles mesurent en moyenne 168 cm alors la taille moyenne d'un élève de cette classe est égale à

$$\frac{15 \times 182 + 20 \times 168}{15 + 20} = 174 \text{ cm}.$$

4 2 Médiane

Définition 8.21. *La* médiane *est un paramètre de position qui permet de couper la population étudiée en deux groupes contenant le même nombre d'individus.*

Exemple 8.22. On reprend la liste des 30 notes d'un Devoir Surveillé de 2nde d'un lycée parisien :

5	10	12	13	20	14
15	8	3	4	5	1
20	14	12	3	5	19
10	4	9	10	15	12
11	12	14	20	4	0

Pour trouver la médiane, on range les notes par ordre croissant.

0	1	3	3	4	4
4	5	5	5	8	9
10	10	10	11	12	12
12	12	13	14	14	14
15	15	19	20	20	20

Comme il y a 30 notes, la médiane correspond à la moyenne de la 15[e] note et de la 16[e] de cette liste, d'où :

$$\begin{array}{|cccccc|}\hline 0 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 8 & 9 \\ 10 & 10 & \boxed{10} & \boxed{11} & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 13 & 14 & 14 & 14 \\ 15 & 15 & 19 & 20 & 20 & 20 \\ \hline\end{array}, \quad \overline{x} = \frac{10+11}{2} = 10{,}5.$$

Remarque 8.23. En général, la moyenne et la médiane d'une série statistique sont deux valeurs différentes.

5 Paramètre de dispersion

5 1 Associé à la moyenne

Définition 8.24 (Variance)**.** *On appelle* variance *d'une série statistique d'effectif total N, et de moyenne $\overline{x}$, le réel :*

$$V = \frac{n_1(x_1-\overline{x})^2 + n_2(x_2-\overline{x})^2 + \cdots + n_k(x_k-\overline{x})^2}{N}.$$

Définition 8.25 (Ecart-type)**.** *On appelle* l'écart-type *de la série, le réel $\sigma = \sqrt{V}$.*

Exemple 8.26. Dans l'exemple des notes, on peut montrer que :

$$V = \frac{7286}{225} \simeq 32{,}115$$

et

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{32{,}115} \simeq 5{,}66.$$

Propriétés 8.27.
1. *Si on ajoute à toutes les valeurs d'une série statistique le même nombre b, l'écart-type reste inchangé.*
2. *Si les valeurs d'une série statistique sont multipliées ou divisées par un même nombre a, l'écart-type est multiplié ou divisé par $|a|$.*

5 2 Associé à la médiane

Définition 8.28. *Soit une série statistique de médiane M dont la liste des valeurs est rangée dans l'ordre croissant. En coupant la liste en deux sous-séries de même effectif,*
- *on appelle* premier quartile *le réel noté Q_1 égal à la médiane de la sous-série inférieure ;*
- *on appelle* troisième quartile *le réel noté Q_3 égal à la médiane de la sous-série supérieure.*
- *L'*écart-interquartile *est égal à $Q_3 - Q_1$.*
- $]Q_1\,, Q_3[$ *est appelé* intervalle interquartile.

Remarque 8.29.
- 25% de la population admet une valeur du caractère entre $\min$ et Q_1,
- 25% de la population admet une valeur du caractère entre Q_1 et M,
- 25% de la population admet une valeur du caractère entre M et Q_3,
- 25% de la population admet une valeur du caractère entre Q_3 et $\max$.

Définition 8.30 (Diagramme en boites)**.** *Le* diagramme en boites *d'une série se construit comme sur la figure 8.2.*

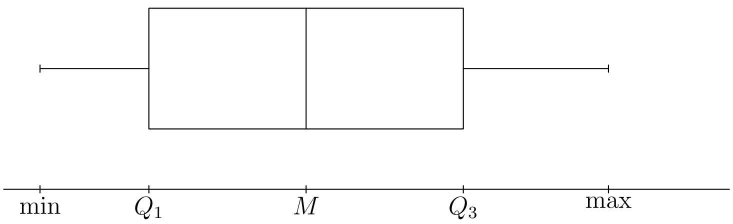


FIGURE 8.2 – Construction d'un diagramme en boîte

Exemple 8.31. On reprend la liste ordonnée de l'exemple précédent :

0	1	3	3	4	4
4	5	5	5	8	9
10	10	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	12	12
12	12	13	14	14	14
15	15	19	20	20	20

On peut immédiatement voir que $Q_1 = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$ et $Q_3 = \frac{13+14}{2} = 13{,}5$. Donc, on a la construction du diagramme en bâtons suivant (voir la figure 8.3) :

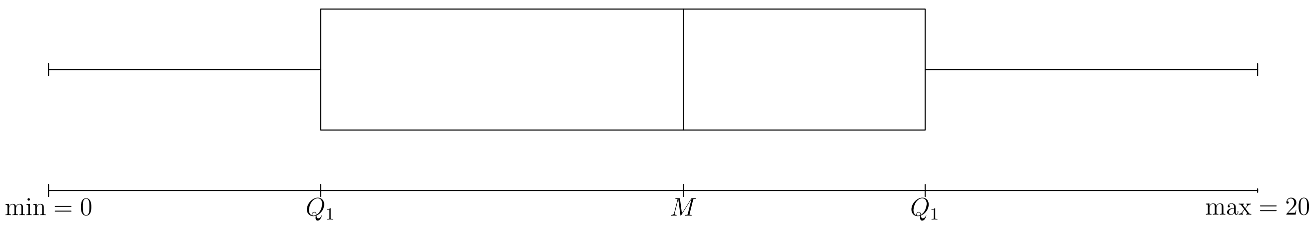


FIGURE 8.3 – Construction du diagramme en boîte

LEÇON 9

Séries statistiques à deux variables numériques

Niveau, prérequis, références

Niveau BTS

Prérequis Statistiques à une variable

Références [22, 23, 24]

Contenu de la leçon

1 Nuage de points

Définition 9.1 (Série statistiques à deux variables)**.** *On se donne deux caractères qu'on suppose discrets X et Y pour chaque individu d'une population. On obtient donc* une série statistique à 2 variables *que l'on peut représenter par un* nuage de points.

Définition 9.2 (Nuage de points)**.** *Soient $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ deux caractères discrets. Un* nuage de point *associé à (X, Y) est l'ensemble des points $M_i = (x_i, y_i)$ pour $1 \leq i \leq n$.*

Exemple 9.3. On applique à un ressort une masse (qu'on mesure en gramme) et on lui mesure sa longueur (en cm).

Masse (en g)	7	10	18	20	5	24	12	3
Longueur (en cm)	8,5	9	10,5	11	8	11,8	9,4	7,5

On peut construire le nuage de points associé à cette série statistique :

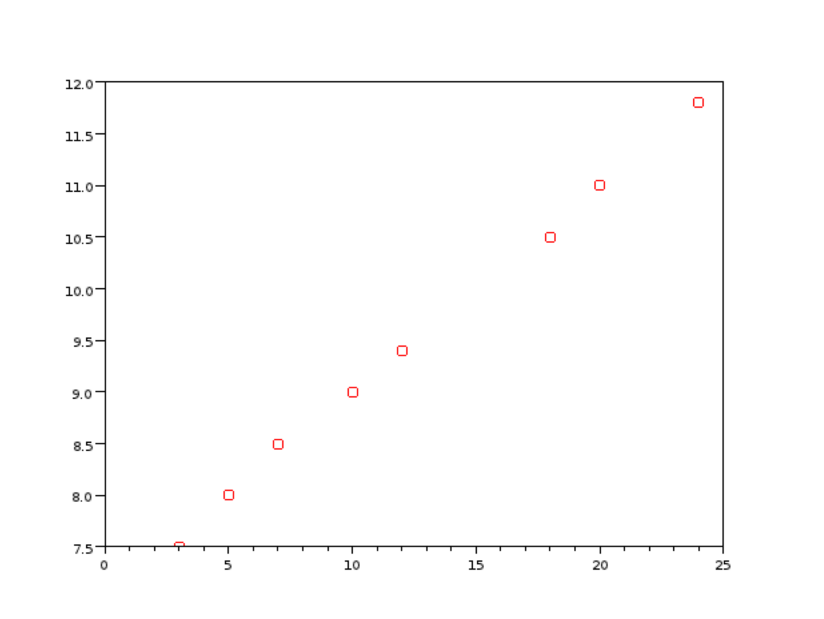


FIGURE 9.1 – Nuage de points associé à la série statistiques du ressort

2 Point moyen

Définition 9.4 (Point moyen d'un nuage)**.** *Le point moyen d'un nuage de points est le point G de coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$ où (l'on rappelle que) :*

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad \overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Exemple 9.5. Dans l'exemple du ressort, on a :

$$\overline{x} = \frac{7+10+18+20+5+24+12+3}{8} = 12{,}375$$
$$\overline{y} = \frac{8{,}5+9+10{,}5+11+8+11{,}8+9{,}4+7{,}5}{8} = 9{,}125$$

D'où $G = (12{,}375; 9{,}125)$.

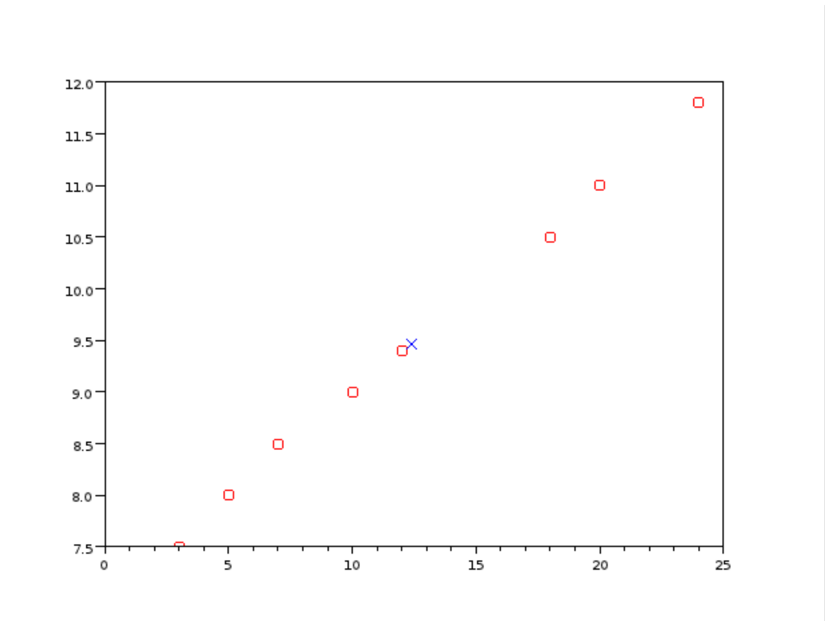


FIGURE 9.2 – Nuage de points associé à la série statistiques du ressort, point moyen

3 Caractéristiques numériques

Remarque 9.6. Comme X et Y sont deux caractères discrets, on peut séparément calculer la moyenne $\overline{x}$, $\overline{y}$, la médiane, les quartiles, l'écart-type $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ et la variance $\operatorname{Var}(X)$ et $\operatorname{Var}(Y)$.

Définition 9.7 (Covariance)**.** *On appelle* covariance *du couple (X, Y), le réel :*

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}).$$

Définition 9.8 (Coefficient de corrélation linéaire)**.** *On appelle* coefficient de corrélation linéaire*, le réel :*

$$r = \rho(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Exemple 9.9. Dans l'exemple précédent, on peut calculer :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) \simeq 10{,}02 \quad \text{et} \quad \rho(X,Y) \simeq 0{,}99$$

Propriété 9.10.
1. $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$ *d'après la formule de Koeing.*
2. *La covariance est une forme bilinéaire symétrique positive.*
3. $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$ *et donc* $|\rho(X,Y)| \leq 1$.
4. $|r| = |\rho(X,Y)| = 1$ *si et seulement si les points du nuages sont alignés.*

4 Ajustement affine

Théorème 9.11 (Méthode des moindres carrés)**.** *La droite d'équation*

$$y - \overline{Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)^2}(x - \overline{X})$$

passe par le point moyen et est la droite d'équation réduite de la forme $y = ax + b$ *qui minimise la somme :*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(ax_i + b - y_i)^2$$

pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$*. Autrement dit :*

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)^2} \quad \text{et} \quad b = \overline{Y} - \overline{X}\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)^2}$$

réalisent ce minimum sur $\mathbb{R}^2$.

Définition 9.12 (Droite d'ajustement)**.**
- *La droite définie ci-dessus est appelée* droite d'ajustement *(ou* droite de régression *de* Y *en* X.
- *La somme*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(ax_i + b - y_i)^2$$

est appelée résidu quadratique.

Remarques 9.13.
1. La droite d'équation

$$x - \overline{X} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(Y)^2}(y - \overline{Y})$$

minimise la somme

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(ay_i + b - x_i)^2$$

et s'appelle droite d'ajustement de X en Y.

2. Notons $Z = (1,\dots,1)$ le caractère constant égal à 1 sur la population commune à X et Y. Ajuster Y en X revient à considérer le projeté orthogonal de Y sur le sous-espace (X,Z) de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique.
3. Lorsque $|r| = |\rho(X,Y)| > 0{,}9$ (valeur dépendant des auteurs et des besoins), on considère que l'ajustement affine de Y en X est satisfaisant (sinon, il faut déterminer un autre type d'ajustement).

Exemple 9.14. On va calculer l'ajustement affine pour notre exemple du ressort. On a :

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)^2} \simeq 0{,}2 \quad \text{et} \quad b = \overline{Y} - \overline{X}\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)^2} \simeq 7.$$

D'où la droite de régression a pour équation $y = 0{,}2x + 7$ et on a vu que le coefficient de corrélation est pratiquement égal à 1. On peut donc affirmer sans trop d'erreur que l'allongement du ressort est *proportionnel* à la masse appliquée.

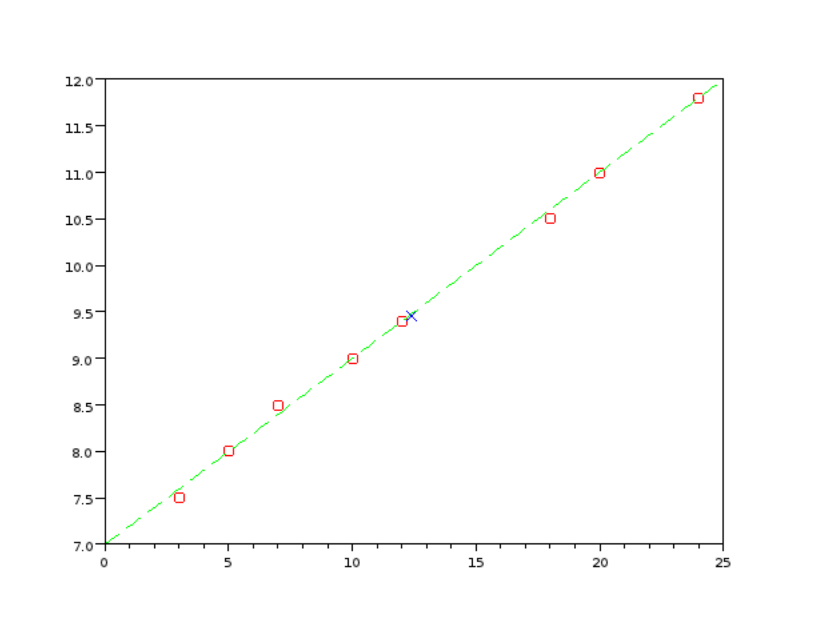


FIGURE 9.3 – Nuage de points associé à la série statistiques du ressort, droite de régression linéaire

Compléments

Démonstration du théorème 9.11, première méthode. On pose

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - ax_i - b]^2$$

et on introduit $z = y - ax - b$, on peut alors réécrire $S(a,b)$ comme

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} z_i^2.$$

Or, on sait que

$$\operatorname{Var}(z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - z)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \overline{z}^2$$

et, par linéarité de la moyenne $\overline{z} = \overline{y} - a\overline{x} - b$. Donc, minimiser $S(a,b)$ revient à minimiser $\sum z_i^2 = n(\operatorname{Var}(z) + \overline{z}^2)$.

On va donc minimiser $n\operatorname{Var}(z)$. On a :

$$z_i - \overline{z} = y_i - ax_i - b - (\overline{y} - a\overline{x} - b) = (y_i - \overline{y}) - a(x_i - \overline{x}).$$

D'où :

$$\begin{aligned}
n\operatorname{Var}(z) &= \sum_{i=1}^{n}(z_i-\overline{z}) = \sum_{i=1}^{n}[(y_i-\overline{y})-a(x_i-\overline{x})]^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}[(y_i-\overline{y})^2-2a(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})+a^2(x_i-\overline{x})^2]\\
&= \sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2-2a\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})+a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2.
\end{aligned}$$

Or

$$\operatorname{Cov}(x,y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}).$$

On a finalement :

$$\operatorname{Var}(z)=\operatorname{Var}(x)a^2-2\operatorname{Cov}(x,y)+\operatorname{Var}(y).$$

On reconnaît un trinôme du second degré. On va l'écrire sous forme canonique :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(z) &= \left(\sigma(x)a-\frac{\operatorname{Cov}(x,y)}{\sigma(x)}\right)^2+\operatorname{Var}(y)-\left(\frac{\operatorname{Cov}(x,y)}{\sigma(x)}\right)^2\\
&= \left(\sigma(x)a-\frac{\operatorname{Cov}(x,y)}{\sigma(x)}\right)^2+\frac{\operatorname{Var}(x)\operatorname{Var}(y)-\operatorname{Cov}(x,y)^2}{\operatorname{Var}(x)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{Var}(z)$ est minimal lorsque $\left(\sigma(x)a-\frac{\operatorname{Cov}(x,y)}{\sigma(x)}\right)^2=0$, c'est-à-dire $a=\frac{\operatorname{Cov}(x,y)}{\operatorname{Var}(x)}$ et le minimum de $\operatorname{Var}(z)$ est

$$\frac{\operatorname{Var}(x)\operatorname{Var}(y)-\operatorname{Cov}(x,y)^2}{\operatorname{Var}(x)}.$$

On va maintenant minimiser $\overline{z}^2$. On a : $\overline{z}=\overline{y}-a\overline{x}$. Donc $\overline{z}$ est minimal si $b=\overline{y}-a\overline{x}$ et le minimum de $\overline{z}$ est 0.

D'où la droite de régression de y en x a pour équation $y=ax+b$ où

$$a=\frac{\operatorname{Cov}(x,y)}{\operatorname{Var}(x)}\quad\text{et}\quad b=\overline{y}-a\overline{x}.$$

□

Démonstration du théorème 9.11, seconde méthode. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}f_i(ax_i+b-y_i)^2.$$

C'est une fonction polynôme de degré 2 que l'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
f(a,b) &= \left(\sum_{i=1}^{n}f_ix_i^2\right)a^2+b^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}f_ix_i\right)ab\\
&\qquad -2\left(\sum_{i=1}^{n}f_ix_iy_i\right)a-2\left(\sum_{i=1}^{n}f_iy_i\right)b+\sum_{i=1}^{n}f_iy_i^2\\
f(a,b) &= \overline{X^2}a^2+b^2+2\overline{X}ab-2\overline{XY}a-2\overline{Y}b+\overline{Y^2}.
\end{aligned}$$

Les dérivées partielles sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b)=2\overline{X^2}a+2\overline{X}b-2\overline{XY}\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial b}(a,b)=2\overline{X}a+2b-2\overline{Y}$$

Elles s'annulent simultanément en l'unique point critique défini par :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{-\overline{X}\cdot\overline{Y}+\overline{XY}}{\overline{X^2}-\overline{X}^2} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)^2}\\
b_0 &= \frac{\overline{XY}\cdot\overline{X}+\overline{Y}\cdot\overline{X^2}}{\overline{X^2}-\overline{X}^2} = \overline{Y}-\overline{X}\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)^2}.
\end{aligned}$$

Les dérivées partielles secondes sont données par :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a,b) = 2\overline{X^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}(a,b) = 2\overline{X}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(a,b) = 2.$$

Avec les notations de Monge, au point (a_0, b_0), on a :

$$rt - s^2 = 4\overline{X^2} - 4\overline{X}^2 = 4\sigma(X)^2 > 0$$

ce qui assure qu'on a bien un minimum local en (a_0, b_0). De plus, un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de (a_0, b_0) donne :

$$\begin{aligned}
f(a,b) = f(a_0,b_0) &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a_0,b_0)(a-a_0)^2\\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial a\partial b}(a_0,b_0)(a-a_0)(b-b_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(a_0,b_0)(b-b_0)^2 \geq f(a_0,b_0)
\end{aligned}$$

puisque les termes d'ordre supérieur sont nuls (fonction polynôme de degré 2) et la forme quadratique est strictement positive ($rt - s^2 > 0$) et ainsi on a bien un maximum global sur $\mathbb{R}^2$.

La droite d'équation réduite $y = a_0 x + b_0$ est la droite proposée dans l'énoncé et passe clairement par le point moyen de la série statistique. □

LEÇON

10 Estimation, ponctuelle ou par intervalle de confiance, d'un paramètre, tests d'hypothèse

Niveau, prérequis, références

Niveau BTS
Prérequis Probabilités, loi normale
Références [25, 26]

Contenu de la leçon

1 Estimation

1.1 Introduction

Lorsque l'on cherche à déterminer le poids moyen des français, il est bien sûr hors de question de peser *tous* les français. Par contre, en choisissant *judicieusement* un petit nombre de personnes, il est possible d'en obtenir une *estimation*.

On pratique beaucoup ces estimations dans les milieux industriels plutôt que d'étudier la population entière soit parce que cela prendrait trop de temps, soit parce que cela reviendrait trop cher, soit encore parce que cela serait illogique (contrôle qualité détruisant les pièces...).

1.2 Loi des grands nombres

Théorème 10.1 (Loi des grands nombres)**.** *On considère une expérience aléatoire avec un événement A de probabilité p. Si on répète n fois et de manière aléatoire cette expérience on regarde la fréquence d'apparition f_n de l'événement A. On obtient, avec une probabilité aussi grande que l'on veut, une fréquence f_n (pour n expériences indépendantes) aussi proche que l'on veut de p, lorsque n est suffisamment grand.*

Exemple 10.2. Lors de 300 lancers de dés, on observe les résultats suivants :

Faces	1	2	3	4	5	6
Effectif	49	50	51	49	50	51
Fréquence	0,163	$0,166$	0,17	0,163	0,166	0,17

On observe que les fréquences sont proches des probabilités pour obtenir une des faces d'un dé qui est de $\frac{1}{6}$.

1.3 Estimation ponctuelle

On prélève un échantillon au hasard sur la population dont on cherche à faire l'étude.

Définition 10.3 (Estimation ponctuelle de la fréquence)**.** *Pour estimer la fréquence p inconnue d'un caractère dans une population, on prélève un échantillon et on calcule la fréquence d'apparition de ce caractère dans l'échantillon. Cette fréquence d'apparition est une* estimation ponctuelle *de la fréquence p.*

Exemple 10.4. Une usine produit des vis cruciformes. On souhaite estimer la moyenne des longueurs des vis dans la production de la journée qui s'élève à 10000 pièces. On prélève un échantillon de 150 vis et on relève 3 pièces défectueuses. On peut alors donner une estimation de la fréquence p de vis défectueuses dans le production journalière :

$$f = \frac{3}{150} = 0{,}02$$

donc $p = 0{,}02$.

Définition 10.5 (Estimation ponctuelle de la moyenne)**.** *Pour estimer la moyenne m* inconnue *d'une population, on prélève un échantillon et on calcule la moyenne de cet échantillon. Cette moyenne d'échantillon est une* estimation ponctuelle *de la moyenne m.*

Exemple 10.6. On reprend les données de l'exemple de l'usine. On choisit un échantillon de 150 vis et on obtient une moyenne de $m = 4{,}57$ cm. On en déduit donc que la longueur moyenne des vis de la production journalière est $\overline{x} = 4{,}57$ cm.

Définition 10.7 (Estimation ponctuelle de l'écart-type)**.** *Pour estimer l'écart-type σ* inconnu *d'une population, on prélève un échantillon et on calcule l'écart-type σ' de cet échantillon. Le nombre $\sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma'$ est une* estimation ponctuelle *de l'écart-type σ.*

Exemple 10.8. On reprend les données de l'exemple de l'usine. La mesure de la longueur des vis produites dans l'échantillon précédent de 150 pièces conduit à relever un écart-type de 3 mm. La meilleure estimation possible de l'écart-type de la production journalière n'est pas de 3 mm comme dans le cas précédent pour la moyenne, mais de

$$\sigma = 3\sqrt{\frac{150}{149}} \simeq 3{,}01 \text{ mm}.$$

1 4 Estimation par intervalle de confiance

Moyenne On considère une population de moyenne m *inconnue* et d'écart-type σ qu'on suppose *connue*. Si n est assez grand, la variable aléatoire X qui à chaque échantillon de n éléments associe sa moyenne suit approximativement la loi $\mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

On peut donc, à l'aide de $\mathcal{N}(0,1)$, trouver un intervalle $[a\,,b]$ tel que $P(a \leq X \leq b) = 0{,}95$ pr exemple.

Définition 10.9. *Cet intervalle est appelé* intervalle de confiance *de la moyenne m avec le* coefficient de confiance *0,95.*

On a de manière plus générale :

Théorème 10.10. *L'intervalle $[\overline{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,, \overline{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ est l'*intervalle de confiance *de la moyenne m de la population avec le coefficient de confiance $2\Pi(t) - 1$ où $\overline{x}$ est la moyenne de l'échantillon considéré et $\Pi(t)$ la valeur en t de la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$.*

Remarque 10.11. On ne peut déterminer un intervalle de confiance que si *on connaît déjà* l'écart-type σ.

Exemple 10.12. On suppose que la durée de vie, exprimée en heures, d'une ampoule électrique d'un certain type, suit la loi normale de moyenne M inconnue et d'écart type $\sigma = 20$. Une étude sur un échantillon de 16 ampoules donne une moyenne de vie égale à 3000 heures. On va déterminer un intervalle de confiance de M au seuil de risque de 10%. On a :

$$2\Pi(t) - 1 = 1 - 0{,}1 \Leftrightarrow \Pi(t) = 0{,}95 \Leftrightarrow t = 1{,}645.$$

Un intervalle de confiance de M est donc :

$$\left[3000 - 1{,}645\frac{20}{\sqrt{16}}; 3000 + 1{,}645\frac{20}{\sqrt{16}}\right] = [2992\,, 3008].$$

Fréquence On considère une population qui contient avec une fréquence p des individus ayant un certain caractère. Si n est assez grand, la variable aléatoire F qui à chaque échantillon de

n éléments associe la fréquence d'apparition des individus ayant ce caractère suit approximativement la loi $\mathcal{N}\left(p; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$.

De manière analogue au cas pour une moyenne il est possible de déterminer un *intervalle de confiance* de la fréquence p avec un *coefficient de confiance choisi.*

Théorème 10.13. *L'intervalle* $[f - t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}, f + t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}]$ *est l'*intervalle de confiance *de la fréquence* p *avec le* coefficient de confiance $2\Pi(t) - 1$ *où* f *est la fréquence des individus ayant le caractère dans l'échantillon considéré.*

Exemple 10.14. Un sondage dans une commune révèle que sur les 500 personnes interrogées, 42% sont mécontentes de l'organisation des transport. On veut déterminer, au seuil de risque 1%, un intervalle de confiance du pourcentage p de personnes mécontentes dans la commune. On a $f = 0{,}42$, $n = 500$, $2\Pi(t) - 1 = 0{,}99$ donc $t = 2{,}575$. Un intervalle de confiance du pourcentage p est donc :

$$\left[0{,}42 - 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}42 \times 0{,}58}{499}}; 0{,}42 + 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}42 \times 0{,}58}{499}}\right] = [0{,}36\,, 0{,}48] = [36\%\,, 47\%].$$

2 Tests d'hypothèses

Chaque test se déroule en 5 étapes :

1. Détermination de la variable aléatoire de décision et de ses paramètres.
2. Choix des deux hypothèses : l'hypothèse nulle H_0 et de l'hypothèse alternative H_1,
3. L'hypothèse nulle étant considérée comme vraie et compte tenu de l'hypothèse alternative, détermination de la zone critique selon le niveau de risque α donné,
4. Rédaction d'une règle de décision

Ces quatre premières étapes est la *construction du test de validité d'hypothèse* et :

5. Calcul des caractéristiques d'un échantillon particulier puis application de la règle de décision

Cette dernière étape est l'*utilisation du test d'hypothèse.*

2.1 Test bilatéral relatif à une moyenne

Exemple 10.15. Une machine produit des rondelles dont l'épaisseur est une variable aléatoire X d'écart-type $0{,}3$ mm. La machine a été réglée pour obtenir des épaisseurs de 5 mm. Un contrôle portant sur un échantillon de 100 rondelles a donné $5{,}07$ mm comme moyenne des épaisseurs de ces 100 rondelles. Peut-on affirmer que la machine est bien réglée au seuil de risque de 5% ?

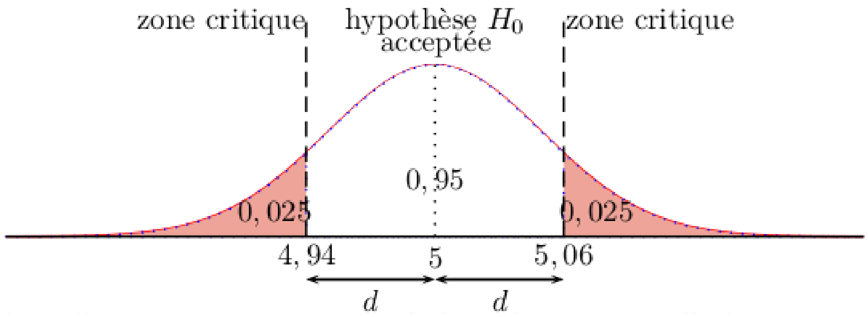
1. **Variable aléatoire de décision** Soit m l'espérance mathématique de X, c'est-à-dire la moyenne des épaisseurs de toutes les rondelles produites par la machine ainsi réglée. On considère la variable aléatoire M qui, à chaque échantillon de taille 100, associe sa moyenne. La talle des échantillons étant suffisamment grande, on considère que M suit la loi $\mathcal{N}\left(m, \frac{0{,}3}{\sqrt{100}}\right)$, c'est-à-dire $\mathcal{N}(m, 0{,}03)$. M sera la variable de décision
2. **Choix des hypothèses** On estime que la machine est bien réglée, si la moyenne de toutes les rondelles produites par la machine est 5 mm. C'est donc l'hypothèse $m = 5$ que nous allons tester. On l'appelle l'hypothèse nulle H_0. Sinon, on choisit comme hypothèse alternative, l'hypothèse H_1 : « $m \neq 5$ ». Recherchons comment la moyenne m_e, d'un échantillon de 100 rondelles peut confirmer ou non l'hypothèse H_0.
3. **Zone critique** Dans le cas où l'hypothèse H_0 est vraie, la variable aléatoire M suit la loi $\mathcal{N}(5; 0{,}03)$. On cherche alors le réel d tel que

$$P(5 - d \leq M \leq 5 + d) = 0{,}95. \tag{10.1}$$

La variable aléatoire $T = \frac{M-5}{0{,}03}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, on a alors :

$$(10.1) \Leftrightarrow P(5-d \leq 0{,}03T+5 \leq 5+d) = 0{,}95 \Leftrightarrow P\left(-\frac{d}{0{,}03} \leq T \leq \frac{d}{0{,}03}\right) = 0{,}95$$
$$\Leftrightarrow 2\Pi\left(\frac{d}{0{,}03}\right) - 1 = 0{,}95 \Leftrightarrow \Pi\left(\frac{d}{0{,}03}\right) = 0{,}975.$$

On trouve alors $\frac{d}{0{,}03} = 1{,}96$ soit $d = 0{,}0588 \simeq 0{,}06$. L'intervalle de confiance est donc l'intervalle : $[5-0{,}06\,,5+0{,}06] = [4{,}94\,,5{,}06]$.



La probabilité qu'un échantillon ait une moyenne située hors de cet intervalle étant $0{,}05$, on peut considérer que cet événement est rare. Ainsi, la moyenne de notre échantillon $m_e = 5{,}07$ nous amène à douter de la validité de l'hypothèse H_0.

Il se peut, malgré tout, que la machine soit bien réglée et que notre échantillon fasse partie des 5% de ceux ayant une moyenne hors de l'intervalle trouvé. C'est pourquoi cette région est appelée *zone critique*.

4. Règle de décision Si la moyenne de l'échantillon n'est pas située dans la zone critique, on accepte H_0, sinon, on refuse H_0 et on accepte H_1.

5. Conclusion Puisque $5{,}07$ appartient à la zone critique, on décide de rejeter l'hypothèse H_0 et d'accepter l'hypothèse alternative H_1 : « $m \neq 5$ » (la machine n'est pas bien réglée).

Remarque 10.16. Dans un test de validité d'hypothèse, le seuil de risque α est la probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie.

2 2 Test unilatéral relatif à une moyenne

Exemple 10.17. La durée de vie (en heures) des ampoules électriques produites par une usine est une variable aléatoire X d'écart type 120. Le fabricant annonce qu'en moyenne, les ampoules ont une durée de vie de 1120 heures. On demande de rédiger une règle de décision pour vérifier l'affirmation du fabricant, au seuil de risque de 5%, en testant un échantillon de 36 ampoules.

1. Variable aléatoire de décision Soit m l'espérance mathématique de X, c'est-à-dire la moyenne des durées de vie de toutes les ampoules produites. On considère la variable aléatoire M qui, à chaque échantillon de 36 ampoules associe la moyenne de durée de vie des 36 ampoules. La taille des échantillons étant suffisamment grande, on considère M suit la loi $\mathcal{N}\left(m; \frac{120}{\sqrt{36}}\right)$, c'est-à-dire $\mathcal{N}(m; 20)$.

2. Choix des hypothèses Soit l'hypothèse nulle H_0 : « $m = 1120$ » (l'affirmation du fabricant est vraie). Dans l'exemple précédent, les rondelles devaient avoir une épaisseur moyenne de 5 mm et cette mesure ne supportait ni excès, ni déficit. Ici, l'acheteur ne se plaindra que si la durée de vie des ampoules est inférieure à 1120 heures ; dans le cas où la moyenne m_e, de l'échantillon est supérieure à 1120, l'hypothèse du fabricant se trouve immédiatement confirme. L'hypothèse alternative H_1 est donc $m < 1120$ (l'affirmation du fabricant est fausse).

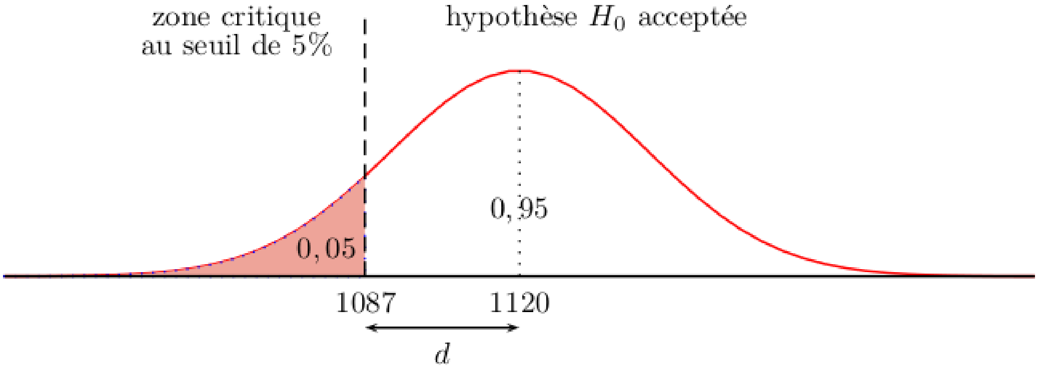
3. Zone critique La zone critique se trouve donc d'un seul côté de la moyenne. On dit alors que le test est unilatéral par opposition au test bilatéral effectué au paragraphe précédent. Dans le cas où H_0 est vraie, la variable aléatoire M suit la loi $\mathcal{N}(1120; 20)$. On cherche alors le réel d tel que

$$P(M < 1120 - d) = 0{,}05. \tag{10.2}$$

La variable aléatoire $T = \frac{M-1120}{20}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, on a alors :

$$\begin{aligned}(10.2) &\Leftrightarrow P(20T + 1120 < 1120 - d) = 0{,}05 \Leftrightarrow P\left(T < -\tfrac{d}{20}\right) = 0{,}05\\ &\Leftrightarrow P\left(T > \tfrac{d}{20}\right) = 0{,}05 \Leftrightarrow 1 - P\left(T \leq \tfrac{d}{20}\right) = 0{,}05 \Leftrightarrow \Pi\left(\tfrac{d}{20}\right) = 0{,}95.\end{aligned}$$

On trouve alors $\frac{d}{20} = 1{,}645$ soit $d = 32{,}9 \approx 33$. La zone critique est donc l'intervalle $]-\infty\,, 1120 - 33] =]-\infty\,, 1087]$.



La zone critique est l'intervalle $]-\infty\,, 1087]$: 5% seulement des échantillons de taille 36 ont en moyenne une durée de vie inférieure à 1087 heures.

4. Règle de décision Si la moyenne m_e de l'échantillon observé est inférieure à 1087, on rejette l'hypothèse H_0 et on accepte l'hypothèse alternative H_1 (l'affirmation du fabricant est fausse). Si la moyenne m_e de l'échantillon observé est supérieure à 1087, on accepte l'hypothèse H_0.

2 3 Test unilatéral relatif à une fréquence

Remarque 10.18. On donne ici un exemple de test unilatéral relatif à une fréquence, mais d'autres cas peuvent amener à envisager des tests bilatéraux relatifs à une fréquence.

Exemple 10.19. Un joueur doit choisir au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Il obtient certains avantages s'il découvre un roi. On constate qu'il a retourné 134 fois un roi sur 800 essais. Peut-on présumer, au seuil de risque de 1%, que ce joueur est un tricheur ?

1. Variable aléatoire de décision Soit p la fréquence de rois que le joueur découvraient s'il jouait une infinité de fois. Soit F la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 800 essais, associe la fréquence d'apparition du roi. La taille des échantillons étant suffisamment grande, on considère F suit la loi $\mathcal{N}\left(p; \sqrt{\frac{p(1-p)}{800}}\right)$. F sera la variable aléatoire de décision.

2. Choix des hypothèses Si le joueur n'est pas un tricheur, la valeur de p est $\frac{4}{32} = 0{,}125$. Donc, l'hypothèse nulle H_0 est « $p = 0{,}125$ » (le joueur n'est pas un tricheur). Si $p < 0{,}125$, on considéra que le joueur n'est pas un tricheur non plus, donc : l'hypothèse alternative H_1 est « $p > 0{,}125$ » (le joueur est un tricheur).

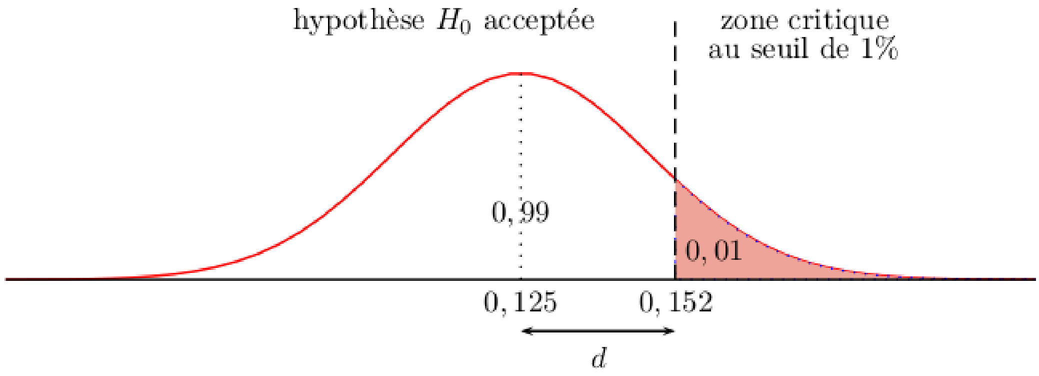
3. Zone critique Dans le cas où l'hypothèse H_0 est vraie, la variable aléatoire F suit la loi $\mathcal{N}\left(0{,}125; \sqrt{\frac{0{,}125\times 0{,}875}{800}}\right)$ soit $\mathcal{N}(0{,}125; 0{,}0117)$. On cherche alors le réel d tel que

$$P(F > 0{,}125 + d) = 0{,}01 \tag{10.3}$$

La variable aléatoire $T = \frac{F-0{,}125}{0{,}0117}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, on a alors :

$$(10.3) \Leftrightarrow P(0{,}0117T + 0{,}125 > 0{,}125 + d) = 0{,}01 \Leftrightarrow P\left(T > \frac{d}{0{,}0117}\right) = 0{,}01$$
$$\Leftrightarrow 1 - P\left(T \leq \frac{d}{0{,}0117}\right) = 0{,}01 \Leftrightarrow \Pi\left(\frac{d}{0{,}0117}\right) = 0{,}99.$$

On trouve alors $\frac{d}{0{,}0117} = 2{,}33$ soit $d = 0{,}027261 \approx 0{,}027$. La zone critique est donc l'intervalle $[0{,}125 + 0{,}027\,, +\infty[= [0{,}152\,, +\infty[$.



Donc la zone critique est $]0{,}152\,, +\infty]$.

4. Règle de décision Si la fréquence de l'échantillon est supérieure à $0{,}152$, on rejette l'hypothèse H_0 et on accepte l'hypothèse H_1 : l'hypothèse H_0 n'est pas validée. Si la fréquence de l'échantillon est inférieure $0{,}152$, on accepte l'hypothèse H_0 : l'hypothèse H_0 est validée.

5. Conclusion L'échantillon observé a une fréquence égale à $\frac{134}{800} = 0{,}1675$. D'après la règle de décision, puisque $0{,}1675 > 0{,}152$, on accepte l'hypothèse H_1 et on décide que le joueur est un tricheur.

LEÇON

11 Multiples, diviseurs, division euclidienne

Niveau, prérequis, références

Niveau Sixième (multiples, diviseurs) - Troisième (division euclidienne)

Prérequis Nombres entiers, opérations

Références [27, 28]

Contenu de la leçon

1 Division euclidienne

Définition 11.1. *Effectuer la division euclidienne d'un nombre entier a, appelé* dividende*, par un nombre entier b (b différent de 0), appelé* diviseur*, revient à trouver deux nombres entiers q et r, appelés respectivement* quotient *et* reste *vérifiant l'égalité : $a = b \times q + r$.*

Pour poser la division, on fait comme-ci dessous :

$$\begin{array}{r|l} \text{dividende} & \text{diviseur} \\ \cline{2-2} \text{reste} & \text{quotient} \\ & \end{array}$$

Remarque 11.2. Le reste doit *toujours* être inférieur au diviseur.

Exemple 11.3. Effectuer la division euclidienne de 169 par 3 :

$$\begin{array}{r|l} 16\underline{9} & 3 \\ \cline{2-2} 1\underline{9} & 56 \\ 1 & \\ & \end{array}$$

2 Multiples et diviseurs. Critères de divisibilité

2 1 Définitions

Définition 11.4. *Un nombre a est un* multiple *d'un nombre b ($b \neq 0$) lorsque le* reste *de la* division euclidienne *de a par b est égale à 0.*

Exemples 11.5.

1. 8 est multiple de 4 car :

$$\begin{array}{r|l} 8 & 4 \\ \cline{2-2} \boxed{0} & 2 \\ & \end{array}$$

2. 217 est un multiple de 7 car :

$$\begin{array}{r|l} 21\underline{7} & 7 \\ \cline{2-2} 0\underline{7} & 31 \\ \boxed{0} & \\ & \end{array}$$

Remarque 11.6. On dit aussi :
- 4 est un *diviseur de* 8
- 217 est *divisible* par 7.

2 2 Critères de divisibilité par 2,5,4,3 et 9

Définition 11.7 (Critère de divisibilité par 2)**.** *Un nombre est* divisible par 2 *(ou est* un multiple *de* 2*) si son chiffre des unités est* 0*,* 2*,* 4*,* 6 *ou* 8*.*

Exemple 11.8. $179\mathbf{8}$, $1120\mathbf{0}$, $14575\mathbf{6}$ sont divisibles par 2.

Définition 11.9 (Critère de divisibilité par 3)**.** *Un nombre est* divisible par 3 *(ou est* un multiple *de* 3*) si la somme des chiffres qui le composent est divisible par* 3*.*

Exemples 11.10.
1. $\mathbf{12654}$ est divisible par $\mathbf{3}$ car
$$1+2+6+5+4=18$$
et 18 est divisible par 3 $(6\times 3=18)$.
2. $\mathbf{132621}$ est divisible par $\mathbf{3}$ car
$$1+3+2+6+2+1=15$$
et 15 est divisible par 3 $(5\times 3=15)$.

Définition 11.11 (Critère de divisibilité par 4)**.** *Un nombre est divisible par* 4 *(ou est un multiple de* 4*) si le nombre composé des deux derniers chiffres est divisible par* 4*.*

Exemples 11.12.
1. $17\mathbf{16}$ est divisible par 4 car le nombre formé des deux derniers chiffres est $\mathbf{16}$ et $\mathbf{16}$ est divisible par 4 $(4\times 4=16)$.
2. $69\mathbf{24}$ est divisible par 4 car le nombre formé des deux derniers chiffres est $\mathbf{24}$ et $\mathbf{24}$ est divisible par 4.

Définition 11.13 (Critère de divisibilité par 5)**.** *Un nombre est* divisible par 5 *(ou est* un multiple *de* 5*) si son chiffre des unités est* 0 *ou* 5*.*

Exemples 11.14. $279\mathbf{5}$, $2320\mathbf{0}$, $14575\mathbf{5}$ sont divisibles par 5.

Définition 11.15 (Critère de divisibilité par 9)**.** *Un nombre est* divisible par 9 *(ou est un multiple de* 9*) si la somme des chiffres qui le composent est divisible par* 9*.*

Exemples 11.16.
1. $\mathbf{12654}$ est divisible par 9 car :
$$1+2+6+5+4=\mathbf{18}$$
et $\mathbf{18}$ est divisible par 9 $(9\times 2=18)$.
2. $\mathbf{189261}$ est divisible par 9 car
$$1+8+9+2+6+1=\mathbf{27}$$
et $\mathbf{27}$

3 Division décimale

La division décimale permet d'obtenir :
– soit la valeur exacte du quotient,
– soit la valeur approchée du quotient (le quotient peut être un nombre décimal).

3.1 Division décimale d'un nombre entier par un nombre entier

Méthode 11.17. 1. *On effectue la division euclidienne.*

2. *Si on a épuisé tous les chiffres du nombre, on rajoute un zéro au reste et on met la virgule au quotient*
3. *On peut continuer la division en rajoutant à chaque fois un zéro au reste jusqu'à obtenir un reste nul.*

Exemple 11.18. On veut diviser 137 par 4.

$$\begin{array}{r|l} 137 & 4 \\ \cline{2-2} 17 & 34 \\ 1 & \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{r|l} 137,00 & 4 \\ \cline{2-2} 17 & 34,25 \\ 10 & \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

34,25 est la valeur exacte du quotient de 137 divisé par 4 (car le reste est égal à 0).

3.2 Division par un nombre décimal par un nombre entier

Méthode 11.19. 1. *On effectue la division de la partie entière du dividende par le diviseur* (même si la partie entière est inférieure au diviseur).

2. Dès que l'on descend le chiffre qui est juste après la virgule, on met la virgule au quotient.
3. *On peut ensuite continuer la division comme précédemment.*

Exemple 11.20. On veut diviser 174,5 par 5.

$$\begin{array}{r|l} 174{,}5 & 4 \\ \cline{2-2} 24 & 34 \\ 4 & \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{r|l} 174{,}5 & 5 \\ \cline{2-2} 24 & 34,9 \\ 45 & \\ 0 & \end{array}$$

34,9 est la valeur exacte du quotient de 174,5 divisé par 5 (car le reste est égal à 0).

Exemple 11.21. On veut diviser 4,3 par 6. Comme $4 < 6$, la partie entière du quotient est nulle.

$$\begin{array}{r|l} 4{,}3 & 6 \\ \cline{2-2} \mathbf{43} & 0{,}7 \\ 1 & \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{r|l} 4{,}3000 & 6 \\ \cline{2-2} 43 & 0{,}7166\ldots \\ 10 & \\ 40 & \\ 40 & \\ 4\ldots & \end{array}$$

Compléments

1 Démonstration des critères de divisibilité

Cette section nécessite des connaissances de niveau Terminale S car les démonstrations font appel aux congruences.

Démonstration du critère de divisibilité par 2. Soit N un nombre entier. Il existe donc un B et a_0 tel que

$$N = 10B + a_0$$

avec $0 \leq a_0 \leq 9$. Or $10B$ est toujours multiple de 2 donc N est multiple de 2 si et seulement si a_0 est multiple de 2. □

Démonstration du critère de divisibilité par 3. Soit N un entier naturel divisible par 3. On a alors :

$$3 \mid N \Leftrightarrow N \equiv 0 \pmod 3.$$

On pose

$$N = a_0 + a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + \cdots + a_n \times 10^n.$$

Or $10 \equiv 1 \pmod 3$ donc

$$N \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 0 \pmod 3.$$

Ainsi, lorsqu'un nombre est divisible par 3, la somme des chiffres de ce nombre est divisible par 3. □

Remarque 11.22. On peut faire une démonstration analogue pour le critère de divisibilité par 7.

Définition 11.23 (Critère de divisibilité par 7)**.** *Un nombre est* divisible par 7 *si et seulement si le résultat de la soustraction du* nombre de dizaines *par le double du chiffre des unités est multiple de 7.*

Exemple 11.24. 252 est divisible par 7 car son nombre de dizaine est 25, son chiffre des unités est 2 et

$$25 - 2 \times 2 = 25 - 4 = 21 \quad \text{(divisible par 7)}.$$

La démonstration nécessite la connaissance du théorème de Gauss.

Démonstration du critère de divisibilité par 7. Soit N un nombre entier divisible par 7. On pose

$$N = a_0 + a_1 \times 10 + \cdots + a_n \times 10^n.$$

On a :

$$7 \mid 10(a_1 + a_2 \times 10 + \cdots + a_n \times 10^{n-1} - 2a_0).$$

Or 7 et 10 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss :

$$7 \mid a_1 + a_2 \times 10 + \cdots + a_n \times 10^{n-1} - 2a_0.$$

Réciproquement si

$$7 \mid a_1 + a_2 \times 10 + \cdots + a_n \times 10^{n-1} - 2a_0$$

alors

$$7 \mid 10(a_1 + a_2 \times 10 + \cdots + a_n \times 10^{n-1} - 2a_0)$$

Or, $7 \mid 21$ donc

$$7 \mid a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + \cdots + a_n \times 10^n - 20a_0 + 21a_0.$$

On obtient ainsi $7 \mid N$. □

LEÇON

12 PGCD, PPCM de deux entiers naturels

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S

Prérequis Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, division euclidienne, multiples, diviseurs, nombres premiers et décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers.

Références [29, 30]

Contenu de la leçon

1 PGCD

Définition 12.1. *L'ensemble des diviseurs communs à a et b admet un plus grand élément appelé le* PGCD *de a et de b, noté* $\mathrm{PGCD}(a, b)$.

Remarques 12.2.
1. Les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs de $\mathrm{PGCD}(a, b)$.
2. $b \mid a$ équivaut à $\mathrm{PGCD}(a, b) = b$.
3. Soient a et b deux entiers relatifs alors

$$\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(|a|, |b|).$$

Théorème 12.3 (Théorème d'Euclide)**.** *Soient a et b deux entiers naturels non nuls. La suite des divisions euclidiennes :*
- *de a par b : $a = bq_0 + r_0$,*
- *de b par r_0 (si $r_0 \neq 0$) : $b = r_0 q_1 + r_1$*
- *de r_0 par r_1 (si $r_1 \neq 0$) : $r_0 = r_1 q_2 + r_2$*
- *$\dots$*
- *de r_{n-1} par r_n (si $r_n \neq 0$) : $r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1}$.*

Fini par s'arrêter, un des restes r_i étant nul. Le dernier reste non nul est alors le $\mathrm{PGCD}(a, b)$ *(si $r_0 = 0$ alors* $\mathrm{PGCD}(a, b) = b$*).*

Exemple 12.4. Déterminer $\mathrm{PGCD}(1636, 1128)$. On applique l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}
1636 &= 1128 + 508 \\
1128 &= 2 \times 508 + 112 \\
508 &= 4 \times 112 + 60 \\
112 &= 60 + 52 \\
60 &= 52 + 8 \\
52 &= 6 \times 8 + 4 \\
8 &= 4 \times 2
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{PGCD}(1636, 1128) = 4$.

Propriétés 12.5.
1. *$\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(b, a)$,*
2. *$\mathrm{PGCD}(ka, kb) = k \times \mathrm{PGCD}(a, b)$ avec k entier relatif,*
3. *si a divise c et b divise d alors $\mathrm{PGCD}(a, b)$ divise $\mathrm{PGCD}(c, d)$.*

Théorème 12.6 (Identité de Bézout)**.** *Soient a et b deux entiers naturels non nuls et $d = \mathrm{PGCD}(a, b)$. Il existe (u, v) entiers naturels tels que $au + bv = d$.*

Remarque 12.7. Le couple (u, v) n'est pas unique. Par exemple :

$$\begin{aligned} 1 &= 3 \times 1 + 2 \times -1, \\ &= 3 \times -1 + 2 \times 2. \end{aligned}$$

2 Nombres premiers entre eux

Définition 12.8. *Soient a, b deux entiers relatifs non nuls. a et b sont* premiers entre eux *si et seulement si* $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$.

Exemple 12.9. $\mathrm{PGCD}(6, 25) = 1$ donc 5 et 26 sont premiers entre eux.

Proposition 12.10. *Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. On considère d un diviseur commun de a et b, c'est-à-dire il existe deux entiers relatifs a' et b' tel que $a = da'$ et $b = db'$. Alors $d = \mathrm{PGCD}(a, b)$ si et seulement si* $\mathrm{PGCD}(a', b') = 1$.

Théorème 12.11 (Théorème de (Bachet)-Bézout)**.** *Deux entiers relatifs non nuls a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe des entiers relatifs u et v tel que $au + bv = 1$.*

Théorème 12.12 (Théorème de Gauss)**.** *Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls. Si a divise bc et a et b premiers entre eux alors a divise c.*

Propriété 12.13. *Soient a, b, c trois entiers naturels non nuls. Si a et b divisent c et sont premiers entres entre eux alors ab divise c.*

Exemple 12.14. Si un nombre est divisible par 4 et 7 alors il est divisible par 28 car $\mathrm{PGCD}(4, 7) = 1$.

3 PPCM

Définition 12.15. *Soient a et b deux entiers naturels non nuls. L'ensemble des multiples communs strictement positifs de a et b admet un plus petit élément appelé le* PPCM *de a et b, noté* $\mathrm{PPCM}(a, b)$.

Remarques 12.16.
1. Les multiples communs à a et b sont les multiples du $\mathrm{PPCM}(a, b)$.
2. $a \mid n$ et $b \mid n$ si et seulement si $\mathrm{PPCM}(a, b) \mid n$.

Exemple 12.17. $\mathrm{PPCM}(6, 15) = 30$.

Propriétés 12.18.
1. $\mathrm{PPCM}(a, b) = \mathrm{PPCM}(b, a)$.
2. *Soit $k \in \mathbb{Z}$,* $\mathrm{PPCM}(ka, kb) = k\,\mathrm{PPCM}(a, b)$.
3. *Si $a \mid c$ et $b \mid d$ alors* $\mathrm{PPCM}(a, b) \mid \mathrm{PPCM}(c, d)$.

4 PPCM et PGCD

4 1 Une proposition

Proposition 12.19. *Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. On a :*

$$\mathrm{PGCD}(a, b) \cdot \mathrm{PPCM}(a, b) = |ab| \,.$$

4 2 Décomposition en facteurs premiers

Théorème 12.20. *Le* $\mathrm{PGCD}(a, b)$ *est le produit des facteurs premiers communs aux décompositions de a et b, chacun d'eux étant affecté du plus petit exposant.*

Théorème 12.21. *Le* $\mathrm{PPCM}(a, b)$ *est le produit des facteurs premiers figurant l'une ou l'autre décomposition de a et b, chacun d'eux étant affecté du plus grand exposant.*

Justification de la définition 12.1. Tout entier naturel non nul a admet un nombre fini de diviseurs (il en admet au plus a). L'ensemble des diviseurs communs à a et b contient l'entier 1, donc n'est pas vide. De plus, cet ensemble est fini comme intersection de deux ensembles finis. Nous déduisons qu'il admet un plus grand élément. □

Démonstration du théorème 12.3. Les inégalités $b > r_0 > r_1 > \cdots > r_n > \cdots \geq 0$ montrent que (r_n) est un suite strictement décroissante d'entiers naturels, cette suite est finie. D'autre part, considérons l'égalité $a = bq_0 + r_0$.

- tout diviseur de a et b divise $a - bq_0$: c'est un diviseur de b et r_0.
- tout diviseur de b et r_0 divise $bq_0 + r_0$: c'est un diviseur de b et r_0.

Ainsi, les diviseurs communs à a et b sont ceux de b et r_0 et il va de même pour le plus grand d'entre eux : $\mathrm{PGCD}(a,b) = \mathrm{PGCD}(b, r_0)$.

On peut appliquer ce raisonnement à chaque égalité : si r_i est le premier reste nul, on a :

$$\mathrm{PGCD}(a,b) = \mathrm{PGCD}(b,r_0) = \cdots = \mathrm{PGCD}(r_{i-2}, r_{i-1}).$$

Or $r_{i-2} = r_{i-1}q_i + 0$ donc $\mathrm{PGCD}(a,b) = r_{i-1}$ avec $r_i = 0$. □

Démonstration des propriétés 12.5.

1. Triviale par définition.
2. Soit $k \neq 0$.

$$\begin{cases} a = bq_0 + r_0 \\ b = r_0q_1 + r_1 \\ r_0 = r_1q_2 + r_2 \\ \vdots \\ r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n \\ r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0 \end{cases} \tag{12.1}$$

Donc, d'après (12.1), $\mathrm{PGCD}(a,b) = r_n$. On multiple par k l'expression (12.1) :

$$\begin{cases} ka = kbq_0 + kr_0 \\ kb = kr_0q_1 + kr_1 \\ kr_0 = kr_1q_2 + kr_2 \\ \vdots \\ kr_{n-2} = kr_{n-1}q_n + kr_n \\ kr_{n-1} = kr_nq_{n+1} + 0 \end{cases}$$

D'où $\mathrm{PGCD}(ka,kb) = kr_n$.

3. Comme $\mathrm{PGCD}(a,b) \mid a$, $a \mid c$ et $\mathrm{PGCD}(a,b) \mid b$ et $b \mid d$ alors $\mathrm{PGCD}(a,b)$ divise c et d donc divise $\mathrm{PGCD}(c,d)$.

□

Démonstration du théorème 12.6. On note ξ l'ensemble des entiers naturels non nuls de la forme $ax + by$ avec x et y dans $\mathbb{Z}$. $a \in \xi$ car $a = a \cdot 1 + b \cdot 0$ donc ξ est non vide, il contient alors un plus petit élément m et il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $m = au + bv$. La division euclidienne de a par m s'écrit

$$a = mq + r \qquad \text{avec } 0 \leq r < m.$$

On a donc

$$r = a - mq = a - (au + bv)q = a(1 - uq) + b(-vq).$$

r est donc sous la forme $ax + by$ avec $x = 1 - uq$ et $y = -vq$.

Si $r > 0$ alors $r \in \xi$ donc $r \geq m$ par définition de m. Or $r < m$ donc $r = 0$ et $m \mid a$. De façon analogue, on définie que m divise a et b donc divise $au + bv = m$. On en conclut que $m = \mathrm{PGCD}(a, b)$. □

Démonstration du théorème 12.11. ($\Rightarrow$) $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$: identité de Bézout.

($\Leftarrow$) $au + bv = 1$: pour tout entier d non nuls, si $d \mid a$ et $d \mid b$ alors $d \mid au + bv$ donc $d = 1$ d'où $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$.

□

Démonstration du théorème 12.12. Si $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$ alors il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = 1$, d'où $acu + bcv = c$, ce qui implique que a divise c. □

Démonstration de la propriété 12.13. Comme $a \mid c$, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $c = ad$. Comme $b \mid c$, il existe $d' \in \mathbb{N}$ tel que $c = bd'$. Donc $ad = bd'$. Comme a divise bd' et $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$, d'après Gauss, a divise d'. Il existe donc $d'' \in \mathbb{N}$ tel que $d' = ad''$. Donc :

$$c = d'b = ad''b$$

et ainsi $ab \mid c$. □

Justifications pour la définition 12.15. L'ensemble des multiples communs, strictement positifs de a et b est une partie de $\mathbb{N}$ non vide (car il contient ab), il admet donc un plus petit élément. □

Démonstration de la proposition 12.18.
1. Triviale par définition.
2. Soit $m = \mathrm{PPCM}(a, b)$. Il existe donc p et q entiers relatifs tels que $m = pa = qb$ donc $km = kap = kbp$ et donc km est un multiple commun à a et b. Ainsi $\mathrm{PPCM}(ka, kb) \leq k\,\mathrm{PPCM}(a, b)$. Soit $M = \mathrm{PPCM}(ka, kb)$. Il existe p' et q' entiers relatifs tels que $M = p'ka = q'kb$. donc a divise $\frac{M}{k}$ qui est entier car multiple commun de a et b, donc $\mathrm{PPCM}(a, b) \leq \frac{\mathrm{PPCM}(ka,kb)}{k}$. On en déduit que $\mathrm{PPCM}(ka, kb) = k\,\mathrm{PPCM}(a, b)$.
3. Comme $a \mid c$ alors $a \mid \mathrm{PPCM}(c, d)$ et $b \mid d$ donc $b \mid \mathrm{PPCM}(c, d)$. Ainsi, $\mathrm{PPCM}(a, b) \mid \mathrm{PPCM}(c, d)$.

□

Démonstration de la proposition 12.19. Soient $D = \mathrm{PGCD}(a, b)$ et $M = \mathrm{PPCM}(a, b)$. Il existe a' et b' tels que $a = Da'$ et $b = Db'$ avec $\mathrm{PGCD}(a', b') = 1$.

$$\begin{aligned} DM &= \mathrm{PGCD}(Da', Db') \times \mathrm{PPCM}(Da', Db') \\ &= D^2 \times \mathrm{PGCD}(a', b') \times \mathrm{PPCM}(a', b') \\ &= D^2 \times 1 \times \mathrm{PPCM}(a', b') \end{aligned}$$

On pose $m = \mathrm{PPCM}(a', b')$ et on a :

$$a'b' \geq m. \tag{12.2}$$

Comme $a' \mid m$, $b' \mid m$ et $\mathrm{PGCD}(a', b') = 1$, d'après Gauss, $a'b' \mid m$, d'où

$$a'b' \leq m. \tag{12.3}$$

De (12.2) et (12.3), on obtient $m = a'b'$ donc

$$Dm = D^2a'b' = Da'Db' = ab.$$

□

LEÇON

13 Égalité de Bézout

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S Spécialité
Prérequis Arithmétique
Références [31, 32, 33, 34]

Contenu de la leçon

1 Egalité de Bézout

Définition 13.1 (Egalité de Bézout). *On appelle* égalité de Bézout*, l'équation à solutions entières suivante :*

$$ax + by = \mathrm{PGCD}(a, b).$$

Remarque 13.2. C'est un cas particulier d'équations diophantiennes d'inconnues entières x, y :

$$ax + by = c$$

avec $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$.

Dans toute cette leçon, on se place dans le cas où c est quelconque dans $\mathbb{N}$, ce qui nous amène à étudier les solutions d'une équation diophantienne qui est dit de premier degré, c'est-à-dire qu'elle peut s'écrire $ax + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Exemple 13.3. On considère l'équation

$$7x + 12y = 15. \tag{13.1}$$

Il est clair que $x = -1$ et $y = 1$ est une solution de cette équation puisque

$$7(x + 1) + 12(y - 1) = 0. \tag{13.2}$$

Pour éliminer le terme constant 5, soustrayons (13.1) et (13.2) :

$$7(x + 1) + 12(y - 1) = 0.$$

On en déduit que :

$$7(x + 1) = 12(1 - y) \tag{13.3}$$

où tous les nombres en jeu sont entiers. Les nombres 7 et 12 étant premiers entre eux, on voit[1] ainsi que 7 divise $(1 - y)$ et que 12 divise $(x + 1)$. Il doit donc exister deux entiers k et k' tels que

$$x + 1 = 12k \quad \text{et} \quad 1 - y = 7k'.$$

Alors l'égalité (13.3) devient :

$$7 \times 12k = 12 \times 7k'.$$

Ce qui montre $k = k'$. Donc pour un certain entier k, on a

$$x + 1 = 12k \quad \text{et} \quad 1 - y = 7k$$

c'est-à-dire que si x et y sont solution de l'équation (13.1), alors

$$x = -1 + 12k \quad \text{et} \quad y = 1 - 7k$$

pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, on voit que

$$7 \times (-1 + 12k) + 12 \times (1 - 7k) = -7 + 84k + 12 - 84k = 5.$$

Les solutions donc exactement les couples

$$(x = -1 + 12k; y = 1 - 7k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{13.4}$$

1. C'est le théorème de Gauss : si a divise bc et si a est premier avec b, alors a divise nécessairement c.

2 Théorème de Bachet-Bézout

Théorème 13.4 (Bachet-Bézout)**.** *Etant donnés deux entiers relatifs a et b pas tous nuls, si d est le PGCD de a et b alors il existe deux entiers relatifs x et y tels que $ax + by = d$.*

En particulier, deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si deux entiers relatifs x et y tels que $ax + by = 1$.

Exemple 13.5. Soit à résoudre l'équation diophantienne suivante :

$$12x + 42y = 6. \tag{13.5}$$

C'est une égalité de Bézout car $\mathrm{PGCD}(42, 12) = 6$. D'après le théorème de Bachet-Bézout, il existe deux entiers relatifs x et y tels que :

$$12x + 42y = 6.$$

On peut trouver une solution particulière par l'application de l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 42 &= 12 \times 3 + 6 \\ 12 &= 6 \times 2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 6 &= 12 - 6 \\ 6 &= 12 - (42 - 12 \times 3) \\ 6 &= -42 + 12 \times 4. \end{aligned}$$

D'où :

$$4 \times 12 - 1 \times 42 = 6.$$

Une solution particulière de l'équation (13.5) est :

$$x = 4, \quad y = -1.$$

3 Résolution d'une équation diophantienne du premier degré

Théorème 13.6 (Théorème sur la résolution des équations diophantiennes)**.** *Soient a, b, c sont entiers relatifs non nuls. Le nombre de solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation diophantienne :*

$$ax + by = c \tag{E}$$

dépend de la divisibilité de c par le PGCD de a et b qu'on note δ.

1. *Si δ ne divise pas c, alors cette équation n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.*
2. *Si δ divise c, alors les solutions de cette équation sont les couples d'entiers relatifs de la forme*

$$\left(U + \frac{b}{\delta} \times k, V - \frac{a}{\delta} \times k\right)$$

où k est un entier relatif.

Exemple 13.7. Pour l'équation

$$544x - 944y = 160 \tag{13.6}$$

on cherche d'abord le PGCD des nombres 944 et 544. L'algorithme d'Euclide donne :

$$\begin{aligned} 944 &= 544 \times 1 + 400 \\ 544 &= 400 \times 1 + 144 \\ 400 &= 144 \times 2 + 112 \\ 144 &= 112 \times 1 + 32 \\ 112 &= 32 \times 3 + \boxed{16} \\ 32 &= 16 \times 2. \end{aligned}$$

Le PGCD est 16 ; il divise le terme constant 160. On simplifie les coefficients de l'équation (13.6), qui devient de façon équivalente :

$$34x - 59y = 10, \tag{13.7}$$

les coefficients 34 et 59 sont maintenant premiers entre eux. Pour trouver une solution particulière, on remonte l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{ll}
 & 1 = 2 - 1 \\
 & 1 = 2 - (7 - 2 \times 3) \\
 & 1 = -1 \times 7 + 4 \times 2 \\
59 = 34 + 25 & 1 = -1 \times 7 + 4(9 - 7 \times 1) \\
34 = 25 + 9 & 1 = -1 \times 7 + (4 \times 9 - 7 \times 4) \\
25 = 9 \times 2 + 7 & 1 = 4 \times 9 - 5 \times 7 \\
9 = 7 \times 1 + 2 & 1 = 4 \times 9 - 5(25 - 2 \times 9) \\
7 = 2 \times 3 + \boxed{1} & 1 = -5 \times 25 + 14 \times 9 \\
2 = 1 \times 2 & 1 = -5 \times 25 + 14(34 - 25) \\
 & 1 = 14 \times 34 - 19 \times 25 \\
 & 1 = 14 \times 34 - 19 \times (59 - 34) \\
 & 1 = 33 \times 34 - 19 \times 59
\end{array}$$

L'équation (13.7) admet donc la solution particulière $x = 330$, $y = 190$. On en déduit toutes les solutions de (13.7) - et donc de (13.6) :

$$(x = 330 + 59k; y = 190 + 34k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Méthode 13.8. *De façon général, pour résoudre une équation diophantienne*

$$ax + by = c,$$

la démarche consiste à

1. *déterminer le* PGCD d *des coefficients* a *et* b *et s'assurer qu'il divise le terme constant* c*,*
2. *diviser les coefficients de l'équation par* d*, pour former l'équation équivalente*

   $$a'x + b'y = c',$$

   avec a'*,* b' *premiers entre eux,*
3. *en déterminer une solution particulière* x_0, y_0*, puis toutes les solutions* $x = x_0 + b'k$*,* $y = y_0 - a'k$*, pour tout* $k \in \mathbb{Z}$*.*

4 Applications

4 1 Congruence

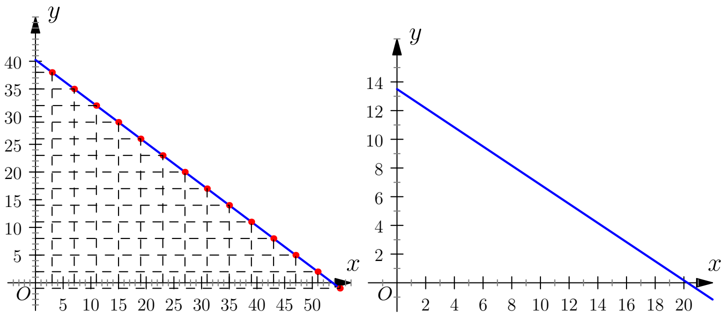
La résolution de l'équation $ax + by = 1$, où a et b sont premiers entre eux, permet de trouver un inverse à a modulo b, c'est-à-dire un entier x tel que

$$ax \equiv 1 \pmod{b}.$$

L'ensemble des solutions permet de dire qu'il existe une unique classe x tel que $ax = 1$ dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$. En effet, parmi les couples solutions, tous les entiers x sont congrus modulo b.

4 2 Equation de droite

L'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant l'équation $ax + by = c$ forme une droite. Les couples d'entiers relatifs vérifiant cette équation correspond aux points M de la droite dont les coordonnées sont entières. La résolution de l'équation dans l'ensemble des entiers relatifs permet de donner les coordonnées de ces points. Selon la valeur de c, la droite D peut ne jamais passer par des points de coordonnées entières ou bien posséder une infinité de points de coordonnées régulièrement répartis.



(a) Résolution graphique de l'équation $9x + 12y = 483$

(b) La droite d'équation $4x + 6y = 81$ ne passe par aucun point de coordonnées entières

FIGURE 13.1 – Droite et équation diophantienne

4 3 Réduction d'une fraction en éléments simples

Décomposer une fraction irréductible $\frac{A}{B}$ en élément simples, c'est la décomposer en somme d'un entier relatif et de fractions de la forme $\frac{r_{j,i}}{p_i^j}$ dans laquelle p_i est un nombre premier apparaissant dans la décomposition de B en facteurs premiers, j est un exposant entier non nul ne dépassant pas l'exposant de p_i dans la décomposition de B et $r_{j,i}$ est un entier compris entre 0 et $p_i - 1$.

Lucas prouve l'existence d'une telle décomposition. Il procède en plusieurs étapes :

1. Si $B = p^n$, où p est un nombre premier, une simple écriture de A dans la base p permet d'aboutir. En effet :

$$A = r_0 + r_1 p + r_2 p^2 + \cdots + r_{n-1} p^{n-1} + E p^n$$

   où les r_i sont des entiers compris entre 0 et $p - 1$ et E est un entier relatif. D'où en divisant par B :

$$\frac{A}{B} = \frac{r_0}{p^n} + \frac{r_1}{p^{n-1}} + \cdots + \frac{r_{n-1}}{p} + E.$$

2. La seconde étape consiste à travailler sur un nombre $B = ab$ où a et b sont premiers entre eux et c'est là qu'intervient l'équation diophantienne. Les deux nombres sont premiers entre eux, il existe donc des entiers relatifs x et y tels que

$$ax + by = A$$

   donc

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{ab} = \frac{x}{b} + \frac{y}{a}.$$

   La décomposition de la fraction sera donc établie dès que seront obtenus les décompositions des fractions $\frac{x}{b}$ et $\frac{y}{a}$.

Lucas procède alors de proche en proche. Si $B = p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} \times \cdots \times p_k^{n_k}$ alors on peut poser $a = p_1^{n_1}$ et $b = \frac{B}{a}$

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{ab} = \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = \frac{x}{b} + \frac{y}{p_1^{n_1}}.$$

La seconde fraction se décompose aisément et la première est à décomposer en utilisant le même processus. Il suffit de $k - 1$ étapes pour arriver au bout de la décomposition complète.

Lucas démontre que malgré la multiplicité des méthodes pour arriver à la décomposition, celle-ci est unique.

Exemple 13.9. On veut décomposer la fraction $\frac{259}{90}$ en éléments simples. On décompose 90 en 9×10. On cherche deux entiers x et y tels que $9x + 10y = 259$. On peut prendre $x = 1$ et $y = 25$:

$$\frac{259}{90} = \frac{1}{10} + \frac{25}{9}. \tag{13.8}$$

On décompose 10 en 2×5. On cherche deux entiers x et y tels que $2x + 5y = 1$. On peut prendre $x = 3$ et $y = -1$.

$$\frac{1}{10} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = -1 + \frac{3}{5} + \frac{1}{2}. \tag{13.9}$$

On écrit 25 en base 3

$$25 = 1 + 3 \times 8 = 1 + 3 \times (2 + 3 \times 2) = 1 + 2 \times 3 + 2 \times 3^2.$$

Donc :

$$\frac{25}{9} = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3} + 2. \tag{13.10}$$

Il suffit de remplacer dans (13.8) les résultats trouvés dans (13.9) et (13.10)

$$\frac{259}{90} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{1}{2}.$$

4 4 Recherche de solutions dans l'ensemble des entiers naturels

On ne considère ici que la résolution de l'équation $ax + by = c$ où a, b, c sont des entiers naturels, a et b premiers entre eux, les solutions étant cherchées parmi les entiers naturels.

Théorème 13.10 (Théorème de Paoli). *Si q est le quotient de la division de c par ab et r le reste, le nombre de solutions entières positives ou nulle de l'équation $ax + by = c$ est de q ou $q + 1$ selon que $ax + by = r$ admet aucune ou une solution.*

Si l'on s'intéresse alors plus précisément aux entiers r compris entre 0 et $ab - 1$, pour lesquels l'équation $ax + by = r$ admet une solution ; on peut démontrer

- Si r est multiple de a ou de b, l'équation comporte une unique solution ;
- Si r est inférieur à $a + b$ et n'est multiple ni de a ni de b, l'équation ne comporte pas de solution ;
- Parmi les équations $ax + by = r$ et $ax + by = ab - r$ où r n'est ni multiple de b ni multiple de a, une seule d'entre elles possède une solution entière positive.

On en déduit le nombre d'entiers r compris entre 0 et $ab - 1$ pour lesquels l'équation $ax + by = r$ admet une solution.

Théorème 13.11 (Théorème de Césaro). *Il existe exactement $ab - \frac{1}{2}(a-1)(b-1)$ entiers naturels r compris entre 0 et $ab - 1$ pour lesquels l'équation $ax + by = r$ admet une solution.*

Lorsque un entier r compris entre 1 et $ab - 1$ est donné, pour déterminer si l'équation $ax + by = r$ admet une solution, il faut observer le système minimal (voir Compléments). Le point de la droite $ax + by = r$ le plus proche de l'origine est de coordonnées rationnelles positives.

L'unique solution entière positive (si elle existe) de l'équation $ax + by = r$ correspond à un des points de la droite à coordonnées entières les plus proches de ce point. Si (x_1, y_1) est une solution dans l'ensemble des entiers relatifs de l'équation $ax + by = r$, l'unique solution positive (si elle existe) de l'équation est donc à chercher dans les couples $(x_1 + bk_1, y_1 - ak_1)$ ou $(x_1 + bk_2, y_1 - ak_2)$ où k_1 et k_2 sont les deux entiers les plus proches de $\frac{ay_1 - bx_1}{a^2 + b^2}$. Si aucun de ces deux couples n'est dans $\mathbb{N}^2$, l'équation n'admet pas de solution.

1 Système minimal

Soit à résoudre l'équation diophantienne (E). On suppose que c est un multiple de $d = \mathrm{PGCD}(a, b)$.

Définition 13.12 (Système minimal)**.** *On dit qu'une solution de (E) est une solution au système minimal, la solution dont laquelle $x^2 + y^2$ soit la plus petite possible.*

Il s'agit de rendre minimal la valeur $(x_1 - b_1 k)^2 + (y_1 - a_1 k)^2$ où (x_1, y_1) sont une solution particulière de (E) et $a_1 = \frac{a}{d}$, $b_1 = \frac{b}{d}$. Si on considère la fonction de la variable réelle t définie par :

$$f(t) = (x_1 + b_1 t)^2 + (y_1 - a_1 t)^2$$

l'étude de cette fonction du second degré montre que celle-ci possède un minimum en $t = \frac{a_1 y_1 - b_1 x_1}{a_1^2 + b_1^2}$. Si t est entier, le couple solution est alors $(x_1 + b_1 t, y_1 - a_1 t)$, sinon l'entier qui rend f minimal est le (ou les) entier(s) k le(s) plus proche(s) de t.

Théorème 13.13. *Le(s) couple(s) d'entiers solution de $ax+by = c$ dont la valeur x^2+y^2 est minimale sont le (ou les) couple(s) $(x_1 + b_1 k, y_1 - a_1 k)$ où k est le (ou les) entier(s) k le(s) plus proche(s) de*

$$t = \frac{a_1 y_1 - b_1 x_1}{a_1^2 + b_1^2}.$$

– Dans le cas où a et b son premiers entre eux, le cas où t est entier mérite d'être explicité. On démontre que t est entier si et seulement si l'entier c est multiple de $a^2 + b^2$. La solution du système minimal est alors :

$$\left(\frac{ac}{a^2 + b^2}, \frac{bc}{a^2 + b^2}\right).$$

– Dans le cas où a et b sont premiers entre eux, il existe deux solutions au système minimal si et seulement si a et b sont impairs et l'entier c est un multiple impair de $\frac{a^2+b^2}{2}$.

2 Démonstration des théorèmes du cours

Démonstration du théorème 13.4. L'existence de tels solutions pour l'égalité de Bézout $ax + by = \mathrm{PGCD}(a, b)$ est justifié par l'algorithme d'Euclide étendu.

On peut supposer par exemple a non nul. Si

$$A = \left\{ax + by,\ (x, y) \in \mathbb{Z}^2\right\},$$

on montre que le plus petit élément strictement positif de A est le plus grand commun diviseur de a et b. En effet $A \cap \mathbb{N}^*$ est non vide (il continent la valeur absolue de a) donc contient un plus petit élément $d_0 = x_0 a + y_0 b$. La division euclidien de a par d_0 a pour reste r qui est un entier naturel élément de A car s'écrivant :

$$r = a - qd_0 = a - qx_0 a = (1 - qx_0) \cdot a + (-qy_0) \cdot b.$$

C'est un entier plus petit que d_0, il ne peut donc pas appartenir à $A \cap \mathbb{N}^*$, donc r est nul. Cela signifie que d_0 divise a. De même, d_0 divise b. Donc d_0 est un diviseur commun à a et b.

Enfin, soit d un autre diviseur à a et b. Comme d divise a et b, d divise $x_0 a + y_0 b$ donc d divise d_0. d_0 est bien le plus grand diviseur commun de a et b et il existe deux entiers x_0 et y_0 tels que

$$\mathrm{PGCD}(a, b) = ax_0 + by_0.$$

□

Démonstration du théorème 13.6. 1. Si δ ne divise par c, on procède par l'absurde : supposons que l'équation admette un couple solution (u, v). La combinaison linéaire $a \times u + b \times v$ est alors égale à c. Comme le PGCD δ divise a et b, alors il divise chacune de leurs combinaisons linéaires. En particulier, δ divise $a \times u + b \times v = c$. Ce qui est absurde ! D'où : si δ ne divise pas c, alors l'équation (E) n'a pas de solution.

2. On suppose que δ divise c. Comme δ divise c alors il existe un entier relatif λ tel que $c = \lambda\delta$. Pour cette démonstration, on procède en trois étapes.

   (a) On détermine une solution particulière de l'équation (E). Comme δ est le PGCD des entiers relatifs a et b, alors en application du théorème de l'identité de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que $a \times u + b \times v = \delta$. Le couple d'entiers relatifs $(\lambda \times u, \lambda \times v)$ est alors une solution particulière de (E). En effet :

   $$a \times (\lambda \times u) + b \times (\lambda \times v) = \lambda \times (a \times u + b \times v) = \lambda \times \delta = c.$$

   On pose $U = \lambda u$ et $V = \lambda v$. Le couple d'entiers (U, V) est une solution particulière de l'équation diophantienne (E).

   (b) On détermine la forme générale des solutions de l'équation (E). Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs solution de (E). Il vérifie donc l'égalité :

   $$\begin{aligned} ax + by = c = aU + bV &\Leftrightarrow ax - aU = bV - by \\ &\Leftrightarrow a \times (x - U) = b \times (V - y) \end{aligned} \tag{13.11}$$

   Comme le PGCD δ divise a et b, alors il existe deux entiers relatifs a' et b' tels que :

   $$a = a' \times \delta \Leftrightarrow a' = \frac{a}{\delta} \quad \text{et} \quad b = b' \times \delta \Leftrightarrow b' = \frac{b}{\delta}.$$

   Divisons l'égalité (13.11) par le PGCD δ.

   $$\begin{aligned} a \times (x - U) = b \times (V - y) &\Leftrightarrow \frac{a \times (x - U)}{\delta} = \frac{b \times (V - y)}{\delta} \\ a' \times (x - U) = b' \times (V - y) & \end{aligned} \tag{13.12}$$

   Donc l'entier relatif a' divise le produit $b' \times (V - y)$.
   Or a' est premier avec le premier facteur b' ! En effet, on sait qu'en appliquant l'identité de Bézout (partie (a)), la combinaison linéaire $a \times u + b \times v$ est égalité à δ. Divisons cette égalité par δ :

   $$a \times u + b \times v = \delta \Leftrightarrow \frac{a}{\delta} \times u + \frac{b}{\delta} \times v = \frac{\delta}{\delta} \Leftrightarrow a' \times u + b' \times v = 1.$$

   Le PGCD δ' des entiers relatifs a' et b' divise chacun de leurs combinaisons linéaires et en particulier $a' \times u + b' \times v = 1$. Or les seuls diviseurs de 1 dans $\mathbb{Z}$ sont -1 et 1. Un PGCD étant un entier positif, nous en concluons que δ' est égal à 1 et que les entiers relatifs a' et b' sont premiers entre eux.
   Comme a' divise le produit $b' \times (V - y)$ et a' est premier avec le facteur b', alors en application du théorème de Gauss, a' divise nécessairement l'autre facteur $V - y$. Donc il existe un entier relatif k tel que $k \times a' = V - y \Leftrightarrow y = V - k \times a'$. Pour exprimer x en fonction de k, on reprend l'égalité (13.12).

   $$a' \times (x - U) = b' \times (V - y) \Leftrightarrow a' \times (x - U) = b' \times k \times a' \Leftrightarrow x = U + b' \times k.$$

   Donc : si le couple d'entiers (x, y) est solution de l'équation (E) alors il est de la forme $(U + b' \times k, V - a' \times k)$ où k est un entier relatif.

(c) On montre maintenant que tous les couples d'entiers de cette forme sont solutions de l'équation (E). Pour tout entier relatif k, on peut écrire :

$$\begin{aligned} a \times (U + b' \times k) + b \times (V - a' \times k) &= a \times U + a \times b' \times k + b \times V - b \times a \times k \\ &= \underbrace{a \times U + b \times V}_{=c} + k \times \underbrace{(a \times b' - b \times a')}_{=0} \end{aligned}$$

car U et V sont solution de (E) et $\frac{a}{a'} = \delta = \frac{b}{b'}$

$$= c + 0 = c$$

Donc tout couple de forme $(U + b' \times k, V - a' \times k)$ est bien solution de l'équation diophantienne (E).

D'où le second point du théorème...

$\square$

LEÇON 14

Nombres premiers, décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S

Prérequis Les notions principales de l'arithmétique

Références [35, 36, 37]

Contenu de la leçon

1 Définitions et premières propriétés

1 1 Définitions

Définition 14.1 (Nombre premier)**.** *Un entier naturel n est* premier *s'il est distinct de 1 et n'admet pas d'autres diviseurs (dans $\mathbb{N}$) que les diviseurs triviaux 1 et n.*

Exemple 14.2. 449 et 1223 sont deux nombres premiers.

Définition 14.3 (Nombre composé)**.** *Un nombre est dit* composé *s'il n'est pas premier.*

Exemple 14.4. 213 n'est pas premier car $213 = 71 \times 3$.

1 2 Premiers résultats

Lemme 14.5. *Tout entier naturel ≥ 2 possède au moins un diviseur premier.*

Lemme 14.6. *Un nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne divise pas.*

Lemme 14.7. *Si p est premier alors $p \mid ab$ implique $p \mid a$ ou $p \mid b$.*

2 Théorème fondamental de l'arithmétique

Dans cette section, on énonce et on démontre le théorème fondamental de l'arithmétique. Ce théorème montre, en particulier, que chacun des éléments de $\mathbb{Z}$ se décompose en produit « d'éléments irréductibles » (nombre premier) et cette décomposition est unique à permutation près.

Théorème 14.8 (Théorème fondamental de l'arithmétique)**.** *Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.*

1. *Il existe k nombres premiers naturels $p_1, p_2, \dots, p_k$ distincts deux à deux et des nombres entiers non nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tels que*
$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$
2. *Il y a unicité de cette décomposition à l'ordre des facteurs près. Autrement dit,*
$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = q_1^{\beta_1} \cdots q_k^{\beta_k}$$
entraîne $k = m$ et l'existence d'une permutation σ de $\mathbb{N}_k = \{1, \dots, k\}$ telle que $q_i = p_{\sigma(i)}$ et $\beta_i = \alpha_{\sigma(i)}$ pour tout i.

3 Infinitude des nombres premiers

Théorème 14.9. *L'ensemble des nombres premiers est infini.*

En exercice, on pourra montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n+3$.

4 Algorithmes de primalité

Dans cette section, on donne quelques algorithmes qui permet :
– de déterminer si un nombre est premier ou non
– de compter le nombre de nombre premiers compris entre 1 et N (où $N \in \mathbb{N}$).

4 1 Algorithme sur la calculatrice TI-82

Avant de donner l'algorithme de primalité, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 14.10. *Un nombre $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ est premier si et seulement si, il n'admet pas de diviseur différent de ± 1 et tel que $d^2 \leq n$.*

Ce lemme permet de déterminer un critère d'arrêt dans un programme qui recherche si un entier naturel n donné à l'avance est premier ou pas.

On donne un programme codé pour les calculatrices TI-82 et qui permet de déterminer si un nombre est premier ou non :

```
Nbprem(n)
Prgm
Local i,r
   2 -> i
   1 -> r
If n=0 or n=1 Then
Disp "nonpremier"
Else
While i^2<=n and r<>0
mod(n,i) -> r
i+1 -> i
EndWhile
If r<>0 Then
Disp "premier"
Else
Disp "nonpremier"
EndIf
EndIf
EndPrgm
```

On donne deux exemples d'exécution avec $n = 80$ et $p = 23$.

```
Nbprem(80)
2 -> i
1 -> r
n<>0 et n<>1
On a : 4<80 et r<>0 donc
mod(80,2) = 0 -> r
3 -> i
On a : 9<80 et r=0 donc
on ne fait pas la boucle
et r = 0 donc "non premier"

Nbprem(23)
2 -> i
1 -> r
n<>0 et n<>1
```

```
On a : 4 < 23 et r<>0 donc
mod(23,2)=1 -> r
3 -> i
On a : 9 < 23 et r<>0 donc
mod(23,3)=2 -> r
4 -> i
On a : 16 < 23 et r<>0 donc
mod(23,4)=3 -> r
5 -> i
On a : 25 > 23 et r<>0 donc
on ne fait pas la boucle
r <> 0 donc "premier"
```

4 2 Crible d'Eratosthène

Le crible d'Eratostène permet d'obtenir la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à un nombre N fixé. L'algorithme est le suivant :

```
- Choisir N
- Ecrire la liste ordonnée des nombres de 2 à N
- Entourer 2
- Tant que le dernier nombre entouré k élevé au carré est
     inférieur à n faire
     - Supprimer tous les multiples de k dans la liste
     - Entourer le premier nombre de la liste suivant k
```

Ainsi, quand l'algorithme s'arrête, on a entouré tous les nombres premiers compris entre 1 et N.

On donne un exemple d'application du crible pour $N = 100$ à la figure 14.1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

FIGURE 14.1 – Crible d'Eratosthène pour $N = 100$

4 3 Compléments : Distribution des nombres premiers

On a montré que l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers était un ensemble infini. Mais entre 1 et N, combien y-a-t-il de nombres premiers ?

Dans l'exemple précédent, on a vu, en appliquant le crible d'Eratosthène, qu'entre 1 et 100, il y a 24 nombres premiers. On énonce un théorème qui permet de faire une majoration du nombre des entiers premiers entre 1 et N.

Théorème 14.11 (Admis). *On note $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ l'ensemble des nombres premiers et $\pi(N)$ le cardinal de l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à N.*

1. *Pour tout n, on a $p_{n+1} \leq p_1 \cdots p_n + 1 \leq p_n^n + 1$*
2. *Pour tout $n \geq 2$, on a $\ln(\ln(n)) \leq \pi(n)$.*

Compléments

Démonstration du lemme 14.5. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des diviseurs de n strictement supérieurs à 1. $\mathcal{D}_n$ n'est pas vide car il contient n, donc il possède un plus petit élément d. On montre que d est premier. Si a est un diviseur de d strictement supérieur à 1 alors $a \leq d$. Mais a divise n (puisque a divise d) donc $d \leq a$. Finalement, $a = d$ et les seuls diviseurs positif de d sont 1 et d. □

Démonstration du lemme 14.6. Si p (qu'on suppose premier) ne divise pas n, l'ensemble des diviseurs de p dans $\mathbb{N}$ sera $\{1, p\}$, et le seul diviseur commun à p et à n ne peut être que 1. □

Démonstration du lemme 14.7. On suppose que p ne divise pas a (on peut faire la même démonstration en supposant que p ne divise pas b) alors p est premier avec a donc p divise b d'après le lemme de Gauss. □

Démonstration du théorème 14.8.

1. Existence : la démonstration de l'existence se fait par récurrence sur n.

   Initialisation Si $n = 1$ alors $n = 2^1$.

   Hérédité Si $n \geq 2$ alors n possède au moins un diviseur premier p d'après le lemme 14.5 et l'on peut écrire $n = pm$ vec $m < n$. Si $m = 1$, c'est fini ! Sinon on applique l'hypothèse de récurrence à m pour obtenir une décomposition de n.

2. Unicité : la démonstration de l'unicité se fait par récurrence sur n.

   Initialisation L'unicité est évidente si $n = 2$ puisque $2 = q_1^{\beta_1} \cdots q_m^{\beta_m}$ montre que $q_i \mid 2$ pour tout $1 \leq i \leq m$, ce qui impose d'avoir $m = 1$, $q_1 = 2$ et $\beta_1 = 1$.

   Hérédité Si l'unicité est démontrée jusqu'au rang n, on suppose que

   $$n + 1 = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = q_1^{\beta_1} \cdots q_m^{\beta_m}$$

   avec $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{N}^*$ où les $p_1, \dots, p_k$ et $q_1, \dots, q_m$ sont des nombres premiers. $p_k \mid q_1^{\beta_1} \cdots q_m^{\beta_m}$ donc p_k divise l'un des q_i d'après le lemme 14.7, par exemple $p_k \mid q_m$. Comme p_k est premier, cela entraîne que $p_k = q_m$ et :

   $$\frac{n+1}{p_k} = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_{k-1}} = q_1^{\beta_1} \cdots q_n^{\beta_n - 1}.$$

   On applique l'hypothèse de récurrence à cette décomposition en distinguant deux cas :

   (a) Si $\alpha_k = 1$ alors $\beta_m = 1$ autrement q_m diviserait l'un des p_i avec $i \neq m$, ce qui est absurde.

   (b) Si $\alpha_k > 1$ alors $\beta_m > 1$ autrement p_k diviserait l'un des q_i avec $i \neq m$. Ce qui est encore absurde.

□

Démonstration du théorème 14.9. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et on montre que $\mathcal{P}$ est un ensemble infini. Par l'absurde, on suppose que $\mathcal{P}$ est un ensemble fini (donc il est dénombrable). On peut donc noter $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$. Considérons l'entier $n = p_1 \cdots p_n + 1$. n est strictement supérieur 1 donc admet un diviseur premier dans $\mathcal{P}$. Mais ceci n'est pas possible car la division euclidienne de n par l'un des quelconques des p_i est toujours de reste 1 donc n est premier et différent des $p_1, \dots, p_n$. Ainsi $\mathcal{P}$ n'est pas fini. $\square$

Démonstration du lemme 14.10. Si n admet un diviseur d tel que $d^2 \leq n$, ce diviseur n'est pas trivial donc n n'est pas premier. Réciproquement si n n'est pas premier, il s'écrit $d = np$ avec $1 \leq d \leq p$ donc $d \leq dp = n$. $\square$

LEÇON

15 Congruences dans $\mathbb{Z}$

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S - Spécialité Math

Prérequis Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Références [38, 39]

Contenu de la leçon

1 Premières définitions

Définition 15.1 (Congruence). *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a est* congru à b modulo n *si $n \mid a - b$. On note alors $a \equiv b \pmod{n}$.*

Exemples 15.2.
1. $11 \equiv 1 \pmod 5$ car $5 \mid 11 - 1$.
2. $25 \equiv 4 \pmod 7$ car $7 \mid 25 - 4$.

Définition 15.3. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a est* congru à b modulo p*, si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par p.*

Propriétés 15.4.
1. *Si $a \equiv b \pmod p$ et $b \equiv c \pmod p$ alors $a \equiv c \pmod p$.*
2. *Si $a \equiv b \pmod p$ et si $a' \equiv b' \pmod p$ alors*
   - *$a + a' \equiv b + b' \pmod p$,*
   - *$aa' \equiv bb' \pmod p$,*
   - *$a^n \equiv b^n \pmod p$, $n \in \mathbb{N}^*$.*
3. *Si $a \equiv b \pmod p$ alors, pour tout $c \in \mathbb{Z}$,*
   - *$a + c \equiv b + c \pmod p$,*
   - *$a - c \equiv b - c \pmod p$,*
   - *$ac \equiv bc \pmod p$.*

Exemples 15.5.
1. On démontre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11. On peut écrire $10 \equiv -1 \pmod{11}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$ et ainsi, $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11.

2 Applications en cryptographie

2 1 Petit théorème de Fermat

Théorème 15.6 (Petit théorème de Fermat). *Soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p. En d'autres termes $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.*

Corollaire 15.7. *Soit p un nombre premier et a un entier quelconque alors $a^p \equiv a \pmod p$.*

2 2 Le cryptage RSA

Le cryptage RSA (du nom des inventeurs, Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman) est intéressant car la clé de cryptage est publique et il n'a donc pas de risques liés à l'envoi de la clé et au procédé de codage des données. Bob, comme tout le monde, peut crypter et envoyer un message. Par contre, seul la destinataire, Alice, qui connaît la clé privée correspondante pourra reconstituer le message initial.

Alice, la destinataire rend publique deux nombres n et c où n est le produit de deux grands nombres premiers p et q qu'elle est seule à connaître, où c est un entier premier avec le produit $(p-1)(q-1)$ compris entre 2 et $(p-1)(q-1)$.

Pour coder le message « Bonjour », par exemple, on commence par remplacer les lettres par leurs positions dans l'ordre alphabétique, ce qui donne

$$02\ 15\ 14\ 10\ 15\ 21\ 18.$$

Si on utilise $n = 10573 = 97 \times 109$, on peut regrouper les chiffres par 4 sans risquer de dépasser n. Ce qui donne $0215\ 1410\ 1521\ 0018$. Pour chaque nombre a de la série, on détermine alors b, reste de la division de a^c par n. On obtient alors dans ce cas avec $c = 5$ la série :

$$9131\ 7391\ 0690\ 7574.$$

C'est cette série de nombres qu'envoie Bob à Alice.

Alice qui connaît les deux facteurs premiers de n (ici $p = 97$ et $q = 109$) détermine alors facilement le nombre entier d vérifiant $1 < d < (p-1)(q-1)$ et tel que

$$cd \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}.$$

Ici $d = 6221$.

Alice peut alors retrouver la série initiale de nombres car, pour chaque entier b de cette série, on démontre de b^d est congru à a modulo n.

L'intérêt pour Alice est bien sûr d'avoir un nombre n produit de deux nombres premiers très grands de façon à ce que les calculateurs même les plus rapides ne puissent pas trouver en un temps suffisammment court les deux facteurs premiers nécessaires pour calculer d.

On note d'autre part que c et d jouent le même et sont interchangeables. Ainsi Alice peut décider de coder elle-même un message en utiliser sa clé privée $d = 6621$. Bob décryptera alors aisément ce message avec la clé publique c. Le message envoyé à Bob constitue en fait une signature du message d'Alice. En effet, si Bob réussit à décrypter sans problème le message à l'aide de la clé c, c'est que ce message a été codé avec la clé privée d connue d'Alice seule et cela suffit pour en garantir l'authenticité.

On donne quelques propriétés permettant de justifier la robustesse de la méthode RSA.

Propriété 15.8. *Soient p et q deux nombres premiers. Si c, tel que $1 < c < (p-1)(q-1)$, est premier avec le produit $(p-1)(q-1)$ alors il existe un unique d tel que $1 < d < (p-1)(q-1)$ et vérifiant*

$$cd \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1).}$$

Propriété 15.9. *Dans les conditions précédentes, si p et q sont différents et si $b \equiv a^c \pmod{pq}$ alors $b^d \equiv a \pmod{pq}$.*

2 3 Le numéro INSEE

Le numéro INSEE ou numéro de Sécurité Sociale est formé de 15 chiffres déterminés, pour chaque individu de la façon suivante :

- 1 chiffre pour le sexe : Homme (1) et Femme (2)
- 2 chiffres correspondants aux deux derniers chiffres de l'année de naissance
- 2 chiffres correspondant au mois de naissance
- 2 chiffres correspondant au département de naissance
- 3 chiffres correspondant à la commune de naissance
- 3 chiffres correspondant au numéro d'inscription sur le registre des naissances
- 2 chiffres correspondant à une clé de contrôle. La clé de contrôle est ainsi déterminée de la manière suivante : « *On prend le nombre formé par les 13 premiers chiffres, on cherche son reste r dans la division par 97, la clé est alors égale au nombre $97 - r$ écrit avec deux chiffres (le premier étant éventuellement un 0.*

Exercice 15.10. 1. Vérifier la clé de contrôle associée au numéro 2 85 05 33 565 001 89

2. On change le dixième chiffre « 5 » par le chiffre « 9 ». Montrer qu'alors la clé de contrôle permet de détecter l'erreur.

Compléments

Nous avons donné deux définitions de congruence. On montre qu'elles sont équivalentes.

Démonstration. – Supposons que a et b ont le même reste r dans la division euclidienne par p. On peut donc écrire

$$a = p \times k + r \quad \text{et} \quad b = p \times k' + r \quad \text{avec } k, k' \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq r \leq p.$$

donc

$$b - a = p \times k' + r - (p \times k) + r = p \times k' - p \times k = p(k' - k).$$

$k' - k$ étant un entier relatif, on en déduit que $b - a$ est multiple de p.

– Supposons que $b - a$ est multiple de p, on peut écrire $b - a = k \times p$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On note q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de b par p. On a donc $b = p \times q + r$. Alors, en remplaçant dans l'égalité $b - a = k \times p$, on obtient

$$p \times q + r = a = kp.$$

Donc

$$A = p \times q + r - kp = p(q - k) + r$$

$q - k$ est un entier relatif et r est un entier naturel tel que $0 \leq r < p$. On en déduit que r est le reste de la division euclidienne de a par p. Donc a et b ont le même reste dans la division euclidienne par p.

□

Démonstration des propriétés 15.4. 1. Si $a \equiv b \pmod{p}$ et $b \equiv c \pmod{p}$ alors a et b ont le même reste dans la division euclidienne par p et b et c ont le même reste dans la division euclidienne par p donc a et c ont le même reste dans la division euclidienne par p et par conséquent $a \equiv c \pmod{p}$.

2. Si $a \equiv b \pmod{p}$ et si $a' \equiv b' \pmod{p}$ alors $b - a$ est un multiple de p et $b' - a'$ est un multiple de p. On en déduit, d'après les propriétés des multiples que $(b - a) + (b' - a')$ et $(b - a) - (b' - a')$ sont des multiples de p, c'est-à-dire $(b + b') - (a + a')$ et $(b - b') - (a - a')$ sont des multiples de p donc :

$$a + a' \equiv b + b' \pmod{p} \quad \text{et} \quad a - a' \equiv b - b' \pmod{p}.$$

D'autre part, puisque $b - a$ est un multiple de p, $a'(b - a)$ est un multiple p et puisque $b' - a'$ est un multiple de p, $b(b' - a')$ est un multiple de p et par conséquent $a'(b - a) + b(b' - a')$ est un multiple de p, c'est-à-dire $a'b - a'a + bb' - ba'$ est un multiple de p donc $bb' - aa'$ est un multiple de p donc

$$aa' \equiv bb' \pmod{p}.$$

Enfin considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $P(n)$: « $a^n \equiv b^n \pmod{p}$. Pour $n = 1$, on a $a^1 = 1$et $b^1 = b$ et on sait que $a \equiv b \pmod{p}$ donc $P(1)$ est vraie. Supposons la proposition $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 1$ alors $a^n \equiv b^n \pmod{p}$ et comme on a aussi $a \equiv b \pmod{p}$, on peut en utilisant la propriété précédente justifier que $a^n \times a \equiv b^n \times b \pmod{p}$ soit $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \pmod{p}$, c'est-à-dire la proposition $P(n + 1)$ est vraie. On a donc démontré par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

3. Si $a \equiv b \pmod p$ alors $b-a$ est un multiple de p mais on peut écrire :

$$b-a=(b+c)-(a+c)$$

donc $(b+c)-(a+c)$ est un multiple de p, donc

$$a+c \equiv b+c \pmod p \quad \text{pour tout } c \in \mathbb{Z}$$

De même, on peut écrire $b-a=(b-c)-(a-c)$ donc

$$a-c \equiv b-c \pmod p \quad \text{pour tout } c \in \mathbb{Z}.$$

D'autre part, puisque $b-a$ est un multiple de p alors, pour tout $c \in \mathbb{Z}$, $c(b-a)$ est un multiple de p, c'est-à-dire $bc-ac$ est un multiple de p donc

$$ac \equiv bc \pmod p \quad \text{pour tout } c \in \mathbb{Z}.$$

□

Démonstration du théorème 15.6. p ne divise aucun nombre de la suite a, $2a$, …, $(p-1)a$. En effet, d'après le théorème de Gauss, si p divisait un de ces produits ka, p diviserait k puisque a et p sont premiers entre eux. Ceci est impossible puisque $1<k<p$.

De plus, les restes des divisions de a, $2a$, …, $(p-1)a$ par p sont tous différents. Si on trouvait des restes identiques pour ka et $k'a$ ($k>k'$) alors le reste de $(k-k')a$ par p serait nul, ce qui est impossible d'après ce qui précède. Donc, à l'ordre près des facteurs les restes de a, $2a$, …, $(p-1)a$ par p sont $1, 2, \dots, p-1$.

Par conséquent la division du produit $a \times 2a \times \cdots \times (p-1)a$ par p a pour reste le produit $1 \times 2 \times \cdots \times (p-1)$ et donc $a \times 2a \times \cdots \times (p-1)a$ qui s'écrit encore

$$a^{p-1} \times 2 \times \cdots (p-1) \equiv 2 \times 3 \times \cdots \times (p-1) \pmod p.$$

Il existe donc un entier relatif k tel que

$$(a^{p-1}-1)(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (p-1)) = kp.$$

Comme p est premier avec $1 \times 2 \times \cdots \times (p-1)$ d'après le théorème de Gauss, p divise $a^{p-1}-1$. a^{p-1} est donc congru à 1 modulo p. □

Démonstration du corollaire 15.7. D'après ce qui précède, si a et p sont premiers entre eux, $a^{p-1}-1$ est congru à 0 modulo p. Sinon, p étant premier, a est congru à 0 modulo p. On a donc soit $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ soit $a^P \equiv a \equiv 0 \pmod p$ et par conséquent dans les deux cas $a^p \equiv a \pmod p$. □

Démonstration de la propriété 15.8. Si c et $(p-1)(q-1)$ sont premiers entre eux, il existe, d'après le théorème de Bézout, deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $u_0c+v_0(p-1)(q-1)=1$. Par suite (u,v) est solution de

$$uc+v(p-1)(q-1)=1$$

si et seulement si il existe un entier relatif k tel que

$$u=u_0-k(p-1)(q-1) \quad \text{et} \quad v=v_0+kc.$$

Soit donc k tel que u soit le plus petit des entiers positifs. Dans ces conditions

$$uc=1-v(p-1)(q-1) \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$$

et le nombre d recherché est par conséquent égal à u.

Il est unique car s'il en existait un autre, d', alors on aurait

$$c(d-d') \equiv 0 \pmod{(p-1)(q-1)}.$$

Comme c est premier avec $(p-1)(q-1)$, alors, d'après le théorème de Gauss,

$$d - d' \equiv 0 \pmod{(p-1)(q-1)}.$$

Mais comme on a $1 < d < (p-1)(q-1)$ et $1 < d' < (p-1)(q-1)$ et bien, on peut avoir que $d = d'$. □

Démonstration de la propriété 15.9. Si $b \equiv a^c \pmod{pq}$ alors $b^d \equiv a^{cd} \pmod{pq}$ et $cd \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$. Il existe donc un entier $k \geq 0$ tel que $cd = 1 + k(p-1)(q-1)$. On obtient donc

$$a^{cd} = a\left((a^{p-1})^{q-1}\right)^k.$$

Si a est divisible par p alors de façon évidente, $a^{cd} \equiv a \equiv 0 \pmod{p}$, sinon, d'après le petit théorème de Fermat, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ d'où $a^{cd} \equiv a \pmod{p}$. De même $a^{cd} \equiv a \pmod{q}$. Il existe donc deux entiers k et k' tels que $a^{cd} = a + kp$ et $a^{cd} = a + k'q$. Ainsi $kp = k'q$, entier qui se trouve donc être multiple de pq puisque p et q sont des nombres premiers différents. On obtient donc dans ces conditions $a^{cd} \equiv a \pmod{pq}$. □

LEÇON

16 Équations du second degré à coefficients réels ou complexes

Niveau, prérequis, références

Niveau Première S - Terminale S (partie complexes)

Prérequis Identité remarquable, résolution d'une équation du premier degré.

Références [40, 41, 42]

Contenu de la leçon

1 Un petit exemple

On voudrait résoudre en x l'équation suivante :

$$x^2 - x - 1 = 0. \tag{16.1}$$

Cette équation est appelé *équation du second degré*. Pour résoudre cette équation, il est nécessaire de faire apparaître une forme $A(x)B(x) = 0$ où $A(x)$ et $B(x)$ sont deux polynômes de degré 1. On remarque dans (16.1) un début d'*identité remarquable*. On a alors :

$$x^2 - x - 1 = x^2 - 2 \times \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1 = x^2 - 2\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{4} - \frac{5}{4}$$

et ainsi,

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}.$$

Une deuxième identité remarquable apparaît (du type $A^2 - B^2$) si on reconnaît $\frac{5}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$. Donc :

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

L'équation (16.1) s'exprime alors sous forme d'un produit de deux facteurs :

$$\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

Or, un produit de deux facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul. Donc l'équation (16.1) a deux solutions :

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Remarque 16.1. On définit le *nombre d'or* comme étant la seule racine positive de l'équation (16.1).

2 Résolution d'une équation du second degré à coefficients réels

2.1 Réduction sous forme canonique

Soit $P(x)$ un polynôme de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Il existe donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Comme a est non nul, on peut tout d'abord factoriser par a :

$$P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

On va faire apparaître une identité remarquable en remarquant que :

$$P(x) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

Définition 16.2 (Discriminant)**.** *Soit l'équation*

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{16.2}$$

Le discriminant *de l'équation* (16.2) *est la valeur* Δ *définie par :*

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Donc :

$$P(x = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \tag{16.3}$$

Pour résoudre $P(X) = 0$, on remarque que (16.3) est une identité remarquable du type $A^2 - B^2$ avec $A = x + \frac{b}{2a}$ et $B = \frac{\Delta}{4a^2}$. Ainsi le nombre de solutions de l'équation (16.2) dépend du signe de Δ.

2 2 Résolution de l'équation $P(x) = 0$

Théorème 16.3 (Résolution de l'équation (16.2))**.** *On veut résoudre*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

et on note Δ *le discriminant de l'équation.*

- *Si* $\Delta > 0$*, l'équation admet deux solutions* x_1 *et* x_2 *données par les formules suivantes :*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- *Si* $\Delta = 0$*, l'équation admet une racine double :*

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{et} \quad x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

- *Si le discriminant est strictement négatif, l'équation n'admet pas de solution réelle.*

2 3 Relations entre coefficients et racines

Soit à résoudre :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Il existe donc deux solutions à cette équation, on les note x_1 et x_2. Ainsi,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

On peut alors vérifier que :

$$ax^2 - ax(x_1 + x_2) + ax_1x_2 = a(x - x_1)(x - x_2).$$

On a donc le théorème suivant :

Théorème 16.4. *On dispose deux relations suivantes :*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

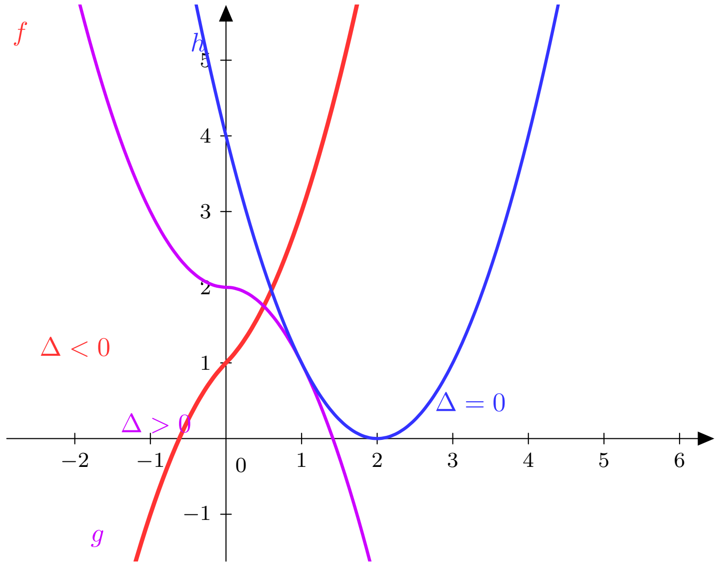


FIGURE 16.1 – Représentation graphique des paraboles selon le signe du discriminant

2 4 Introduction des nombres complexes

Considérons l'équation $x^2 = 1$. Cette équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$ qui sont 1 et -1. Mais si on remplace, dans l'équation 1 par -1 ? On est un peu plus embêté car aucun nombre réel admet un carré négatif. Alors décidons que i serait une des solutions de cette équation, c'est-à-dire que $\mathrm{i}^2 = -1$. L'équation aurait donc deux solutions (i et $-\mathrm{i}$) dans un autre ensemble de nombres car $x^2 + 1 = 0$ équivaudrait à $x^2 - \mathrm{i}^2 = 0$ ou soit $(x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i}) = 0$.

Définition 16.5. *On définit l'ensemble des complexes*

$$\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

avec $\mathrm{i}^2 = -1$.

Remarque 16.6. On peut aussi identifier $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire que à un point $M(a, b)$, on peut lui faire correspondre un $z = a + \mathrm{i}b$ et vice et versa. On dira que $z = a + \mathrm{i}b$ est l'affixe du point $M(a, b)$.

2 5 Retour à la résolution d'une équation du second degré

On s'intéresse à la résolution de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \tag{16.4}$$

tel que $\Delta < 0$. On a vu, dans la section précédente, qu'il n'y a pas de solutions réelles. Si on se place dans l'ensemble $\mathbb{C}$, il y a deux solutions qu'on va expliciter. L'équation (16.4) s'écrit sous sa forme canonique :

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{i}\,|\Delta|}{2a}\right)^2\right) = 0.$$

On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 16.7. *Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées x_1 et x_2 qui s'écrivent :*

$$x_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \textit{et} \quad x_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

3 Problèmes liés conduisant à la résolution d'une équation du second degré

On donne dans cette section, des exemples de problèmes amenant à la résolution d'une équation du second degré.

Exercice 16.8. Le coût de production d'un produit est donné par la relation :

$$C(q) = 2q^2 - 40q + 500$$

où q est la quantité produite. Le prix de vente est donné par la relation :

$$P(q) = 10q + 300.$$

Déterminer, pour quelles valeurs de q, le prix de vente est égal au coût de production.

Exercice 16.9. On effectue deux remises successives au même taux r, on obtient l'équation :

$$300r^2 + 600r - 30{,}75 = 0.$$

1. Calculer le taux r.
2. Quel est le taux de la remise totale correspondant aux deux remises successives ?

Exercice 16.10. Le bénéfice B réalisé par une société pour un nombre q d'articles produits est donné par la relation

$$B(q) = -28000 + 350q - 0{,}7q^2.$$

Déterminer q pour que $B = 15750$ euros et $B = 14000$ euros.

4 Résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes

4 1 Résolution de l'équation $z^2 = w$

Définition 16.11 (Racine carrée d'un nombre complexe)**.** *Soit $w = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ alors z est une* racine carrée *de w si $z^2 = w$.*

Soient $z, w \in \mathbb{C}$. On résout l'équation $z^2 = w$. On écrit $z = x + \mathrm{i}y$ et $w = a + \mathrm{i}b$ avec $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} z^2 = w &\Leftrightarrow (x + \mathrm{i}y)^2 = a + \mathrm{i}b \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} = a + \mathrm{i}b \quad \text{et} \quad |z|^2 = |w| \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy\mathrm{i} = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Notons :

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a && (16.5) \\ 2xy\mathrm{i} &= b && (16.6) \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{a^2 + b^2}. && (16.7) \end{aligned}$$

Si on fait (16.5) + (16.7), on obtient :

$$2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2},$$

et si on fait (16.7) − (16.5), on a :

$$2y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

D'où, les solutions sont :

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \quad \text{et} \quad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

avec le signe de xy est le même que le signe de b, c'est-à-dire
- si b est positif alors x et y sont de même signe,
- si b est négatif alors x et y sont de signe opposé.

4 2 Résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. On considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0. \tag{16.8}$$

On met l'équation (16.8) sous la forme canonique :

$$\begin{aligned}(16.8) \Leftrightarrow a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}z\right) = 0 \\ \Leftrightarrow a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}.\end{aligned}$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et $w = z + \frac{b}{2a}$. D'où :

$$(16.8) \Leftrightarrow w^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Soit δ une racine carrée de Δ, les deux solutions de (16.8) sont donc :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Compléments

Démonstration du théorème 16.3. On note $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$.
- Si $\Delta < 0$ alors $\beta > 0$. La fonction f s'exprime comme le produit de a et de la somme d'un terme positif $(x-\alpha)^2$ et d'un terme strictement positif β. On en déduit que, quelle que soit la valeur de x, son image par f n'est jamais nulle, car produit de deux facteurs non nuls, ce qui montre l'impossibilité de l'existence d'une solution dans l'ensemble des réels.
- Si $\Delta = 0$ alors $\beta = 0$ et donc $f(x) = a(x-\alpha)^2$. Cette expression est nulle si, et seulement si, x est égal à α.
- Si $\Delta > 0$ alors, en simplifiant par a, l'équation s'écrit encore,

  $$(x-\alpha)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 = 0 \quad \text{et} \quad \text{avec } \delta = \sqrt{b^2-4ac}.$$

  On reconnaît une identité remarquable et l'équation s'écrit encore :

  $$\left(x - \alpha + \frac{\delta}{2a}\right) x - \alpha - \frac{\delta}{2a} = 0$$

  Or, un produit de deux nombres réels est nul si, et seulement si, l'un des deux facteurs du produit est nul donc on en déduit que l'équation est équivalente à l'une des deux équations :

  $$x - \alpha - \frac{\delta}{2a} = 0 \text{ ou } x - \alpha + \frac{\delta}{2a} = 0.$$

  En remplaçant α et δ par leur valeur, on retrouve bien l'expression déjà indiquée des deux solutions.

□

Démonstration du théorème 16.4. 1. Soit Δ le discriminant de l'équation ax^2+bx+c et x_1 et x_2 les deux solutions non nulles de cette équation. On a :

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b-\sqrt{\Delta}+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}.$$

2. Avec les mêmes notations que précédemment,

$$x_1\times x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2}.$$

D'après l'identité remarquable : $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$,

$$x_1\times x_2=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{b^2-b^2-(-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

□

LEÇON

17 Module et argument d'un nombre complexe

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S

Prérequis Nombres complexes (on rappellera la définition des nombres complexes), équations différentielles, relations trigonométriques dans un triangle.

Références [43, 44]

Contenu de la leçon

La leçon suivante s'intègre dans une séquence sur les nombres complexes.

1 Petit rappel sur les nombres complexes

Considérons l'équation $x^2 = 1$. Cette équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$ qui sont 1 et -1. Mais si on remplace, dans l'équation 1 par -1 ? On est un peu plus embêté car aucun nombre réel admet un carré négatif. Alors décidons que i serait une des solutions de cette équation, c'est-à-dire que $\mathrm{i}^2 = -1$. L'équation aurait donc deux solutions (i et $-\mathrm{i}$) dans un autre ensemble de nombres car $x^2 + 1 = 0$ équivaudrait à $x^2 - \mathrm{i}^2 = 0$ ou soit $(x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i}) = 0$.

Définition 17.1. *On définit l'ensemble des complexes*

$$\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

avec $\mathrm{i}^2 = -1$.

Remarque 17.2. On peut aussi identifier $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire que à un point $M(a, b)$, on peut lui faire correspondre un $z = a + \mathrm{i}b$ et vice et versa. On dira que $z = a + \mathrm{i}b$ est l'affixe du point $M(a, b)$.

Définition 17.3 (Partie réelle et partie imaginaire)**.** *Soit $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$. Le réel a s'appelle la* partie réelle *de z et b la partie* imaginaire. *On note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.*

Définition 17.4 (Imaginaire pur)**.** *On dit qu'un nombre complexe est* imaginaire pur *si sa partie réelle est nul (c'est-à-dire il s'écrit $z = b\mathrm{i}$ où $b \in \mathbb{R}$).*

Définition 17.5 (Conjugué d'un nombre complexe)**.** *Soient a et b deux nombres réels. Le nombre complexe conjugué de $z = a + b\mathrm{i}$ est le nombre complexe $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$.*

Exemple 17.6. Soit $z = 9 - 4\mathrm{i}$. Son conjugué est $\overline{z} = 9 + 4\mathrm{i}$.

Propriétés 17.7. *Soit $z \in \mathbb{C}$.*

1. $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\overline{z})$,
2. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$,
3. $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)$,
4. $z \in \mathbb{R}$ *si et seulement si* $z = \overline{z}$,
5. z *est imaginaire pur si et seulement si* $z = -\overline{z}$.

On supposera connu les propriétés de conjugaison.

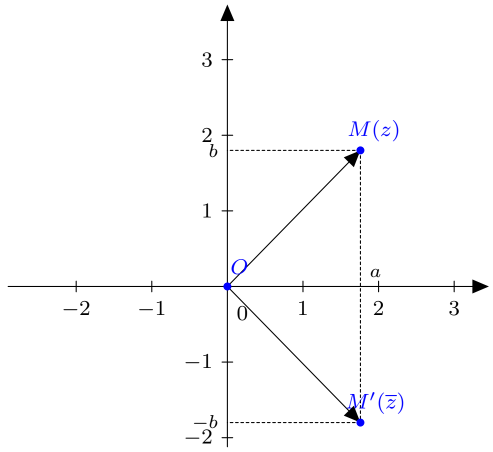


FIGURE 17.1 – Interprétation géométrique du conjugué

2 Module et argument d'un nombre complexe

2 1 Module d'un nombre complexe

Définition 17.8 (Module d'un nombre complexe)**.** *On appelle* module *d'un nombre complexe* $z = a + b\mathrm{i}$ *la quantité positive* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque 17.9 (Interprétation géométrique du module)**.** Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé.

1. Si z est l'affixe du point $M(a, b)$, le module de z n'est autre que la distance OM, $OM = |z|$.
2. Si z est l'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB} = (a, b)$, le module de z représente la distance AB :

$$AB = |z_B - z_A|$$

où z_A (resp. z_B) représente l'affixe du point A (resp. B).

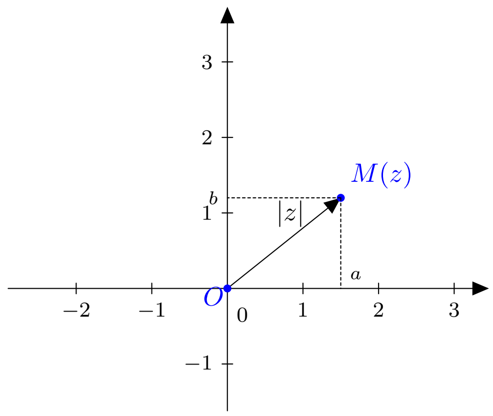


FIGURE 17.2 – Interprétation graphique du module

Exemples 17.10.

1. Soit $z = -3 + 4\mathrm{i}$, on a : $|z|^2 = 9 + 16 = 25$ donc $|z| = 5$.
2. On se donne $z_A = -1 + 3\mathrm{i}$ l'affixe d'un point A et $z_B = 2 - \mathrm{i}$ l'affixe d'un point B. On veut calculer la distance AB. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A = 3 - 4\mathrm{i}$ donc :

$$AB = |z_B - z_A| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5.$$

Remarques 17.11. – $|z| \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
- D'après les formules de conjugaison, $|z|^2 = z\bar{z}$.
- Si $z = a + b\mathrm{i}$ est réel alors $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$. Le module d'un nombre réel est donc sa valeur absolue, ce qui justifie la notation.

Théorème 17.12 (Propriétés des modules). *Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$,*
1. $|zz'| = |z|\,|z'|$. *En particulier, si λ est réel, $|\lambda z| = |\lambda|\,|z|$.*
2. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ *(lorsque $z' \neq 0$). En particulier, pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.*
3. *Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.*

2 2 Argument d'un nombre complexe

Définition 17.13 (Argument). *Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan. On appelle* argument *d'un nombre complexe z non nul, toute mesure, en radians, de l'angle orienté $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$. On le note $\theta = \arg(z)$.*

Remarque 17.14. Un nombre complexe possède une *infinité* d'arguments ! Si θ est un argument de z, tout autre argument de z est de la forme $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). L'unique argument θ appartenant à l'intervalle $]-\pi\,, \pi[$ s'appelle l'argument *principal*.

On notera par exemple $\arg(z) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$ ou $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ modulo 2π pour signifier que $\arg(z)$ peut être égal à $\frac{\pi}{4}$ mais aussi égal à n'importe lequel des nombres $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Attention ! Le nombre complexe nul $Z = 0$ ne possède pas d'arguments car, dans ce cas, l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ ne se définit pas.

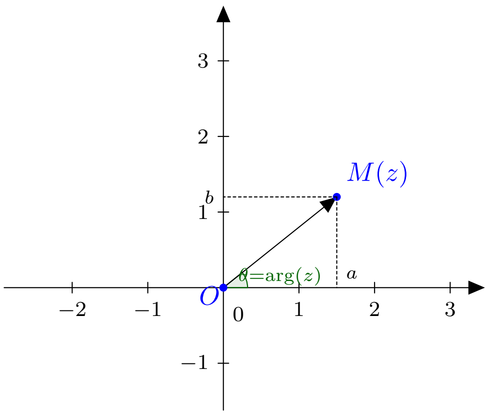


FIGURE 17.3 – Interprétation graphique du argument

Exemples 17.15.
1. $\arg(\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.
2. $\arg(1) = 0 \pmod{2\pi}$.
3. $\arg(-1) = \pi \pmod{2\pi}$.
4. $\arg(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.
5. $\arg(1 + \mathrm{i}) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

Proposition 17.16. 1. *Un réel strictement positif a un argument nul* $\pmod{2\pi}$*, un réel strictement négatif a un argument égal à* $\pi \pmod{2\pi}$*. Donc, on peut dire :*

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } \arg(z) = 0 \pmod{\pi}).$$

2. *Un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement positive a un argument égal à* $\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ *et un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement négatif a un argument égal à* $-\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$*. Donc, on peut dire :*

$$z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } \arg(z) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}),$$

où $\mathrm{i}\mathbb{R}$ *représente l'ensemble des imaginaires purs.*

On donne une méthode pour calculer l'argument principal d'un nombre complexe *non nul*. On utilise les relations métriques dans le triangle OHM de la figure 17.4.

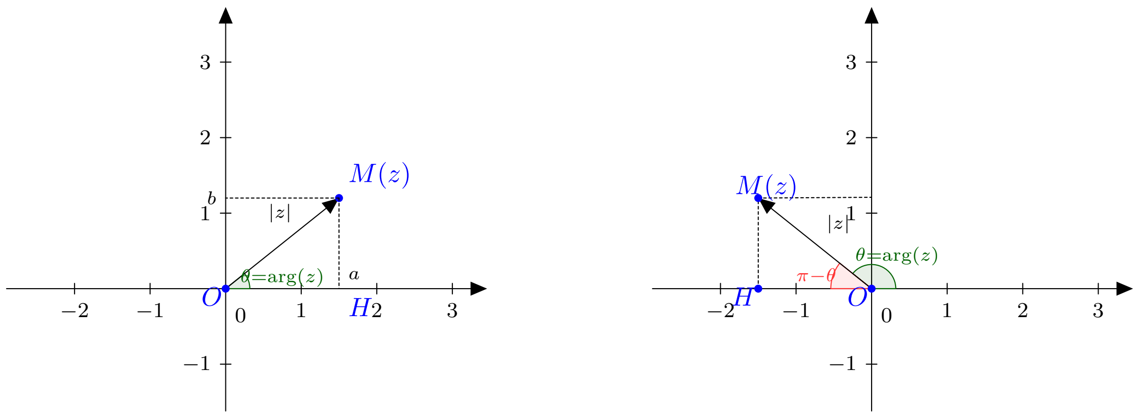


FIGURE 17.4 – Différents cas pour l'angle

Cas où $\theta \in [0\,,\pi/2]$

$$\cos(\theta) = \frac{OH}{OM} = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{HM}{OM} = \frac{b}{|z|}.$$

Cas où $\theta \in \,]\pi/2\,,\pi]$

$$\cos(\theta) = -\cos(\pi - \theta) = -\frac{OH}{OM} = -\frac{(-a)}{|z|} = \frac{a}{|z|}$$

Cas $\theta < 0$ On raisonne de même, en tenant compte du fait que $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ et $HM = -b$.

Dans tous les cas, on a :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}.$$

Si les cosinus et sinus ci-dessus ont des valeurs remarquables, on peut trouver θ directement à l'aide du cercle trigonométrique, sinon, à l'aide de la calculatrice en respectant la règle suivante :

- $\arccos\left(\frac{a}{|z|}\right)$ donne la valeur absolue de θ
- $\sin(\theta)$ donne le signe de θ.

Exemples 17.17. 1. On cherche à déterminer l'argument principal θ de $z = -2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$. On a $|z|^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16$ donc $|z| = 4$. On doit alors résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ce sont des valeurs remarquables, on peut donc trouver θ à l'aide du cercle trigonométrique : $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

2. On cherche à déterminer l'argument principal θ de $z = 3 - 4\mathrm{i}$. On a : $|z|^2 = 9 + 16 = 25$ donc $|z| = 5$. On doit résoudre le système :
$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{3}{5} \\ \sin(\theta) = -\frac{4}{5} \end{cases}.$$
Ce ne sont pas des valeurs remarquables. La calculatrice donne $|\theta| \simeq 0{,}9273$ rad. Mais $\sin(\theta)$ est négatif donc θ est négatif : $\theta \simeq -0{,}9273$ rad, c'est-à-dire $\theta \simeq 53,13°$.

Théorème 17.18 (Propriétés des arguments)**.** *Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:*

1. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$.
2. $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \pmod{2\pi}$.
3. $\arg(-\overline{z}) = \pi - \arg(z) \pmod{2\pi}$.

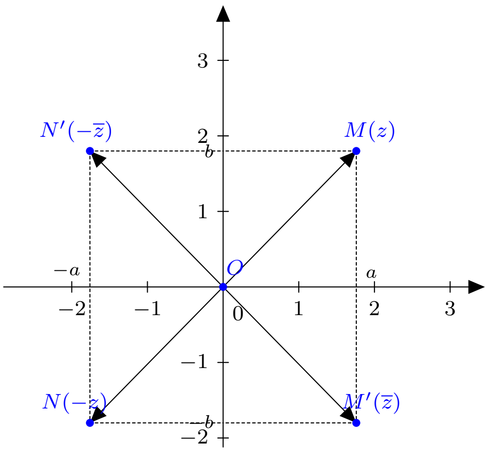


FIGURE 17.5 – Illustration de la démonstration pour le théorème

Remarque 17.19. Si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ alors :
$$\arg(\lambda z) = \arg(z) \pmod{2\pi}$$
Si $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$ alors :
$$\arg(\lambda z) = \arg(z) + \pi \pmod{2\pi}.$$

3 Différentes formes d'écritures des nombres complexes

3 1 Forme algébrique et trigonométrique

Définition 17.20 (Forme algébrique)**.** *L'écriture $z = a + bi$ s'appelle* la forme algébrique de z *(ou* forme cartésienne*).*

Or,
$$a = r\cos(\theta) \quad \text{et} \quad b = r\sin(\theta)$$
avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$. D'où :

Définition 17.21 (Forme trigonométrique)**.** *$z = a + \mathrm{i}b$ peut s'écrire sous la forme $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$; cette écriture s'appelle une* forme trigonométrique *de z*

Remarques 17.22. 1. Le nombre complexe nul $z = 0$ n'a pas de forme trigonométrique (puisque pas d'argument).

2. Pour trouver une forme trigonométrique d'un nombre complexe *non nul*, il suffit de calculer son module et son argument.

Théorème 17.23. *Si $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ avec $r > 0$ alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$.*

Exemple 17.24. Soit

$$z = -2\left(\cos\tfrac{\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{5}\right).$$

z n'est pas sous une forme trigonométrique car un module ne peut pas être négatif. On transforme :

$$z = 2\left(-\cos\tfrac{\pi}{5} - \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{5}\right) = 2\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{5} + \pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{\pi}{5} + \pi\right)\right).$$

Le module de z est donc $r = 2$ et un de ses argument est $\theta = \frac{6\pi}{5}$.

Théorème 17.25 (Propriétés sur les arguments (encore !))**.** *Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ non nuls, on a :*

1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$
2. $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$
3. $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}$.
4. $\arg(z^n) = n\arg(z) \pmod{2\pi}$, *pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Exemple 17.26. Soit $z = 3(\cos(-\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4}))$ et $z' = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{2\pi}{3}))$. On veut calculer zz'. L'utilisation des propriétés des modules et des arguments nous livrent directement le résultat :

$$zz' = 6\left(\cos\frac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

3 2 Forme exponentielle

Soit f l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) \end{array}.$$

On a, pour tous θ, θ' de $\mathbb{R}$:

$$f(\theta + \theta') = f(\theta)f(\theta').$$

La fonction f est donc une solution (complexe) de l'équation fonctionnelle $f(u+v) = f(u)f(v)$. Or, on sait (prérequis) que les solutions de cette équation fonctionnelle sont solutions des équations différentelles du type $y' = ay$. On va déterminer a (qui est ici dans $\mathbb{C}$ puisque f est à valeur dans $\mathbb{C}$). En étendant les propriétés de la dérivation aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on a f dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(\theta) = -\sin(\theta) + \mathrm{i}\cos(\theta) = \mathrm{i}f(\theta).$$

D'où $a = \mathrm{i}$ et

$$f(\theta) = f(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

On peut énoncer la définition suivante :

Définition 17.27. *Pour tout réel θ, on note $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ le nombre complexe $\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.*

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ a pour module 1 et argument θ.

Exemples 17.28. 1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$,

2. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$,
3. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$,

4. $e^{2i\pi} = 1$.

Définition 17.29 (Forme exponentielle)**.** *Un nombre complexe de module r et d'argument θ s'écrit $z = re^{i\theta}$. Cette écriture est appelée* une forme exponentielle *de z.*

Remarque 17.30. Le conjugué de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

Théorème 17.31. *Pour tous θ et θ' de $\mathbb{R}$,*

1. $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.
2. $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta-\theta'}$
3. $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$*, pour $n \in \mathbb{Z}$.*

La démonstration du théorème repose sur les propriétés des arguments.

Exemple 17.32. La notation exponentielle rend les calculs très simples :

– Si $z = 3e^{3\pi i/4}$ et $z' = 7e^{-2i\pi/3}$ alors

$$zz' = 21e^{\pi i/12} \quad \text{et} \quad \frac{z}{z'} = \frac{3}{7}e^{17i\pi/12}.$$

Exemple 17.33. On veut calculer $(1+i)^{14}$. On pose $z = 1+i$. On a donc, sous la forme exponentielle :

$$z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

D'où :

$$z^{14} = 2^7 e^{7i\pi/2} = 128e^{12\pi}e^{3i\pi}2 = -128i.$$

Compléments

Démonstration des propriétés 17.7.

1. Evident.
2. Soit $z = a + bi$, on a :
$$z + \overline{z} = a + bi + abi = 2a = 2\operatorname{Re}(z).$$
3. Soit $z = a + bi$, on a :
$$z - \overline{z} = a + bi - (a - bi) = 2i\operatorname{Im}(z).$$
4. z est un réel si et seulement si $\operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z - \overline{z} = z = \overline{z}$.
5. z est un imaginaire pur si et seulement $\operatorname{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = -\overline{z}$.

$\square$

Démonstration du théorème 17.12.

1. On a :
$$|zz'|^2 = zz'\,|zz'| = zz'\,|z|\,|z'| = z\,|z|\,z'\,|z'| = |z|^2\,|z'|^2 = (|z|\,|z'|)^2$$
et comme le module est positif $|zz'| = |z|\,|z'|$.
2. On peut procéder de la même façon que dans 1.
3. On donne une démonstration dans la section 17.2.3

$\square$

Démonstration du théorème 17.23. On a :

$$\left|z^2\right| = r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) = r^2.$$

Or $r > 0$ donc $|z| = r$. Soit θ' un argument de z alors

$$z = r(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) = r\cos(\theta') + ir\sin(\theta').$$

Or par hypothèse :

$$z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)) = r\cos(\theta) + \mathrm{i}r\sin(\theta)$$

et comme $a' + b'\mathrm{i} = a + b\mathrm{i}$ équivaut à $a' = a$ et $b' = b$ alors :

$$r\cos(\theta') = r\cos(\theta) \quad \text{et} \quad r\sin(\theta') = r\sin(\theta).$$

D'où :

$$\cos(\theta') = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(\theta') = \sin(\theta).$$

Ce qui implique $\theta' = \theta \pmod{2\pi}$ donc : $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$. □

Démonstration du théorème 17.25. 1. On va utiliser les formes trigonométriques de z et z' :

$$z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)) \quad \text{et} \quad z' = r'(\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta')).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} zz' &= rr'(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))(\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta')) \\ &= rr'[cos(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin(\theta') + \mathrm{i}(\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta'))] \end{aligned}$$

Ce qui, d'après les formules trigonométriques d'addition, donne :

$$zz' = rr'(\cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}\sin(\theta + \theta'))$$

Comme $rr' > 0$, on en déduit, d'après le théorème 17.23, que :

$$|zz'| = rr' \quad \text{et} \quad \arg(zz') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}.$$

D'où l'a première relation.

2. Si $z' = \frac{1}{z}$ dans la relation précédente, cela donne :

$$\arg(1) = \arg(\tfrac{1}{z}) + \arg(z) \pmod{2\pi}.$$

Or $\arg(1) = 0 \pmod{2\pi}$ d'où la seconde relation :

$$\arg(\tfrac{1}{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}.$$

3. En remarquant que $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$, on a d'après ce qui précède :

$$\arg(\tfrac{z}{z'}) = \arg(z) + \arg(\tfrac{1}{z}) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}.$$

D'où la troisième relation.

4. Pour la dernière relation, on distingue trois cas :

Cas $n > 0$ Par récurrence, on peut montrer que :

$$\arg(z^n) = \arg(z \times z \times \cdots \times z) = n\arg(z) \pmod{2\pi}.$$

Cas $n < 0$ En posant $m = -n > 0$ et en utilisant le cas précédent avec $m > 0$:

$$\arg(z^n) = \arg(\tfrac{1}{z^m}) = m\arg(\tfrac{1}{z}) = -m\arg(z) = n\arg(z) \pmod{2\pi}.$$

Cas $n = 0$ La relation $\arg(z^n) = \arg(1) = 0 = n\arg(z) \pmod{2\pi}$ est triviale.

□

LEÇON

18 Transformations planes et nombres complexes

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S

Prérequis Nombres complexes : définitions, conjugué, module, argument. Transformations du plan

Références [45]

Contenu de la leçon

Dans cette leçon, on va considérer une fonction f définie sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Ainsi, nous pouvons associer à cette fonction f la transformation ponctuelle T qui à chaque point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = f(z)$.

1 Translation

Théorème 18.1 (Ecriture complexe d'une translation). *La translation du vecteur $\vec{u}$, d'affixe a, transforme un point $M(z)$ en un point $M(z')$ tel que :*

$$z' = z + a.$$

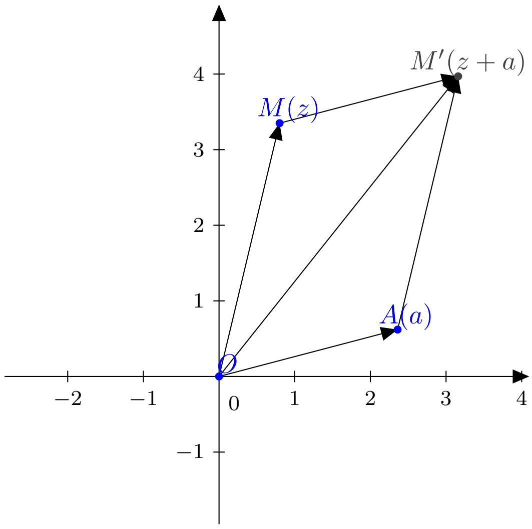


FIGURE 18.1 – "Ajouter un nombre a c'est translater d'un vecteur d'affixe a"

2 Rotation

Théorème 18.2 (Ecriture complexe d'une rotation). *La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que :*

$$z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega).$$

Remarque 18.3 (Cas particuliers). 1. Si $\Omega = O$ alors l'écriture complexe de la rotation devient :

$$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta z}.$$

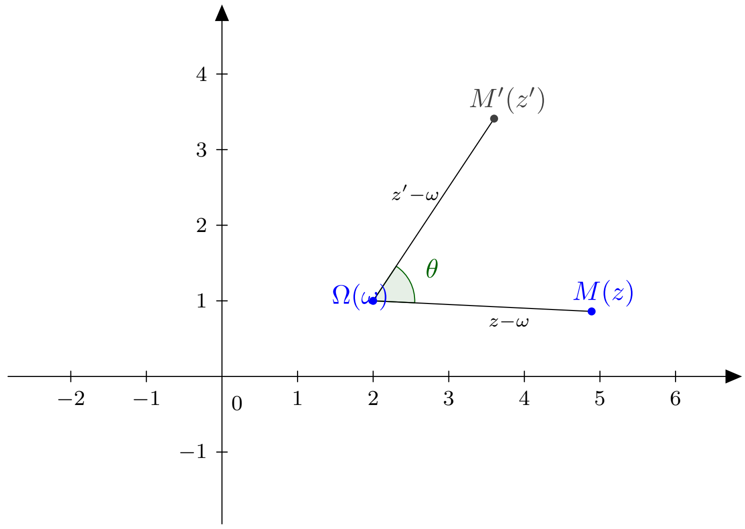


FIGURE 18.2 – Multiplier par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, c'est faire tourner d'un angle θ

2. Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ (quart de tour de sens direct), alors l'écriture complexe de la rotation devient :
$$z' - \omega = \mathrm{i}(z - \omega).$$
3. Si $\Omega = O$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, alors l'écriture complexe de la rotation devient :
$$z' = \mathrm{i}z.$$
4. Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. ABC est un triangle équilatéral de sens direct si et seulement si
$$z_C - z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}(z_B - z_A).$$

Exemple 18.4. On donne deux points distincts $A(a)$ et $B(b)$. On construit le carré $ABCD$ de sens direct. Quelle est l'affixe ω du centre Ω du carré $ABCD$?

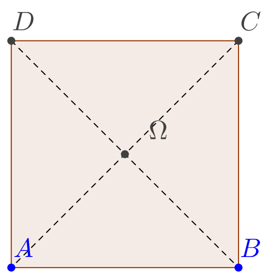


FIGURE 18.3 – Carré $ABCD$ de centre Ω

Il suffit de remarquer que B est l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$:
$$b - \omega = \mathrm{i}(a - \omega) \Leftrightarrow \omega(1 - \mathrm{i}) = a\mathrm{i} - b \Leftrightarrow \omega = \frac{b - \mathrm{i}a}{1 - \mathrm{i}}.$$

Exemple 18.5. Soit $\vec{u}(x, y)$ un vecteur du plan (non nul) et $\vec{v}(x', y')$ tels que

$$\begin{cases} \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \\ (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

On veut exprimer les coordonnées de $\vec{v}$ en fonction de celles de $\vec{u}$. On note $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ l'affixe de $\vec{u}$ et z' celle de $\vec{v}$. On a donc :

$$z' = \mathrm{i}z = \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{i}r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)) = r(-\sin\theta + \mathrm{i}\cos(\theta)).$$

D'où $x' = -r\sin(\theta) = -y$ et $y' = r\cos(\theta) = x$, $\vec{v}(-y, x)$.

3 Homothétie

Théorème 18.6 (Ecriture complexe d'une homothétie)**.** *L'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que :*

$$z' - \omega = k(z - \omega).$$

Exemple 18.7. Soit f la transformation du plan qui, à tout point $M(z)$ du plan associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = -\frac{5}{2}z + 2\mathrm{i}.$$

On montre que f admet un unique point invariant. Pour cela, on résout l'équation :

$$f(\omega) = \omega \Leftrightarrow \omega = -\frac{5}{2}\omega + 2\mathrm{i} \Leftrightarrow \omega = \frac{4\mathrm{i}}{7}.$$

La transformation f admet un unique point invariant Ω d'affixe $\omega = \frac{4}{7}\mathrm{i}$. Pour déterminer la nature de f, on exprime $z' - \omega$ en fonction de $z - \omega$. On a :

$$\begin{cases} z' = -\frac{5}{2}z + 2\mathrm{i} \\ \omega = -\frac{5}{2}\omega + 2\mathrm{i} \end{cases}.$$

En soustrayant membre à membre, on obtient :

$$z' - \omega = -\frac{5}{2}(z - \omega).$$

On en déduit, grâce à son écriture complexe, que f est l'homothétie de centre Ω et de rapport $k = -\frac{5}{2}$.

4 Symétrie centrale

Théorème 18.8. *L'écriture complexe de la symétrie s de centre Ω d'affixe ω est :*

$$s(z) = z' = -z + 2\omega.$$

5 Similitudes

5 1 Similitude directe

Définition 18.9. *Soient M, N, M', N' quatre points du plan. Une* similitude directe *est une homothétie suivi d'une rotation de même centre. Une* similitude directe *est caractérisée par son rapport $\frac{M'N'}{MN} = k$ et son angle $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta + 2k\pi$. Elle conserve les angles orientés.*

Proposition 18.10. *Si quatre points M, N, M' et N' vérifient $M \neq N$ et $M' \neq N'$ alors il existe une* unique *similitude directe qui transforme M et M' et N et N', cette similitude directe vérifie*

$$\frac{M'N'}{MN} = k \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta + 2k\pi.$$

Théorème 18.11. *Soit $f : M(z) \mapsto M(z')$. f est une similitude directe si et seulement si*

$$f(z) = z' = az + b, \quad a \neq 0.$$

Conséquence 18.12.

1. *$|a| = k$ est le rapport de similitude et $\arg(a) = \theta$ est son angle.*
2. *La transformation réciproque de f est la similitude f^{-1} dont la transformation complexe associée est, $z' = \frac{1}{a}z - \frac{1}{b}$. Son rapport est $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{k}$ et un angle $\arg(\frac{1}{a}) = -\theta$.*
3. *La composée de deux similitudes directes est une similitude directe de rapport le produit des rapports et dont un angle est la somme des angles.*

5 2 Similitude indirecte

Définition 18.13 (Similitude indirecte)**.** *Une* similitude indirecte *est une similitude qui inverse le sens des angles orientés : si A, B, C, D sont quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, et si A', B', C', D' sont leurs images respectives par une similitude indirecte s, alors*

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}).$$

Théorème 18.14. *Soit $f : M(z) \mapsto M'(z')$ une transformation du plan. f est une similitude indirecte si et seulement si sa fonction complexe est de la forme*

$$f(z) = z' = a\overline{z} + b, \quad a \neq 0.$$

Compléments

Démonstration du théorème 18.1. Dire que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ signifie $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Ce qui se traduit, en termes d'affixes, par :

$$z - z' = a.$$

D'où le théorème. □

Démonstration du théorème 18.2. Si $M = \Omega$, la relation $z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$ est triviale. Supposons désormais $M \neq \Omega$. Dire que M' est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ signifie :

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \pmod{2\pi} \end{cases}.$$

Ce qui se traduit, en termes d'affixes, par :

$$\begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg(\frac{z' - \omega}{z - \omega}) = \theta \pmod{2\pi} \end{cases}.$$

On en déduit :

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

D'où le résultat. □

Démonstration du théorème 18.6. Dire que M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k signifie :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}.$$

Ce qui se traduit bien, en termes d'affixes par : $z' - \omega = k(z - \omega)$. □

Démonstration du théorème 18.8. Dire que le point M' est l'image du point M par la symétrie s de centre Ω signifie que Ω est le milieu du segment $[MM']$, autrement dit : $\overline{M\Omega} = \overline{\Omega M'}$. Il vient alors :

$$s(M) = M' \Leftrightarrow \overline{M\Omega} = \overline{\Omega M'} \Leftrightarrow \omega - z = z' - \omega \Leftrightarrow z' = -z + 2\omega.$$

□

Démonstration de la proposition 18.10. On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit une similitude directe de rapport k et d'angle θ, un point A d'affixe z_A et son image A' d'affixe $z_{A'}$. Pour tout point M du plan d'affixe z et son image M' d'affixe z' :

$$\frac{A'M'}{AM} = k \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta + 2k\pi$$

donc

$$\frac{z' - z_{A'}}{z - z_A} = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow z' = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}(z - z_A) + z_{A'}$$

ou encore $z' = az + b$ avec $a = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $b = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_A + z_{A'}$. Soit une fonction complexe définie par :

$$z' = az + b, \quad a \neq 0.$$

Cette fonction est définie sur tout $\mathbb{C}$. On a alors :

$$z = \frac{1}{a}z' - \frac{b}{a}$$

et z admet un antécédent unique, cette fonction est donc une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (sa fonction réciproque est définie par : $z' = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}$). La fonction f du plan dans le plan plan définie par $f\colon M(z) \to M'(z')$ est une transformation du plan.

Pour tous points distincts M et N d'affixes respectives m et n :

$$\frac{m'n'}{mn} = \frac{am + b - (an + b)}{m - n} = \frac{a(m - n)}{m - n} = a = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Si M' le point d'affixe m' et N' celui d'affixe n' alors :

$$\frac{M'N'}{MN} = \left|\frac{m'n'}{mn}\right| = k$$

et f est une similitude.

D'autre part, pour tous points distincts M et N

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \arg\left(\tfrac{m'n'}{mn}\right) = \theta + 2k\pi.$$

Si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \alpha$ alors :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}) = -\theta + \alpha + \theta = \alpha.$$

f conserve les angles orientés donc c'est une similitude directe. □

Démonstration des conséquences 18.12. On montre que la composée de deux similitudes directes est une similitude directe de rapport le produit des rapports et dont un angle est la somme des angles. Considérons f_1 telle que $z_1 = k_1 e^{i\theta_i} z + b_1$ et f_2 telle que $z_2 = k_2 e^{i\theta_2} z + b_2$, $f_2 \circ f_1$ a pour transformation complexe associée

$$z \mapsto k_1 e^{i\theta_1} z + b_1 \mapsto b_2 e^{i\theta_2} (k_1 e^{i\theta_1 z} + b_1) + b_2 = z'$$

$$z' = k_2 k_1 e^{i\theta_2} e^{i\theta_1} b_1 + b_2 = k_1 k_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} + b_3$$

avec $b_3 = k_2 e^{i\theta_2} b_1 + b_2$. Donc $f_2 \circ f_1$ est une similitude directe de rapport $k_1 k_2$ et dont un angle est $\theta_1 + \theta_2$. □

Démonstration du théorème 18.14. f transforme le triangle ABC en $A'B'C'$ semblable indirect. La réflexion d'axe $(O, \vec{\imath})$, $r : M(z) \mapsto M_1(\overline{z})$ transforme le triangle ABC en $A_1 B_1 C_1$ semblable indirect. $A_1 B_1 C_1$ et $A'B'C'$ sont semblables directs donc il existe une unique similitude directe g qui transforme $A_1 B_1 C_1$ et $A'B'C'$, sa transformation complexe associée est de la forme

$$z' = az + b, \quad a \neq 0$$

$f = g \circ r$ et sa transformation complexe associée est de la forme :

$$z' = a\overline{z} + b, \quad a \neq 0.$$

Réciproquement, $z' = a\overline{z} + b$, $a \neq 0$.
- $z \mapsto \overline{z}$ correspond à une réflexion donc une isométrie indirecte.
- $z \mapsto az + b$ correspond à une similitude directe.

La composée $z' = a\overline{z} + b$, $a \neq 0$ correspond à une similitude indirecte. □

LEÇON

19 Exemples d'utilisation des nombres complexes

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S / BTS

Prérequis Nombres complexes : définition, conjugué, module et arguments. Discriminant d'un polynôme de degré 2. Barycentre.

Références [48, 49]

Contenu de la leçon

1 Les nombres complexes en géométrie

1.1 Formules de Moivre, formules d'Euler

Théorème 19.1 (Formule de Moivre). *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:*

$$(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$$

$$(\cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) - \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

Théorème 19.2 (Formule d'Euler). *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:*

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

Exemples 19.3. 1. On veut linéariser $\sin^3(\theta)$ et $\cos^4(\theta)$. Pour cela, on utilise les formules de De Moivre et d'Euler.

$$\begin{aligned}
\sin^3(\theta) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = \frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} - 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta}}{-8\mathrm{i}} \\
&= \frac{2\mathrm{i}\sin(3\theta) - 6\mathrm{i}\sin(\theta)}{-8\mathrm{i}} = -\frac{1}{4}\sin(3\theta) + \frac{3}{4}\sin(\theta). \\
\cos^4(\theta) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^4 = \frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta} + 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + 6 + 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\theta}}{16} \\
&= \frac{2\cos(4\theta) + 8\cos(2\theta) + 6}{16} = \frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

2. On veut calculer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$. D'après la formule de De Moivre :

$$\begin{aligned}
(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^3 &= \cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta) \\
&= \cos^3(\theta) + 3\mathrm{i}\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - \mathrm{i}\sin^3(\theta).
\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) \\
&= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)(1 - \cos^2(\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \\
\sin(3\theta) &= 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta) \\
&= 3(1 - \sin^2(\theta))\sin(\theta) - \sin^3(\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta).
\end{aligned}$$

1 2 Détermination de lieux géométriques

On rappelle que si z_A et z_B sont les affixes respectives de deux points A et B alors :

$$AB = |z_B - z_A|$$

Exemples 19.4. 1. On veut déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telles que :

$$|z-2| = |z+\mathrm{i}|\,.$$

On introduit $A(2)$ et $B(-\mathrm{i})$, ainsi on a :

$$AM = BM.$$

L'ensemble recherché est la médiatrice du segment $[AB]$.

2. On veut déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telles que :

$$|z-3\mathrm{i}| = 2.$$

On introduit $C(3\mathrm{i})$, ainsi on a :

$$CM = 2$$

L'ensemble recherché est le cercle de centre C et de rayon 2.

3. On veut déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telles que :

$$|z-2| = |2z+\mathrm{i}|\,.$$

On introduit $A(2)$ et $B\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)$, ainsi :

$$AM = 2BM.$$

Il s'agit de la ligne de niveau k (ici $k=2$) de l'application $M \mapsto \frac{MA}{MB}$. On a :

$$AM^2 = 4BM \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 = 4\overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) = 0$$

On introduit le barycentre G_1 de $(A,1)$ et $(B,-2)$ et le barycentre G_2 de $(A,1)$ et $(B,2)$. On obtient alors

$$(-1)\overrightarrow{MG_1} \cdot 3\overrightarrow{MG_2} = 0$$

et comme $-1 \times 3 \neq 0$, $\overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0$. L'ensemble recherché est donc le cercle de diamètre $[G_1, G_2]$.

1 3 Calcul d'angles

Théorème 19.5. *Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé dans le plan. Si A et B sont deux points distincts du plan complexe d'affixes respectives a et b alors :*

$$(\vec{\imath}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b-a) \pmod{2\pi}.$$

Exemple 19.6. On donne $A(1)$ et $B(2+\mathrm{i}\sqrt{3})$ et on veut déterminer l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{AB})$. On a :

$$b - a = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$

D'où :

$$(\vec{\imath}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

Théorème 19.7. *Si A, B et C sont trois points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes a, b et c alors :*

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \pmod{2\pi}.$$

Remarque 19.8. Il résulte du fait qu'un argument d'un réel (non nul) est zéro (modulo π) et que celui d'un imaginaire pur (non nul) est égal à $\frac{\pi}{2}$ (modulo π) que pour tous points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ tels que $A \neq C$:

$$\frac{b-c}{a-c} \text{ est réel} \Leftrightarrow \text{les points } A, B \text{ et } C \text{ sont alignés.}$$

Et si de plus $B \neq C$:

$$\frac{b-c}{a-c} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \text{les droites } (CA) \text{ et } (CB) \text{ sont perpendiculaires.}$$

Exemple 19.9. Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan complexe et deux points $A(5+3\mathrm{i})$ et $B(5-8\mathrm{i})$. On veut savoir si le triangle OAB est rectangle en O. D'après ce qui précède :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg\left(\frac{b}{a}\right) \pmod{2\pi}.$$

Or :

$$\frac{b}{a} = \frac{5-8\mathrm{i}}{5+3\mathrm{i}} = \frac{1-55\mathrm{i}}{34} \notin \mathrm{i}\mathbb{R}.$$

Donc les droites (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires.

1 4 Equation paramétrique d'un cercle

Théorème 19.10. *Soit C le cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon R. Soit M un point d'affixe z. Alors $M \in C$ si et seulement s'il existe un réel θ tel que*

$$z = \omega + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Remarque 19.11. Dans le théorème 19.10, on peut choisir θ dans $[0, 2\pi[$ ou tout autre intervalle semi-ouvert de longueur 2π.

Pour démontrer le théorème 19.10, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 19.12. *Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors $|z_1| = |z_2|$ si et seulement si il existe un réel θ tel que $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_2$.*

Exemple 19.13. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le point $A(a)$ du cercle de centre O et de rayon 1 tel que $\arg(a) = \frac{\pi}{6}$ puis le point B du cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{4}$ tel que $(\vec{\imath}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{4}$. On cherche l'affixe de B. On a clairement :

$$a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}.$$

De plus :

$$b = a + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}.$$

D'où :

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{4\sqrt{3}+\sqrt{2}}{8} + \mathrm{i}\frac{4+\sqrt{2}}{8}.$$

Remarque 19.14. Si on note (x_Ω, y_Ω) les coordonnées de Ω et (x, y) celles de M, on a :

$$M \in C \Leftrightarrow \text{il existe un réel } \theta \text{ tel que } \begin{cases} x = x_\Omega + R\cos(\theta) \\ y = y_\Omega + R\sin(\theta) \end{cases}.$$

1 5 Barycentre

Théorème 19.15. *Soit G le barycentre de n points pondérés $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$ avec $\sum_{p=1}^{n} a_p \neq 0$. On note z_p les affixes des points A_p $(1 \leq p \leq n)$. Alors l'affixe z_G de G est donnée par :*

$$z_G = \frac{\sum_{p=1}^{n} \alpha_p z_p}{\sum_{p=1}^{n} \alpha_p}$$

En particulier, si on considère des points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$, on a :
- l'affixe du milieu de $[AB]$ est $\frac{a+b}{2}$,
- l'affixe du centre de gravité du triangle ABC est $\frac{a+b+c}{3}$.

Exemple 19.16. ABC est un triangle de sens direct. On construit les points P, Q et R tels que :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AP}) &= \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad AP = BC \\ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BQ}) &= \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad BQ = CA \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CR}) &= \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad CR = AB. \end{aligned}$$

On démontre que le triangle PQR a le même centre de gravité que ABC. On a donc :

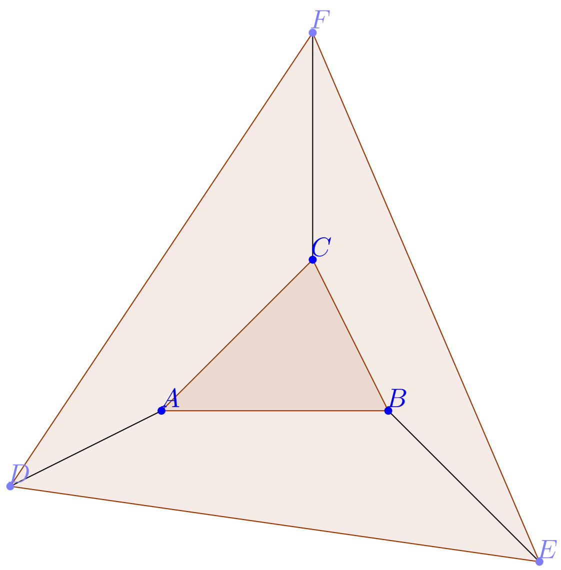


FIGURE 19.1 – Figure de l'exemple

$$\begin{aligned} p - a &= \mathrm{i}(c - b) \\ q - b &= \mathrm{i}(a - c) \\ r - c &= \mathrm{i}(b - a) \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre ces trois égalités, il vient :

$$p + q + r = a + b + c.$$

On en déduit que les deux triangles ont le même centre de gravité.

2 Les nombres complexes pour la résolution d'équations algébriques

2.1 Résolution d'une équation de second degré

Soit l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \tag{19.1}$$

Théorème 19.17 (Résolution de l'équation (19.1)). *On veut résoudre*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

et on note Δ le discriminant de l'équation.

- *Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions x_1 et x_2 données par les formules suivantes :*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- *Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine double :*

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{et} \quad x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

- *Si le discriminant est strictement négatif, l'équation n'admet pas de solution réelle.*

On s'intéresse à la résolution de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \tag{19.2}$$

tel que $\Delta < 0$. On a vu, dans la section précédente, qu'il n'y a pas de solutions réelles. Si on se place dans l'ensemble $\mathbb{C}$, il y a deux solutions qu'on va expliciter. L'équation (19.2) s'écrit sous sa forme canonique :

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{i}\,|\Delta|}{2a}\right)^2\right) = 0.$$

On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 19.18. *Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées x_1 et x_2 qui s'écrivent :*

$$x_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Exemple 19.19. Soit à résoudre l'équation :

$$10x^2 + 9x + 5 = 0 \tag{19.3}$$

On a : $\Delta = 9^2 - 4 \times 10 \times 5 = 81 - 200 = -129$. Ainsi, les solutions de l'équation (19.3) sont :

$$x_1 = \frac{-9 + \mathrm{i}\sqrt{129}}{20} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-9 - \mathrm{i}\sqrt{129}}{20}.$$

2.2 Résolution d'une équation du troisième degré

On veut résoudre :

$$x^3 - 15x - 4 = 0. \tag{19.4}$$

Pour cela, on définit les variables u et v par les équations :

$$\begin{cases} x = u + v \\ 3uv = 15. \end{cases}$$

L'équation (19.4) devient :

$$\begin{aligned}(u+v)^3 - 15(u+v) - 4 = 0 &\Leftrightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 15(u+v) - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow u^3 + 3uuv + 3uvv + v^3 - 15(u+v) - 4 = 0\end{aligned}$$

on remplace $3uv$ par 15,

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow u^3 + 15u + 15v + v^2 - 15(u+v) - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow u^3 + v^3 - 4 = 0\end{aligned}$$

soit

$$u^3 + v^3 = 4$$

Par ailleurs :

$$uv = \frac{15}{3} = 5$$

donc $u^3v^3 = 5^3 = 125$. On pose $U = u^3$ et $V = v^3$. Le problème se ramène à déterminer U et V en connaissant leur somme et leur produit :

$$\begin{cases} U + V = 4 \\ U \cdot V = 125 \end{cases}.$$

On peut alors poser $V = -U + 4$ et donc :

$$U(-U+4) = 125 \Leftrightarrow -U^2 + 4U = 125 \Leftrightarrow U^2 - 4U + 125 = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré est :

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 125 = -484 \quad \text{et} \quad \sqrt{-\Delta} = \sqrt{484} = 22.$$

D'après la section précédente, les deux solutions de cette équation sont :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{4+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{4+22\mathrm{i}}{2} = 2 + 11\mathrm{i} \\ U_2 = 2 - 11\mathrm{i} \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} V_1 = 2 - 11\mathrm{i} \\ V_2 = 2 + 11\mathrm{i} \end{cases}.$$

On remarque que $U_1 = V_2$ et que $U_2 = V_1$; les deux solutions donnent donc le même résultat. On a ainsi une solution unique de l'équation (19.4) :

$$x = u + v = \sqrt[3]{U_1} + \sqrt[3]{V_1} = \sqrt[3]{2 + 11\mathrm{i}} + \sqrt[3]{2 - 11\mathrm{i}}.$$

On montre que $2 + \mathrm{i}$ est une racine cubique de U. On a :

$$(2+\mathrm{i})^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \mathrm{i} + 3 \cdot 2 \cdot \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 = 8 + 12\mathrm{i} - 6\mathrm{i} + 12\mathrm{i} = 2 + 11\mathrm{i}$$

soit $(2+\mathrm{i})^3 = U$. Donc $(2+\mathrm{i})$ est bien racine cubique de U. On a donc :

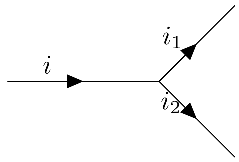
$$\begin{cases} u = 2 + \mathrm{i} \\ v = 2 - \mathrm{i} \end{cases}$$

et $x = 4$.

3 Les nombres complexes et l'électronique

3.1 Somme de deux grandeurs sinusoïdales

On considère la situation suivante



Le courant initial i et les deux courants résultants i_1 et i_2 ont la même pulsation α. Si $i_k = \widehat{I_k}\sin(\alpha t + \varphi)$, alors, en notant I_k la valeur efficace [1] de i_k, on a :

$$\underline{I_k} = I_k(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$$

avec $\widehat{I_k} = \sqrt{2}I_k$.

Remarque 19.20. En électronique, on note « j » le nombre carré -1 pour ne pas confondre avec le « i » de l'intensité...

La *loi des nœuds* nous dit que, à chaque instant t, $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$. En utilisant la formule trigonométrique suivante,

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a,$$

on obtient :

$$i_1(t) + i_2(t) = (\sqrt{2}I_1\cos\varphi_1 + \sqrt{2}I_2\cos\varphi_2)\sin(\alpha t) + (\sqrt{2}I_1\sin\varphi_1 + \sqrt{2}I_2\sin\varphi_2)\cos(\alpha t)$$

et

$$i(t) = (\sqrt{2}I\cos\varphi)\sin(\alpha t) + (\sqrt{2}I\sin\varphi)\cos(\alpha t).$$

Pour $t = 0$, on a alors :

$$\sqrt{2}I\sin\varphi = \sqrt{2}I_1\sin\varphi_1 + \sqrt{2}I_2\sin\varphi_2$$

et en $t = \frac{\pi}{2\alpha}$,

$$\sqrt{2}I\cos\varphi = \sqrt{2}I_1\cos\varphi_1 + \sqrt{2}I_2\cos\varphi_2.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\underline{I} &= I(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) = (I_1\cos\varphi_1 + I_2\cos\varphi_2) + \mathrm{j}(I_1\sin\varphi_1 + I_2\sin\varphi_2)\\ &= [I_1\cos\varphi_1 + \mathrm{j}I_1\sin\varphi_1] + [I_2\cos\varphi_2 + \mathrm{j}I_2\sin\varphi_2] = \underline{I_1} + \underline{I_2}\end{aligned}$$

Exemple 19.21. On considère $i_1 = 2\sqrt{2}\sin\left(\alpha t + \frac{\pi}{4}\right)$ et $i_2 = 3\sqrt{2}\sin\left(\alpha t - \frac{\pi}{2}\right)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\underline{I_1} &= 2\left(\cos(\tfrac{\pi}{4}) + \mathrm{j}\sin(\frac{\pi}{4})\right) = \sqrt{2}(1+\mathrm{j}),\\ \underline{I_2} &= 3\left(\cos(\tfrac{-\pi}{6}) + \mathrm{j}\sin(-\frac{\pi}{6})\right) = \frac{3}{2}(\sqrt{3}-\mathrm{j}).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2} = \left(\sqrt{2} + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{j}\left(\sqrt{2} - \tfrac{3}{2}\right).$$

---

1. La valeur efficace d'un signal périodique est la racine carré de la moyenne du carré de l'intensité calculée sur une période T :

$$i_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{T}}\sqrt{\int_t^{t+T} i^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

En approchant le résultat, on obtient :

$$I \approx 4{,}012 - 0{,}086\mathrm{j}$$

On en déduit alors que l'intensité efficace vaut environ $4{,}01$ Ampères et une mesure de son argument est $-0{,}021$ radian et donc

$$i(t) \approx 4{,}01\sqrt{2}\sin(\alpha t - 0{,}021)$$

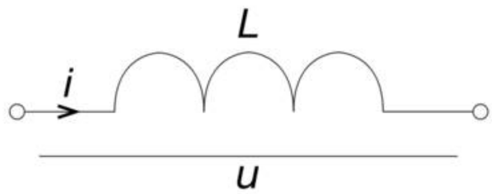
3 2 Cas d'une bobine parfaite

Définition 19.22 (Impédance complexe)**.** *L'impédance complexe $\underline{Z}$ est définie par :*

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + \mathrm{j}X$$

où R est la résistance *et X la* réactance *du dipôle.*

On considère la situation suivante :



Par définition de l'intensité $i(t)$, on a :

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Or $i(t) = I\sqrt{2}\sin(\alpha t + \varphi)$, donc :

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}(I\sqrt{2}\sin(\alpha t + \varphi)}{\mathrm{d}t} = LI\sqrt{2}\alpha\cos(\alpha t + \varphi) = L\alpha I\sqrt{2}\sin(\alpha t + \varphi + \tfrac{\pi}{2}).$$

On en déduit alors :

$$\arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I}) = \varphi + \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2}$$

et

$$|\underline{Z}| = \frac{|\underline{U}|}{|\underline{I}|} = \frac{IL\alpha}{I} = L\alpha.$$

Finalement, on a : $\underline{Z} = \mathrm{j}L\alpha$.

Compléments

Démonstration du théorème 19.1. On utilise les formes exponentielles :

$$(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

D'où la première formule de Moivre. La seconde formule est obtenue en remplaçant θ par $-\theta$. □

Démonstration du théorème 19.2.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} &= \cos\theta + \mathrm{i}\sin(\theta) + \cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta) \\
&= \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) + \cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta) = 2\cos(\theta) \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} &= \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) - \cos(-\theta) - \mathrm{i}\sin(-\theta) \\
&= \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) - \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) = 2\mathrm{i}\sin(\theta).
\end{aligned}$$

D'où les deux formules d'Euler. □

Démonstration du théorème 19.5. Soit $M(z)$ le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Ainsi :

$$(\vec{\imath}, \overrightarrow{AB}) = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z) = \arg(b-a) \pmod{2\pi}.$$

□

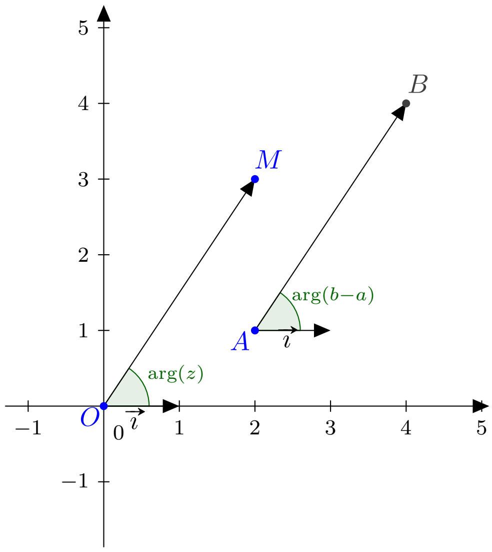


FIGURE 19.2 – Transformation des angles

Démonstration du théorème 19.7. Les affixes des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont respectivement $(a-c)$ et $(b-c)$. D'après le théorème 19.5 :

$$\arg(a-c) = (\vec{\imath}, \overrightarrow{CA}) \pmod{2\pi} \quad \text{et} \quad \arg(b-c) = (\vec{\imath}, \overrightarrow{CB}) \pmod{2\pi}.$$

Or d'après la relation de Chasles sur les angles :

$$(\vec{\imath}, \overrightarrow{CB}) - (\vec{\imath}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \pmod{2\pi}$$

et d'après les propriétés des arguments :

$$\arg(b-c) - \arg(a-c) = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \pmod{2\pi}.$$

Donc :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \pmod{2\pi}.$$

□

Démonstration du lemme 19.12. Supposons que $|z_1| = |z_2|$. Si z_1 et z_2 sont de module nul (donc sont nuls), n'importe quel réel θ fera l'affaire. On suppose alors que le module r de z_1 et z_2 est non nul. On note α_1 et α_2 des arguments respectifs de z_1 et z_2. On a ainsi :

$$z_1 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1} \quad \text{et} \quad z_2 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_2}.$$

Comme $r > 0$, on a :

$$\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Il suffit de poser $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$ ainsi :

$$z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_2.$$

De plus, θ est un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.

Réciproquement, s'il existe un réel θ tel que $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_2$, il est clair que $|z_1| = |z_2|$. □

Démonstration du théorème 19.10. On a :

$$M \in C \Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow |z - \omega| = R.$$

Or, d'après le lemme 19.12, $|z - \omega| = R$ si et seulement si il existe un réel θ tel que $z - \omega = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. D'où le théorème et on a de plus :

$$\theta = \arg(z - \omega) = (\vec{\imath}, \overrightarrow{\Omega M}) \pmod{2\pi}.$$

□

Démonstration du théorème 19.17. Voir démonstration à la leçon 16. □

LEÇON

20 Algèbre linéaire en section de technicien supérieur

Niveau, prérequis, références

Niveau BTS
Prérequis Aucun
Références [50, 51, 52]

Contenu de la leçon

1 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et ses opérations

Définition 20.1 (Ensemble $\mathbb{R}^n$)**.** *Soit $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets*

$$X = (x_1, \dots, x_n)$$

de n nombres réels x_i.

Exemple 20.2. $(3, -5)$, $(\frac{4}{5}, 2)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ sont des éléments de $\mathbb{R}^2$.

Définition 20.3 (Somme de deux vecteurs)**.** *La somme de deux éléments $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est :*

$$X + Y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

La notation $(\mathbb{R}^n, +)$ désigne $\mathbb{R}^n$ muni de l'addition.

Propriété 20.4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'addition définie dans $\mathbb{R}^n$ possède les propriétés suivantes :*

1. *associativité : $\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$, $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$,*
2. *commutativité : $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X + Y = Y + X$,*
3. *existence d'un élément neutre $\vec{0} = (0, \dots, 0)$: $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $X + \vec{0} = X$,*
4. *tout élément a un opposé : $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\exists Y \in \mathbb{R}^n$ tel que $X + Y = \vec{0}$.*

Remarque 20.5. On peut additionner deux éléments de $\mathbb{R}^n$ mais on ne peut pas additionner un élément de $\mathbb{R}^n$ à un élément de $\mathbb{R}^m$ $(m \neq n)$.

Exemple 20.6.

$$(4, 7) + (9, 31) = (13, 38), \quad (a, b, a + b, a - b) + (b - a, 3a, 2b, 4) = (b, 3a + b, a + 3b, a - b + 4).$$

Définition 20.7 (Multiplication par un réel dans $\mathbb{R}^n$)**.** *Le produit par le réel k d'un élément $X = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est :*

$$kX = (kx_1, \dots, kx_n).$$

Le réel k est un scalaire *et X un* vecteur.

Propriété 20.8. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le produit par un réel d'un élément $\mathbb{R}^n$ a les propriétés suivantes :*

1. *$\forall X \in \mathbb{R}^n$, $1X = X$,*
2. *$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\lambda(\mu X) = (\lambda\mu)X$,*
3. *$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y$,*
4. *$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $(\lambda + \mu)X = \lambda X + \mu X$.*

Définition 20.9 (Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$)**.** *L'ensemble $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ est appelé est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel).*

2 Base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Définition 20.10 (Combinaison linéaire)**.** *Une* combinaison linéaire *de n vecteurs d'un espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est un vecteur de la forme :*

$$\vec{v} = a_1\vec{u_1} + a_2\vec{u_2} + \cdots + a_n\vec{u_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{u_i}$$

où les coefficients a_i sont des réels.

Définition 20.11 (Système libre)**.** *Le système $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n})$ est* libre *équivaut à la proposition suivante : « si $a_1\vec{u_1} + \cdots + a_n\vec{u_n} = \vec{0}$ alors $a_1 = \cdots = a_n = 0$ ». Sinon, le système est dit* lié.

Définition 20.12 (Base)**.** *On appelle* base *de $\mathbb{R}^n$, tout système libre de n vecteurs. On dit alors que $\mathbb{R}^n$ est de dimension n.*

Définition 20.13 (Base canonique)**.** *On appelle* base canonique *de $\mathbb{R}^n$, le système de vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$ tels que*

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_i = (0, 0 \ldots, 1, \ldots, 0),\ e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

où, dans e_i $(2 \leq i \leq n-1)$, la i^e coordonnée est 1.

Exemple 20.14.
- Dans $\mathbb{R}^2$, la base canonique est $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, la base canonique est $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

Propriété 20.15. *Tout élément $X \in \mathbb{R}^n$ s'écrit d'une manière et d'une seule comme combinaison linéaire des vecteurs de la base canonique :*

$$X = (x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n.$$

Exemple 20.16. Les écritures $5e_1 + 12e_2$ et $(5, 12)$ dans $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes.

3 Applications linéaires

3 1 Définitions

Définition 20.17 (Application linéaire)**.** *Soient deux espaces vectoriels $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ et soit f une application de E vers F. On dit que f est une* application linéaire *si :*

1. *$\forall X, Y \in E$, $f(X + Y) = f(X) + f(Y)$,*
2. *$\forall X \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda X) = \lambda f(x)$.*

Exemples 20.18.

1. L'application

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 5x \end{array}$$

   est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:
   (a) $f(x + y) = 5(x + y) = 5x + 5y = f(x) + f(y)$,
   (b) $f(kx) = 5(kx) = k5x = kf(x)$.
2. L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (y, x + y - z, 3y - x)$ est aussi une application linéaire.
3. L'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, linéaire, telle que $f((1, 0)) = (1, 2)$ et $f((0, 1)) = (-3, 2)$ est parfaitement définie car

$$f((x, y)) = f((x, 0)) + f((0, y)) = xf((1, 0)) + yf((0, 1)) = x(1, 2) + y(-3, 2).$$

Propriété 20.19. *Toute application linéaire f de $E = \mathbb{R}^n$ vers $F = \mathbb{R}^p$ est parfaitement déterminée par la connaissance des images $f(e_1), \dots, f(e_n)$ des n vecteurs de la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $E = \mathbb{R}^n$.*

3 2 Somme d'applications linéaires

Définition 20.20. *Si f et g sont deux applications linéaires de $E = \mathbb{R}^n$ vers $F = \mathbb{R}^p$, l'application $f + g$ est définie par*

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad (f+g)(X) = f(X) + g(X).$$

De plus, l'application $f + g$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Exemple 20.21. Soient les applications linéaires $f : x \mapsto (x - 1, 2x + 3)$ et $g : x \mapsto (4 - x, x - 1)$. Les deux applications ont pour somme :

$$f + g : x \mapsto (3, 3x + 2)$$

et c'est des applications linéaires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$.

3 3 Produit d'un réel par une application linéaire

Définition 20.22. *Si f est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$ alors $kf : X \mapsto (kf)(X) = k \cdot f(X)$. De plus, l'application kf est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$.*

Exemple 20.23. Soit l'application linéaire

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 2x + 3y \end{array}$$

l'application linéaire $2f$ est définie par $2f : (x, y) \mapsto 2(2x + 3y) = 4x + 6y$.

Remarque 20.24. L'ensemble des applications linéaires munis de ces deux opérations est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3 4 Composée d'applications linéaires

Définition 20.25. *Si f est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$ et g une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$, l'application composée $g \circ f$ est l'application de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^q$ définie par :*

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad g \circ f(X) = g(f(X)).$$

Remarque 20.26. Si $n \neq q$, $f \circ g$ n'est pas définie (c'est-à-dire que $f \circ g$ n'existe pas, l'écriture $f \circ g$ n'a aucun sens).

En général, lorsque $f \circ g$ et $g \circ f$ sont toutes les deux définies, ces deux applications sont différentes.

Propriété 20.27. *Si f est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$ et g une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^q$, la composée $g \circ f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^q$.*

Exemple 20.28. Si $f : x \mapsto (x, 2x)$ et $g : (a, b) \mapsto 2a - b$ donnent $g \circ f : x \mapsto (x, 2x) \mapsto 2x - 2x = 0$. L'application $f \circ g$ n'est pas définie.

4 Matrice d'une application linéaire

4 1 Définition et exemples

Définition 20.29 (Matrice d'une application linéaire). *La matrice A de l'application linéaire f de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$, relativement aux bases canoniques respectives $(e_1, \dots, e_n)$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est un tableau de p lignes, n colonnes et $p \times n$ éléments a_{ij}. Les coefficients a_{ij} sont les coefficients des ε_i dans les écritures des combinaisons linéaires des $f(e_j) = a_{1j}\varepsilon_1 + \dots + a_{ij}\varepsilon_i + \dots + a_{nj}\varepsilon_n$. L'élément a_{ij} est à l'intersection de la i^e ligne et de la j^e colonne de la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

Exemple 20.30. Le bronze est un alliage de cuivre et d'étain à faible proportion de cuivre et le laiton est un alliage de cuivre et de zinc. Le tableau ci-dessous donne pour chacun des deux alliages (bronze ou laiton), les proportions des trois métaux (cuivre, étain, zinc) :

métaux \ alliages	bronze	laiton
cuivre	0,15	0,35
étain	0,85	0
zinc	0	0,65

Connaissant les masses (m_b, m_l) de bronze et de laiton utilisés dans un objet, on veut déterminer les masses (m_c, m_e, m_z) de cuivre, étain et zinc présentes dans l'objet. Ce problème revient à utiliser une application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice

$$\begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}35 \\ 0{,}85 & 0 \\ 0 & 0{,}65 \end{pmatrix}$$

est le tableau des proportions des trois métaux dans les deux alliages. $f : X = (m_b, m_l) \mapsto Y = f(X) = (m_c, m_e, m_z)$:

$$\begin{cases} m_c = 0{,}15 m_b + 0{,}35 m_l \\ m_e = 0{,}85 m_b \\ m_z = 0{,}65 m_l \end{cases}.$$

Propriété 20.31. *Deux matrice $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{kl}]$ sont égales si et seulement si elles ont même nombre de lignes, même nombre de colonnes et si pour tout i et tout j, $a_{ij} = b_{ij}$.*

4 2 Opérations sur les matrices

Définition 20.32. *La somme de deux matrices A et B de deux applications linéaires f et g, toutes deux de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$, est la matrice, notée $A + B$ de l'application $f + g$ de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$.*

Propriété 20.33. *La somme de deux matrices $A = [a_{i,j}]$ et $B = [b_{k,l}]$ ayant même nombre p de lignes et même nombre n de colonnes, est la matrice de p lignes et n colonnes $A + B = [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$.*

Exemple 20.34. Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

La somme est :

$$A+B=\begin{pmatrix}2-1 & 1+0 & 3+2\\ 0+0 & -2-1 & 1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix}.$$

Définition 20.35 (Opposé)**.** *Si $A=[a_{ij}]$ est une matrice de p lignes et n colonnes alors son opposé $-A=[-a_{ij}]$ est une matrice de p lignes et n colonnes.*

Définition 20.36 (Matrice nulle)**.** *Si A est une matrice de p lignes et n colonnes alors $A+(-A)=\Omega$ est une matrice nulle de p lignes et n colonnes. Toute composante de la matrice nulle est nulle. On a aussi $A+\Omega=A$.*

Définition 20.37 (Produit d'une matrice par un réel)**.** *Le produit de la matrice A de l'application f de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$ par le réel $k\in\mathbb{R}$ est la matrice notée kA de l'application kf de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$.*

Propriété 20.38. *Le produit de la matrice $A=[a_{ij}]$ de p lignes et n colonnes par le réel k est $kA=[c_{ij}]=[ka_{ij}]$.*

Exemple 20.39. Soient $k=3$ et

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

On obtient :

$$3A=\begin{pmatrix}3\times 1 & 3\times 0 & 3\times 2\\ 3\times 3 & 3\times 2 & 3\times 1\\ 3\times 2 & 3\times 1 & 3\times 1\\ 3\times 1 & 3\times 2 & 3\times 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 6\\ 9 & 6 & 3\\ 6 & 3 & 3\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

Remarques 20.40.

1. $1A=A$
2. $0A$ est une matrice nulle
3. $-1A=-A=[-a_{ij}]$ est la matrice opposée de A.

Définition 20.41. *Si B est la matrice de l'application linéaire f de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$ et A la matrice d'application linéaire g de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^q$, alors AB est la matrice de l'application linéaire $g\circ f$ de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^q$.*

Exemple 20.42. Soient

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Le produit de A par B est :

$$A\times B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times 1+0\times 1 & 2\times 3+1\times 1 & 2\times 2+1\times 2\\ 1\times 1+4\times 0 & 3\times 1+4\times 1 & 2\times 1+4\times 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 8 & 6\\ 1 & 7 & 10\end{pmatrix}$$

5 Matrices carrées

5 1 Définitions et opérations

Définition 20.43 (Matrice carrée)**.** *Une* matrice carrée *d'ordre n est une matrice qui a le même nombre n de lignes et de colonnes. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.*

Proposition 20.44. *On peut appliquer toutes les opérations sur les matrices vues précédemment aux matrices carrées.*

Propriété 20.45. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ *possède les propriétés suivantes :*

1. *associativité,*
2. *commutativité,*
3. *la matrice nulle*
$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
est l'élément neutre,
4. *toute matrice $A = [a_{ij}]$ possède une matrice opposée $-A = [-a_{ij}]$.*

Définition 20.46 (Matrice identité)**.** *On appelle I_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls, exceptés ceux de la diagonale principale qui sont égaux à 1 :*
$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 20.47. *Une matrice scalaire est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls, exceptés ceux de la diagonale principale qui sont égaux à une même constante k :*
$$K = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$
Ainsi, pour toute matrice A, on a $KA = kA$ et en particulier $IA = 1A = A$.

Propriété 20.48. *Soient A, B, C trois matrice carrées. Alors :*

1. *$\times$ est associative, c'est-à-dire $(AB)C = A(BC)$.*
2. *$\times$ est distributive à gauche, c'est-à-dire $A(B+C) = AB + AC$,*
3. *$\times$ est distributive à droite, c'est-à-dire $(A+B)C = AC + BC$.*

5 2 Matrices inversibles

Définition 20.49. *Lorsqu'elle existe, la matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA' = I$ est appelée* matrice inverse *de A et on la note $A' = A^{-1}$.*

Propriétés 20.50.
1. *Lorsque A est inversible, on a à la fois $AA^{-1} = I$ et $A^{-1}A = I$.*
2. *I est inversible et $I^{-1} = I$.*
3. *L'inverse de A^{-1} est A : $(A^{-1})^{-1} = A$.*
4. *Si A et B sont inversibles, l'inverse de AB est $B^{-1}A^{-1}$.*

5 3 Résolution d'un système

Soit $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, X un vecteur colonne (variable) et B un vecteur colonne (constant)
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

L'écriture matricielle $AX = B$ correspond à l'écriture du système de n équations à n inconnues $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Ce système d'équations a une solution unique si et seulement si la matrice A est inversible. Lorsque A est inversible, la solution est $X = A^{-1}B$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système c'est déterminer l'inverse de A.

La méthode du pivot de Gauss convient si et seulement si le système possède une solution.

Exemple 20.51. Soit à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -y & = a \\ -6x + 6y & = b \\ 7x - 5y - z & = c \end{cases}$$

Il faut donc inverser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

On suppose que A est inversible. On utilise donc la méthode du pivot de Gauss. Comme le coefficient a_{21} est non nul et a_{11} est nul, on inverse la ligne 1 et 2 :

$$\begin{cases} -6x + 6y & = b \\ -y & = a \\ 7x - 5y - z & = c \end{cases}$$

On multiplie par -7 la ligne 1 et par -6 la ligne 3. Ainsi, on soustrait la ligne 1 transformée et la ligne 3 transformée :

$$\begin{cases} -6x + 6y & = b \\ -y & = a \\ -12y + 6z & -7b - 6c \end{cases}$$

On s'occupe maintenant de la ligne 2. On multiple par 12 la ligne 2 et par -1 la ligne 3. Ensuite on soustrait la ligne 2 transformée par la ligne 3 transformée :

$$\begin{cases} -6x + 6y & = b \\ -y & = a \\ -6z & = 12a + 7b + 6c \end{cases}$$

On multiplie la ligne 2 par -6 et de la ligne 1 par -1 :

$$\begin{cases} 6x & = -6a - b \\ -y & = a \\ -6z & = 12a + 7b + 6c \end{cases}$$

On change de signe les lignes 2 et 3.

$$\begin{cases} 6x &= -6a - b \\ y &= -a \\ 6z &= -12a - 7b - 6c \end{cases}$$

On divise ensuite la ligne 1 par 6 et la ligne 3 par 6 et on obtient :

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1/6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -7/6 & -1 \end{pmatrix} B$$

Ainsi la solution du système est :

$$\begin{cases} x = -a - 1/6b \\ y = -a \\ z = -2a - (7/6)b - c \end{cases}.$$

6 Diagonalisation d'une matrice

6 1 Matrice de passage

Définition 20.52. *Soient deux bases de $\mathbb{R}^n$ notés $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ et $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e'_1}, \dots, \overrightarrow{e'_n})$ et l'application f de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$ définie, pour tout i par $f : \overrightarrow{e_i} \mapsto \overrightarrow{e'_i}$. On appelle* matrice de passage *de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, la matrice P associée à l'application f, relativement à la base $\mathcal{B}$.*

Exemple 20.53.

$$\overrightarrow{e'_1} = f(\overrightarrow{e_1}) = 2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e'_2} = f(\overrightarrow{e_2}) = -4\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2}$$

La matrice de passage P est :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5. \end{pmatrix}$$

Propriétés 20.54.

1. *Toute matrice de passage d'une base à une autre base est inversible.*
2. *Si une application de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$ a pour matrice M dans la base $\mathcal{B}$ et pour matrice M' dans la base $\mathcal{B}'$ alors $M = PM'P^{-1}$.*
3. *On dit que les matrices M et M' sont* semblables.

6 2 Diagonalisation d'une matrice carrée

Définition 20.55. *Soient f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$. S'il existe un vecteur non nul $\overrightarrow{V}$ tel que $f(\overrightarrow{V}) = \lambda\overrightarrow{V}$ où λ est un réel alors λ est une* valeur propre *de f -ou de la matrice M associée à f) et $\overrightarrow{V}$ est un vecteur propre de f relativement à la valeur propre λ.*

La matrice de f dans la base composée des vecteurs propres de f est une matrice diagonale D, c'est-à-dire une matrice où les termes qui sont sur la « première diagonale » sont les valeurs propres trouvées et les autres termes sont tous nuls :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Proposition 20.56. *Pour déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, de matrice associée M, on calcule les valeurs du réel non nul λ tel que* $\det(M - \lambda I) = 0$, *I étant la matrice unité.*

Démonstration de la propriété 20.27. On a, pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g \circ f(X+Y) &= g(f(X+Y)) = g(f(X) + f(Y)) = \\ &= g(f(X)) + g(f(Y)) = g \circ f(X) + g \circ f(Y) \\ g \circ f(\lambda X) &= g(f(\lambda X)) = g(\lambda f(X)) = \lambda g(f(X)) = \lambda g \circ f(X). \end{aligned}$$

□

LEÇON

21 Proportionnalité et linéarité

Niveau, prérequis, références

Niveau Collège

Prérequis Notion de fonctions, repérage dans le plan

Références [53, 54, 55, 56]

Contenu de la leçon

1 Proportionnalité et tableau

Définition 21.1 (Proportionnalité)**.** *Deux grandeurs sont* proportionnelles *si, quand on multiplie (ou divise) les valeurs de la première par un nombre non nul, la seconde est multipliée (ou divisée) par le même nombre.*

Exemples 21.2.

1. Au supermarché, le prix affiché d'un kilo de cerise est de $1{,}20$ euros. On dira alors que le prix est proportionnel à la quantité (en kilos) acheté de cerise.
2. La taille n'est pas proportionnelle à l'âge. Si une personne mesure 1 mètre à 8 ans, elle ne mesurera pas nécessairement 2 mètres à 16 ans.

Définition 21.3 (Tableau de proportionnalité)**.** *Un* tableau de proportionnalité *est un tableau à 2 lignes où les nombres de la seconde ligne sont proportionnel à ceux de la première.*

Définition 21.4 (Coefficient de proportionnalité)**.** *Le nombre par lequel on multiplie les valeurs de la première ligne pour obtenir ceux de la seconde ligne est appelé le* coefficient de proportionnalité*.*

Exemple 21.5. Le périmètre d'un carré est proportionnel à la longueur de son côté. On a :

Côté	1	2	3	4	$\downarrow$
Périmètre	4	8	12	16	$\times 4$

4 est appelé le *coefficient de proportionnalité*.

2 Mouvement uniforme et échelle

Définition 21.6 (Mouvement uniforme)**.** *Un mouvement est dit* uniforme *si la distance parcourue est proportionnelle à la durée.*

Exemple 21.7. On a mis dans le tableau ci-dessous la distance parcourue par Ludovic lors de son footing :

Distance parcourue (en m)	200	500	800	1000
Durée (en min)	1	$2{,}5$	4	5

Ce tableau est bien un tableau de proportionnalité donc le mouvement est uniforme.

Remarque 21.8. Lorsqu'un mouvement est uniforme, la distance (en mètre) parcourue en 1 seconde est la *vitesse de déplacement* (exprimée en m/s). Cette vitesse est aussi égale à la distance (en km) parcourue en 1h (mais elle est exprimée ici en km/h).

Définition 21.9 (Echelle)**.** *L'*échelle *d'une reproduction est le nombre :*

$$e = \frac{\textit{longueur sur le plan}}{\textit{longueur réelle}}.$$

Exemples 21.10.

1. Si une route sur une carte mesure 1 cm alors qu'en réalité elle mesure 6 kilomètres (ou $600\,000$ cm), on dira que la carte est à l'échelle $\frac{1}{600000}$.
2. En S.V.T, on représente les nervures d'une feuille sur un plan. 1 cm de cette feuille représente en réalité $0{,}001$ cm. L'échelle du schéma est donc de $\frac{1000}{1}$.

Remarque 21.11.

– Si $e < 1$, la reproduction est une *réduction*.
– Si $e > 1$, la reproduction est un *agrandissement*.

3 Quatrième proportionnelle, graphique de proportionnalité

Propriété 21.12. *Un tableau à quatre cases est un* tableau de proportionnalité *lorsque les produits en croix sont égaux :*

a	c
b	d

$$a \times d = b \times c.$$

Définition 21.13 (Quatrième proportionnelle)**.** *Trouver la* quatrième proportionnelle *dans un tableau de proportionnalité à 4 cases signifie trouver une valeur sachant les trois autres.*

Exemple 21.14. On cherche la valeur de x telle que le tableau suivant soit un tableau de proportionnalité :

Quantité de farine (en g)	250	400
Quantité de beurre (en g)	150	x

On utilise les produits en croix pour trouver x :

$$250x = 400 \times 150$$

soit :

$$x = \frac{400 \times 150}{250}$$
$$x = 240$$

Propriété 21.15. *Une situation de proportionnalité peut être représentée par un graphique dans un repère où tous les points sont alignés avec l'origine. Dans ce cas, le coefficient de proportionnalité est l'ordonnée du point d'abscisse* 1.

Exemple 21.16. On considère le tableau suivant :

Quantité (en kg)	1	1,5	2	3	4
Prix à payer (en euros)	1,5	2,25	3	4,5	6

Le graphique représentant cette situation est à la figure 21.1. Le coefficient de proportionnalité est de $1{,}5$.

4 Vitesse moyenne

Définition 21.17 (Vitesse moyenne)**.** *La* vitesse moyenne v *d'un mobile qui a parcouru la distance* d *pendant la durée* t *est :*

$$v = \frac{d}{t}.$$

Exemple 21.18. Sophie a mis 15 minutes à pieds pour parcourir une distance de 1 km. Sachant que 15 minutes vaut $0{,}25$ heure, sa vitesse moyenne est donc

$$v = \frac{1}{0{,}25} = 4 \text{ km/h}.$$

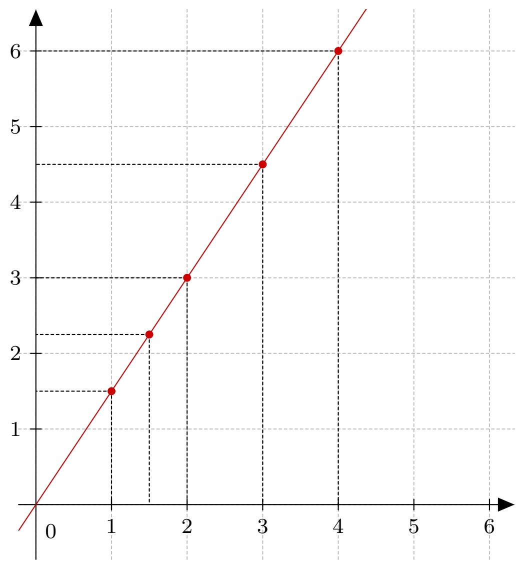


FIGURE 21.1 – Graphique représentant la situation de proportionnalité

Remarque 21.19. La vitesse moyenne est toujours exprimée en km/h ou en m/s. Alors il faudra toujours avoir les distances en kilomètres ou en mètres, et le temps en heures ou en secondes.

Exemple 21.20. On a chronométré le parcours de Karim et on a mis les résultats dans le tableau suivant :

Temps (en s)	0	30	60	90	120	150
Distance parcourue (en m)	0	50	95	120	180	210

On met les points correspondants dans un repère (en bleu sur la figure 21.2). La vitesse moyenne est $v = \frac{250}{150} = 1{,}4$ m/s. On trace en rouge sur le même graphique les points correspondants aux distances théoriquement parcourues s'il avait marché à cette vitesse.

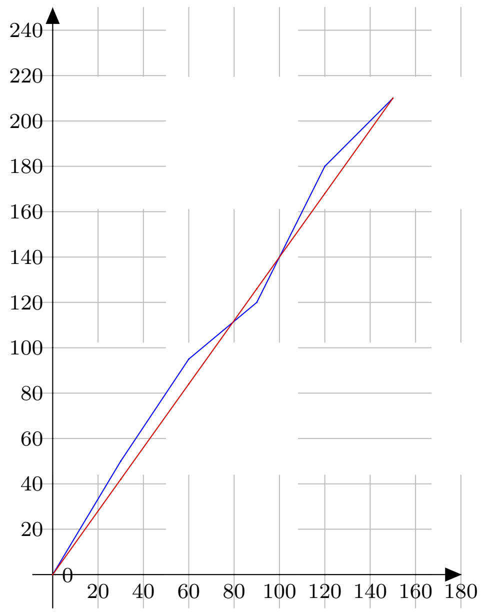


FIGURE 21.2 – Graphique de la course de Karim

5 Fonctions linéaires et proportionnalité

Définition 21.21 (Fonction linéaire)**.** *Soit a un nombre quelconque non nul. La fonction f définie par l'expression $f(x) = ax$ (ou par $f : x \mapsto ax$) est appelée une* fonction linéaire de coefficient a.

Exemples 21.22.
1. La fonction f définie par $f : x \mapsto 3x$ est une fonction linéaire de coefficient 3
2. La fonction g définie par $f : x \mapsto -\frac{2}{3}x$ est une fonction linéaire de coefficient $\frac{2}{3}$.

Propriété 21.23. *Une fonction linéaire de coefficient a traduit une situation de proportionnalité de coefficient a.*

Exemple 21.24. Un commerçant souhaite augmenter ses tarifs de 3%. On note x le tarif d'un article. Alors, le nouveau prix de cet article après augmentation est égal à $x + \frac{3}{100}x = x + 0{,}03x = 1{,}03x$. On peut construire un tableau de proportionnalité où x représente le prix d'un article et $f(x)$ le prix du même article après augmentation :

x	0	1	1,5	4	$\downarrow$
$f(x)$	0	1,03	1,545	4,12	$\times 1{,}03$

Propriété 21.25. *Une fonction linéaire de coefficient a est représentée, dans un repère, par une droite passant par l'origine, et réciproquement. a est alors appelé le* coefficient directeur de la droite.

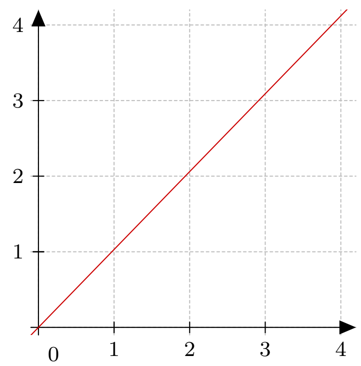


FIGURE 21.3 – Graphique de l'exemple

6 Pourcentages

Voir la **Leçon 22 : Pourcentages**

Compléments

LEÇON

22 Pourcentages

Niveau, prérequis, références

Niveau Première L Math-Info

Prérequis Proportionnalité

Références [57, 58]

Contenu de la leçon

1 Pourcentages et proportions

Définition 22.1 (Pourcentage)**.** *Un* pourcentage *est un rapport de proportionnalité ramené à 100. On peut l'écrire sous la forme d'une fraction décimale dont le dénominateur est* 100.

Exemple 22.2. Si, dans une classe de 25 élèves, 40% sont des garçons. Combien représentent-ils ? On peut dresser un *tableau de proportionnalité* suivant :

Pourcentages	100%	40%
Elèves	25	x

et on effectue le calcul pour trouver la valeur de x :

$$x = 25 \times \frac{40}{100} = 10.$$

Il y a donc 10 garçons dans la classe.

Remarque 22.3. L'utilisation d'un tableau de proportionnalité (et des fameux produits en croix) est une méthode qui permet à coup sûr de résoudre les problèmes posés.

Cette remarque nous permet d'énoncer la propriété suivante :

Propriété 22.4. *Pour prendre les* $p\%$ *d'une quantité* a*, on effectue le calcul* $a \times \frac{p}{100}$.

Remarque 22.5. L'ordre dans lequel on effectue les deux opérations est indifférent. Néanmoins, il est peut-être plus facile d'effectuer d'abord la multiplication, puis ensuite la division par 100.

2 Déterminer un pourcentage

Exemple 22.6. Si, dans une classe de 25 élèves, 10 élèves sont des garçons, quel pourcentage représentent-ils ? On peut dresser le tableau de proportionnalité suivant :

Pourcentages	100%	x
Elèves	25	10

et on calcule $x = \frac{10}{25} \times 100 = 40$. Les garçons représentent donc 40% des élèves de la classe.

Propriété 22.7. *Pour trouver le pourcentage que* a *représente par rapport à* b*, on effectue le calcul* $\frac{a}{b} \times 100$.

3 Pourcentages d'évolution

Exemple 22.8. Le prix d'un article était de 6,50 €. Son prix augmente de 5%. Combien coûte-t-il à présent ? On a vu que les 5% de 6,50 € représente

$$6{,}5 \times \frac{5}{100} = 0{,}325\,€.$$

L'objet coûte donc maintenant :

$$6{,}5 + 6{,}5 \times \frac{5}{100} = 6{,}5 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 6{,}5 \times 1{,}05 = 6{,}825\,€.$$

Remarque 22.9. On aurait pu de la même manière calculer le prix de l'article, après une baisse de 5%. On aurait obtenu :

$$6{,}5 - 6{,}5 \times \frac{5}{100} = 6{,}5 \times \left(1 - \frac{5}{100}\right) = 6{,}5 \times 0{,}95 = 6{,}175\,€.$$

Propriété 22.10. *Soit a une quantité. Alors la quantité a augmentée de $p\%$ vaut*

$$b = a \times \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

La quantité a diminuée de $p\%$ vaut

$$b = a \times \left(1 - \frac{p}{100}\right).$$

Définition 22.11 (Coefficient multiplicateur). *Les nombres $1 + \frac{p}{100}$ et $1 - \frac{p}{100}$ sont appelés les* coefficients multiplicateurs *associés à la baisse et à la hausse de $p\%$.*

4 Itérations de pourcentages

Les augmentations ou diminutions de p% peuvent s'enchaîner. On parle alors d'*itérations de pourcentages*.

Exemple 22.12. Une somme d'argent de 500 euros est placée sur un compte rémunéré à 4% l'an. Au bout de la première année, la somme d'argent, augmentée de ses intérêts devient égale à $500 \times 1{,}04 =$ 520 €. Mais, lors de la deuxième année, les 4% ne sont plus calculés sur les 500 euros du début mais sur les 520 € de sorte qu'à la fin de la deuxième année, la capital obtenu s'élève à :

$$520 \times 1{,}04 = 500 \times 1{,}04 \times 1{,}04 = 500 \times (1{,}04)^2 = 540{,}80\,€.$$

Propriété 22.13.
1. *Une quantité A augmentée n fois successivement d'un même pourcentage t devient égale à :*

$$A \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times \cdots \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) = A \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$$

2. *Une quantité A diminuée n fois successivement d'un même pourcentage t devient égale à*

$$A \times \left(1 - \frac{t}{100}\right) \times \left(1 - \frac{t}{100}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{t}{100}\right) = A \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)^n.$$

Remarque 22.14. Si le pourcentage d'augmentation reste le même, l'augmentation, elle, n'est pas constante, car ce pourcentage, calculé sur des valeurs *de plus en plus grandes*, représente une quantité de plus en plus grande.

5 Compléments sur les intérêts

Exemple 22.15. Une personne décide de placer la somme de 1500 € à un taux d'intérêt annuel de 3%.

- L'intérêt acquis au bout d'un an sera de $1500 \times 0{,}03 =$ 45 €.
- L'intérêt acquis au bout d'un mois sera de $1500 \times \frac{0{,}03}{12} =$ 3,75 €.
- L'intérêt acquis au bout de 6 mois sera de $3{,}75 \times 6 =$ 22,50 €.

5 1 Intérêt simple

Définition 22.16. *L'*intérêt simple *est proportionnel au capital placé, au taux d'intérêt et à la durée de placement :*

$$I = C \times t \times n$$

où

- *I est l'intérêt (€),*
- *C est le capital placé,*
- *t est le taux périodique (ce que rapporte 1 € durant une période)*
- *n est le nombre de placement (années, semestres, trimestres, mois, semaines, jours).*

5 2 Valeur acquise

Définition 22.17. *La valeur acquise est la somme disponible à la fin du placement*

$$A = C + I$$

où

- *A est la valeur acquise (en €),*
- *C est le capital placé*
- *I est les intérêts acquis.*

Exemple 22.18. Un placement de 2300 € placé 5 mois au taux mensuel de $0{,}5\%$ rapporte un intérêt de 57,50 € soit une valeur acquise de

$$2300 + 57{,}50 = 2357{,}50\,€.$$

5 3 Taux proportionnels

Définition 22.19 (Taux proportionnels)**.** *Deux taux sont dits* proportionnels *s'ils sont proportionnels à leur durée de placement :*

$$t_{semestriel} = \frac{t_{annuel}}{2},\ t_{trimestriel} = \frac{t_{annuel}}{4},\ t_{mensuel} = \frac{t_{annuel}}{12},\ \ldots$$

Remarques 22.20.

1. A intérêts simples, des taux proportionnels sont équivalents, car ils conduisent à la même valeur acquise.
2. Une année commerciale compte 360 jours, 12 mois, 24 quinzaines.

5 4 Taux moyen de placement

Définition 22.21 (Taux moyen de placement)**.** *Le* taux moyen de placement *est le taux unique auquel il aurait fallu placer les capitaux pendant les mêmes durées pour obtenir le même intérêt total.*

Exemple 22.22. Trois placements de 2000 €, 1500 € et 750 € sont respectivement placés pendant un an à $4{,}25\%$ l'an, pendant 8 mois à $0{,}3\%$ mensuel et pendant 120 jours à $5{,}5\%$. L'intérêt total rapporté par les 3 placements est :

$$I = (2000 \times 0{,}0425) + (1500 \times 0{,}003 \times 8) + (750 \times 0{,}055 \times \tfrac{120}{360}) = 134{,}75\,€.$$

Le taux moyen de placement T est obtenu par la résolution de l'équation suivante :

$$134{,}75 = (2000 \times T) + (1500 \times T \times \tfrac{8}{12}) + (750 \times T \times \tfrac{120}{360})$$

d'où $134{,}75 = 3250T \Leftrightarrow T = 0{,}0415$. Le taux moyen de placement est de $4{,}15\%$ annuel.

5 5 Représentations graphiques

Propriété 22.23. *L'intérêt simple est une fonction linéaire de la durée de placement. Elle est représentée par une droite passant par l'origine.*

Exemple 22.24. Une personne a placé 500 € au taux annuel de 4%. L'intérêt est représenté par la droite d'équation $y = 500 \times 0{,}04 \times x$ soit $y = 20x$ où y représente l'intérêt et x la durée du placement.

Propriété 22.25. *La valeur acquise est une fonction affine de la durée de placement. Elle est représentée par une droite qui ne passe par l'origine.*

Exemple 22.26. La valeur acquise au bout de x années est représentée par la droite d'équation : $y = 500 + 20x$.

6 Pièges sur les pourcentages

1. *En général, les pourcentages ne s'ajoutent pas et ne se retranchent pas.*

   Exemple 22.27. Un objet coûte 100 €. Son prix augmente de 10%, puis le nouveaux prix est diminué de 10%. Quel est son nouveau prix ?
   Une erreur serait de croire que 100 € $+ 10\% - 10\% =$ 100 € ! En effet, on a : 100 € $+ 10\% =$ 110 € et la diminution suivante, de 10% sera appliquée aux 110 € soit

   $$110\,€ - 10\% = 110 - 11 = 99\,€.$$

   Seuls les pourcentages portant sur le même ensemble sont susceptible de s'ajouter :

   Exemple 22.28. Dans une classe de 30 élèves, 15 élèves sont bruns et 3 sont roux. Quel est le pourcentage d'élèves qui ne sont pas blonds ? Les élèves bruns représentent $\frac{15\times 100}{30} = 50\%$ de la classe et les élèves roux représentent $\frac{3\times 100}{30} = 10\%$ de la classe. Les pourcentages ayant été calculés à partir du même ensemble de définition (la classe), on peut affirmer que $50\% + 10\% = 60\%$ des élèves ne sont pas blonds.

2. n augmentations de $p\%$ ne sont pas équivalentes à une augmentation de $np\%$.

   Exemple 22.29. On reprend les données de l'exemple 22.12. Deux augmentations successives de 4% *n'ont pas été égales* à une augment de 8%. Pour connaître leur effet sur une somme, il convient de calculer $(1,04)^2 = 1{,}0816$. Ceci nous permet d'affirmer que 2 augmentations successives de 4% sont équivalentes à une augmentation de $8{,}16\%$.

Compléments

LEÇON

23 Systèmes d'équations et systèmes d'inéquations

Niveau, prérequis, références

Niveau Troisième (section 23.2.1), Première ES

Prérequis Résolution d'une équation à une inconnue, équation d'une droite

Références [59, 60, 61]

Contenu de la leçon

1 Systèmes de deux équations à deux inconnues

1.1 Equations à deux inconnues

Propriété 23.1. *Pour déterminer complètement la valeur de deux inconnues dans une équation, il en faut* éventuellement *une deuxième.*

Exemple 23.2. Soit à résoudre $x+2y=9$. On remarque qu'il y a une infinité de valeurs correspondant à x et à y (par exemple $(1,4)$, $(4,2.5)\ldots$). Géométriquement, cette équation est représentée par une droite qui comprend une *infinité* de points d'abscisse x et d'ordonnée y.

Pour trouver x et y, il faut une deuxième équation qui correspondra à l'équation d'une autre droite.

1.2 Méthode de résolution d'un système d'équations à deux inconnues

Définition 23.3 (Résolution par substitution)**.** *On exprime l'inconnue en fonction de l'autre.*

Exemple 23.4. Soit à résoudre :

$$\begin{cases} x+2y=9 \\ x-3y=5 \end{cases}.$$

On exprimera, par exemple x en fonction de y à partir de la première égalité :

$$x+2y=9 \Rightarrow x=9-2y.$$

On remplace alors x par cette valeur $(9-2y)$ dans la deuxième égalité :

$$x-3y=5 \rightarrow 9-2y-3y=5 \Rightarrow 9-5y=5.$$

Comme cette équation ne comporte plus qu'une inconnue, on peut résoudre l'équation et déterminer la valeur numérique de y :

$$-5y=5-9 \Rightarrow y=\frac{-4}{-5}=\frac{4}{5}.$$

On remplace enfin y par sa valeur dans une des égalités pour trouver x :

$$x=9-2y=9-2\times\frac{4}{5}=9-\frac{8}{5}=\frac{37}{5}.$$

Définition 23.5 (Résolution par comparaison)**.** *Il suffira d'établir une égalité à partir d'une inconnue exprimée de la même manière dans chaque équation.*

Exemple 23.6. Soit à résoudre :

$$\begin{cases} x + 2y = 9 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

On exprimera, par exemple, x dans chaque égalité en fonction de y :

$$x + 2y = 9 \text{ alors } x = 9 - 2y$$
$$x - 3y = 5 \text{ alors } x = 5 + 3y$$

A partir de ces deux égalités, on en forme une troisième :

$$\begin{aligned} 9 - 2y &= 5 + 3y \\ -2y - 3y &= 5 - 9 \\ -5y &= 4 \end{aligned}$$

et donc les solutions du système sont $y = \frac{4}{5}$ et $x = \frac{37}{5}$.

Définition 23.7 (Résolution par addition)**.** *On ajoute membre à membre les deux égalités pour ne garder qu'*une seule inconnue. *Avant de faire cette opération, il faudra peut-être transformer les égalités données.*

Exemple 23.8. Soit à résoudre :

$$\begin{cases} x + 2y = 9 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

Pour « éliminer » les x, on multipliera la deuxième égalité par -1 puis on ajoutera les premiers membres d'un côté, les secondes membres de l'autre :

$$\begin{cases} x + 2y = 9 \\ -x + 3y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x - x + 2y + 3y &= 9 - 5 \\ 5y &= 4 \end{aligned}$$

d'où $y = \frac{4}{5}$ et $x = \frac{37}{5}$.

Définition 23.9 (Résolution graphique)**.** *On trace les deux droites et on relève les coordonnées du point d'intersection.*

Exemple 23.10. Soit à résoudre :

$$\begin{cases} x + 2y = 9 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

Les deux droites d'équations respectives $x+2y = 9$ soit $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ et $x - 3y = 5$ soit $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ ont un point d'intersection de coordonnées $y = \frac{4}{5}$ et $x = \frac{37}{5}$.

2 Systèmes d'équations linéaires, méthode du pivot de Gauss

On généralise la section 23.2.1. Les systèmes d'équations linéaires étudiés en Première S sont généralement de taille 3×3. On utilise la méthode du pivot de Gauss pour déterminer la solution de ce genre de système. Cette méthode sera expliquée sur l'exemple suivant :

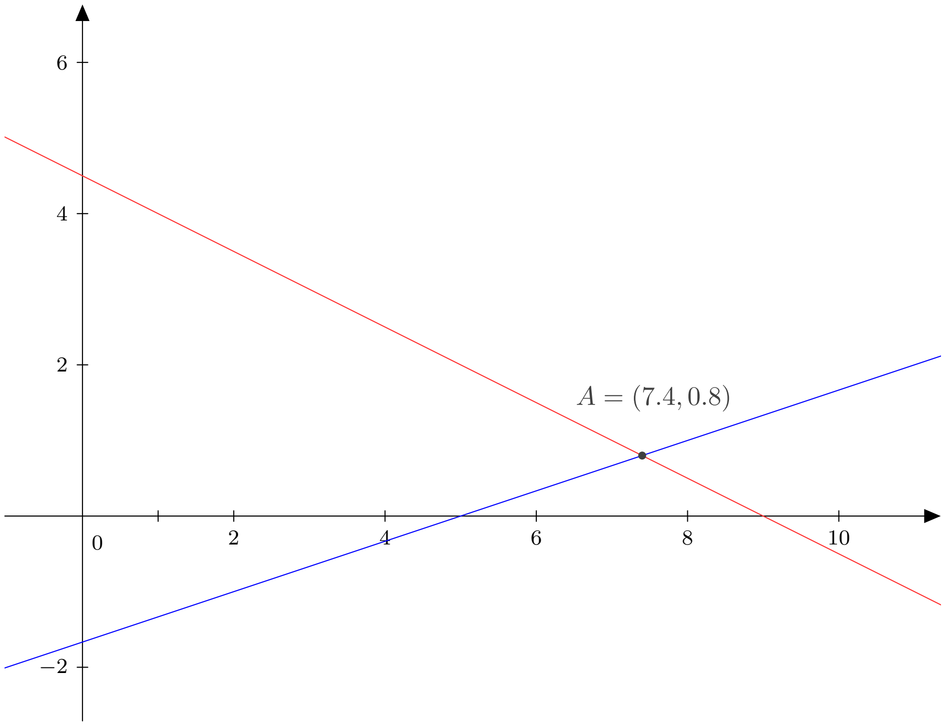


FIGURE 23.1 – Résolution graphique

Exemple 23.11. Soit à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|l} 2x & + & 5y & - & z & = & -5 & L_1 \\ 3x & - & 2y & + & z & = & 7 & L_2 \\ x & + & y & - & 2z & = & -4 & L_3 \end{array}\right.$$

On prend la ligne L_1 comme pivot pour éliminer les x dans L_2 et L_3 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|l} 2x & + & 5y & - & z & = & -5 & L_1 \\ & - & 19y & + & 5z & = & 29 & L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ & - & 3y & - & 3z & = & -3 & L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

On simplifie L_3 et on se sert de L_2 comme pivot pour éliminer y de L_3 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|l} 2x & + & 5y & - & z & = & -5 & L_1 \\ & - & 19y & + & 5z & = & 29 & L_2 \\ & - & y & + & z & = & 1 & L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|l} 2x & + & 5y & - & z & = & -5 & L_1 \\ & - & 19y & + & 5z & = & 29 & L_2 \\ & & & & 24z & = & 48 & L_3 \leftarrow 19L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

Maintenant, on peut trouver la valeur de z dans L_3, puis on l'injecte dans L_2 afin de trouver la valeur de y et injecter les deux valeurs pour trouver celle de x dans L_1 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|l} 2x & + & 5y & - & z & = & -5 & L_1 \\ & - & 19y & + & 5 \times 2 & = & 29 & L_2 \\ & & & & z & = & 2 & L_3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|l} 2x & + & 5y & - & z & = & -5 & L_1 \\ & - & 19y & & & = & 19 & L_2 \\ & & & & z & = & 2 & L_3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc|c} 2x & + & 5\times -1 & - & 2 & = & -5 & L_1 \\ & & y & & & = & -1 & L_2 \\ & & & & z & = & 2 & L_3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{cccccc|c} 2x & & & & = & 2 & L_1 \\ & & y & & = & -1 & L_2 \\ & & & z & = & 2 & L_3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{cccccc|c} x & & & & = & 1 & L_1 \\ & & y & & = & -1 & L_2 \\ & & & z & = & 2 & L_3 \end{array}\right.$$

La solution au système est donc :

$$\mathcal{S} = \{(x = 1, y = -1, z = 2)\}.$$

3 Inéquation, régionnement du plan

Exemple 23.12. Soit l'inéquation : $3x + 2y - 1 > 0$. On teste si le couple $(0, 0)$ vérifie l'inégalité. On a :

$$-1 > 0, \quad \text{FAUX}$$

donc $(0, 0)$ ne vérifie pas l'inéquation. Par conséquent, l'ensemble des couples solutions de cette inéquation sera l'ensemble des couples des points ne se situant pas du même côté que le point $O(0, 0)$ par rapport à la droite d'équation $3x + 2y - 1 = 0$. L'ensemble des « points solutions » est représenté à la figure 23.2 en bleu, droite non comprise car l'inégalité est stricte.

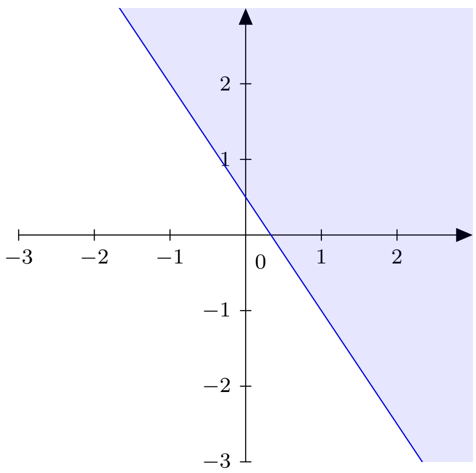


FIGURE 23.2 – Régionnement du plan par l'inéquation $3x + 2y - 1 > 0$

4 Résolution d'un système d'inéquation

Théorème 23.13. *La droite D a pour équation*

$$ax + by + c = 0.$$

La droite D partage le plan en deux demi-plans :

- *Pour tout point $M(x, y)$ de l'un d'entre eux, l'expression $ax + by + c$ est positive.*
- *Pour tout point $M(x, y)$ de l'autre, l'expression $ax + by + c$ est négative.*

Remarques 23.14. 1. Pour tous les points $M(x, y)$ d'un même demi-plan, l'expression $ax + by + c$ garde le même signe. Ainsi si pour un point quelconque de ce demi-plan, l'expression est positive alors elle est positive pour tous les autres points de celui-ci et elle est négative sur l'autre demi-plan. Pour associer à chaque demi-plan le signe qui lui correspond, on regarde si l'origine $O(0, 0)$ vérifie l'inéquation car alors $ax + by + c = 0$. Le signe de c donne le signe du demi-plan auquel O appartient. Par contre, si O appartient à la droite, on choisit un autre point.

2. L'ensemble des points $M(x, y)$ pour lesquels l'expression $ax + by + c$ est nulle est la droite D d'équation $ax + by + c = 0$.
3. Attention à l'exemple suivant : soit deux équations cartésiennes $x - y + 1 = 0$ et $y - x - 1 = 0$ qui représentent toutes les deux la droite D. Cette droite partage le plan en deux demi-plans P_1 et P_2 (voir figure 23.3). Or,

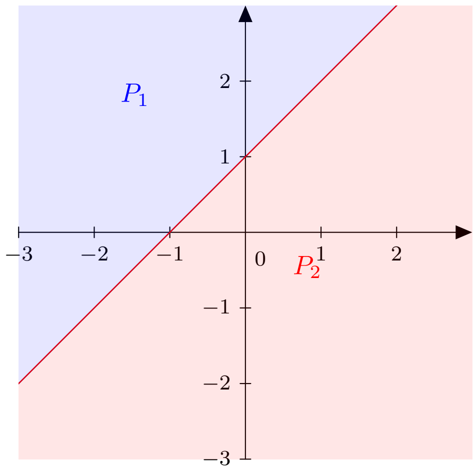


FIGURE 23.3 – Régionnement du plan par la droite $x - y + 1 = 0$

– pour tout point $M(x, y)$ de P_1, l'expression $x - y + 1$ est positive mais, par contre, l'expression $y - x - 1$ est négative.
– pour tout point $M(x, y)$ de P_2, l'expression $x - y + 1$ est négative mais, par contre, l'expression $y - x - 1$ est positive.

C'est l'origine qui permet de dire cela, O fait partie du demi-plan P_2.

Exemple 23.15. Soit le système :

$$\begin{cases} 3x + 2y - 1 > 0 \\ 2x - y + 3 > 0 \end{cases} \tag{23.1}$$

On a vu comment résoudre la première inéquation. Pour la seconde, on fait de même. Le couple $(0, 0)$ vérifie la seconde inéquation donc le point $O(0, 0)$ est dans la « partie solution ».

L'ensemble solution du système d'inéquation sera l'ensemble des points se situant à l'intersection des deux ensembles bleu et vert (partie en rouge sur la figure 23.4).

Exemple 23.16. On veut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - 2 \leq 0 \\ 5x - 4y - 24 < 0 \\ 3x + y + 4 > 0 \end{cases} \tag{23.2}$$

Première inéquation La droite D passe par les points de coordonnées $(0, 1)$ et $(2, 0)$. Elle partage le plan en deux demi-plans : P_1 (en bleu sur la figure 23.5) et P_2 (en rouge sur la figure 23.5).

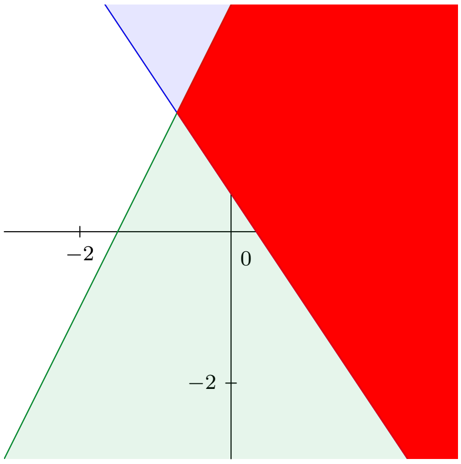


FIGURE 23.4 – Régionnement du plan par le système d'équation (23.1)

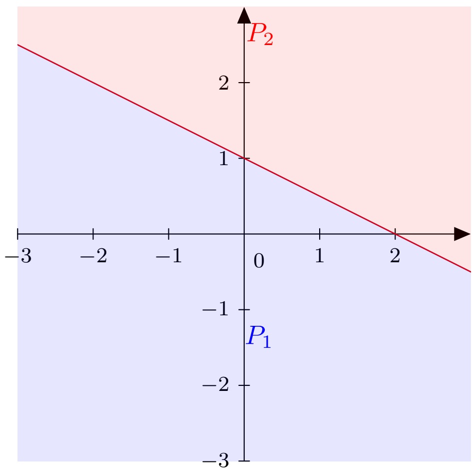


FIGURE 23.5 – Régionnement du plan par la droite $x + 2y - 2 = 0$

Pour le point $O(0,0)$, l'expression $x + 2y - 2$ vaut -2. L'expression est donc négative sur P_1 (dont O fait partie) et positive sur P_2. L'ensemble des points solutions de cette première inéquation est le demi-plan P_1 (négatif) avec la droite D (ou nul).

Deuxième inéquation La droite D' passe par les points de coordonnées $(0, -6)$ et $(4, -1)$. Elle partage le plan en deux demi-plans P_1' (en bleu sur la figure 23.6) et P_2' (en rouge sur la figure 23.6). Pour le point $O(0,0)$, l'expression $5x - 4y - 24$ vaut -24. L'expression est donc

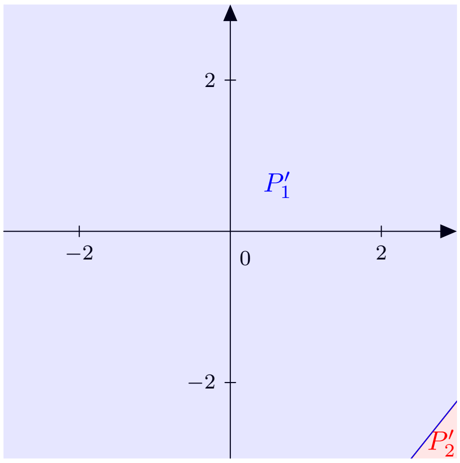


FIGURE 23.6 – Régionnement du plan par la droite $5x - 4y - 24 = 0$

négative sur P_1' (dont O fait partie) et positive sur P_2'. L'ensemble des points solutions de cette équation est le demi-plan P_1' (négatif).

Troisième inéquation La droite D'' passe par les points de coordonnées $(-1, -1)$ et $(0, -4)$. Elle partage le plan en deux demi-plans P_1'' (en bleu sur la figure 23.7) et P_2'' (en rouge sur la figure 23.7). Pour le point $O(0,0)$, l'expression $3x + y + 4$ vaut 4. L'expression est donc

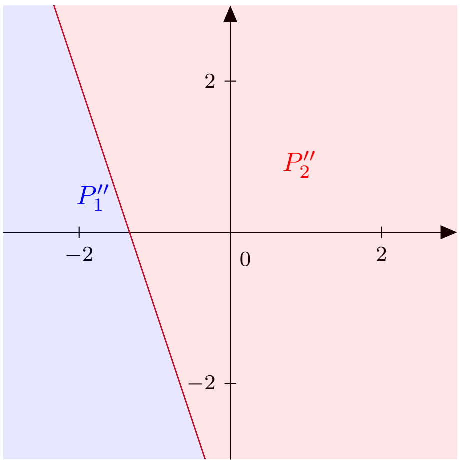


FIGURE 23.7 – Régionnement du plan par la droite $5x - 4y - 24 = 0$

positive sur P_2'' (dont O fait partie) et négative sur P_1''. L'ensemble des points solutions de cette dernière inéquation est le demi-plan P_2'' (négatif).

Conclusion L'ensemble des points solutions (en vert sur la figure 23.9) du système d'inéquations (23.2) est l'intérieur du triangle ABC et le segment $]AB[$ car la première inéquation est une inéquation large. Il faut donc inclure la droite (AB) mais il faut exclure le point A car il en fait pas partie de P_2'' et de même, il faut exclure B car il ne fait pas partie de P_1'

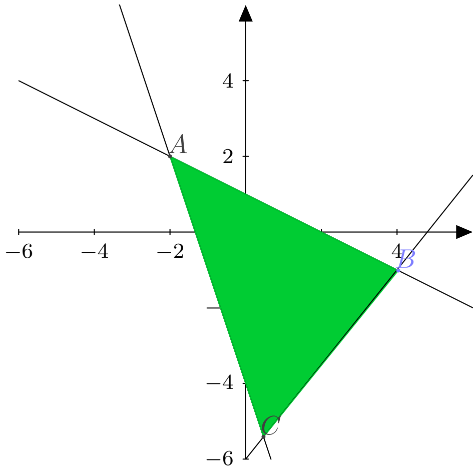


FIGURE 23.8 – Régionnement du plan par le système d'inéquations (23.2)

5 Caractérisation d'une région du plan par un système

Soit une figure dans le plan euclidien. On va essayer de donner une représentation cartésienne de cette figure sous la forme d'un système d'inéquations.

Exemple 23.17. On considère les points $A(-1,1)$, $B(2,-1)$ et $C(3,2)$. On veut déterminer un système d'inéquations linéaires à deux inconnues dont l'intérieur du triangle ABC (en excluant les côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$) est la solution. Le triangle est l'intersection de trois demi-plans.

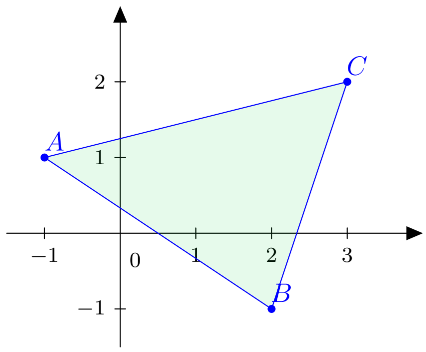


FIGURE 23.9 – Le triangle ABC

Chacun d'entre eux est délimité par un côté de ce polygone. Il nous faut donc déterminer trois inéquations : une pour chaque demi-plan.

- Pour le côté $[AB]$, la droite du même nom partage le plan en deux demi-plans : l'un d'entre eux contient l'intérieur du triangle ABC. On l'appelle P_1 et on remarque qu'il contient le point C. Une équation cartésienne de la droite (AB) est $-2x+3y+1=0$. Pour le point $C(3,2)$, l'expression $-2x-3y+1$ vaut -11. Elle est donc négative sur le demi-plan P_1. Celui-ci est donc caractérisé par l'inéquation $-2x-3y+1<0$.
- Pour le coté $[BC]$, la droite (BC) partage le plan en deux demi-plans. On appelle P_2 celui qui contient l'intérieur du triangle ABC. On remarque que A fait partie de P_2. Une équation cartésienne de la droite (BC) est $3x-y-7=0$. Pour le point $A(-1,1)$, l'expression $3x-y-7$ vaut -11. Elle est donc négative sur P_2. Le demi-plan P_2 est donc caractérisé par l'inéquation $3x-y-7<0$.
- Pour le côté $[AC]$, la droite (AC) partage le plan en deux demi-plans. On appelle P_3 le demi-plan qui contient l'intérieur du triangle ABC. Il contient donc B. Une équation cartésienne

de la droite (AC) est $x-4y+5=0$. Pour le point $B(2,-1)$, l'expression $x-4y+5$ vaut 11. Elle est donc positive sur P_3. Le demi-plan P_3 est donc caractérisé par l'inéquation $x-4y+5=0$.

– Conclusion : l'intérieur du triangle ABC est l'intersection des demi-plans P_1, P_2 et P_3. Celui-ci est solution du système d'inéquations linéaires :

$$\begin{cases} -2x-3y+1<0 \\ 3x-y-7<0 \\ x-4y+5>0 \end{cases}.$$

LEÇON

24 Droites du plan

Niveau, prérequis, références

Niveau Lycée

Prérequis Notion de fonctions, vocabulaire de la droite (parallélisme, perpendiculaire, sécantes), vecteurs, équations paramétriques.

Références [62, 63]

Contenu de la leçon

Dans cette leçon, on se donne un repère *orthonormé* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ dans le plan. Chaque droite du plan est caractérisée par une relation algébrique entre l'abscisse et l'ordonnée de ses points : c'est l'*équation cartésienne* de la droite.

1 Droites parallèles à un axe

1 1 Parallèle à l'axe des ordonnées

Définition 24.1. *Une droite* parallèle à l'axe des ordonnées *possède une équation de la forme $x = k$ où k est un nombre qui mesure l'écart algébrique de la droite par rapport à l'axe des ordonnées. On dit parfois qu'une telle droite est* verticale.

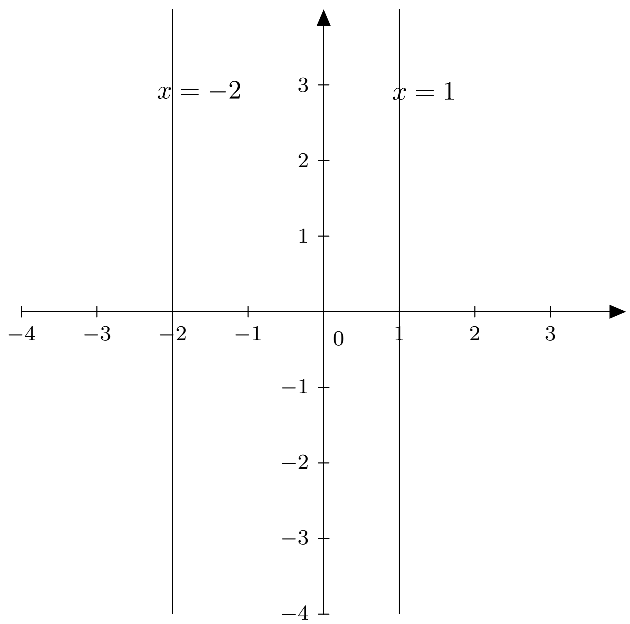


FIGURE 24.1 – Deux droites d'équations $x = 1$ et $x = -2$

1 2 Droite parallèle à l'axe des abscisses

Définition 24.2. *Une droite* parallèle à l'axe des abscisses *possède une équation de la forme $y = k$ où k est un nombre qui mesure l'écart algébrique de la droite par rapport à l'axe des abscisses. On dit parfois qu'une telle droite est* horizontale.

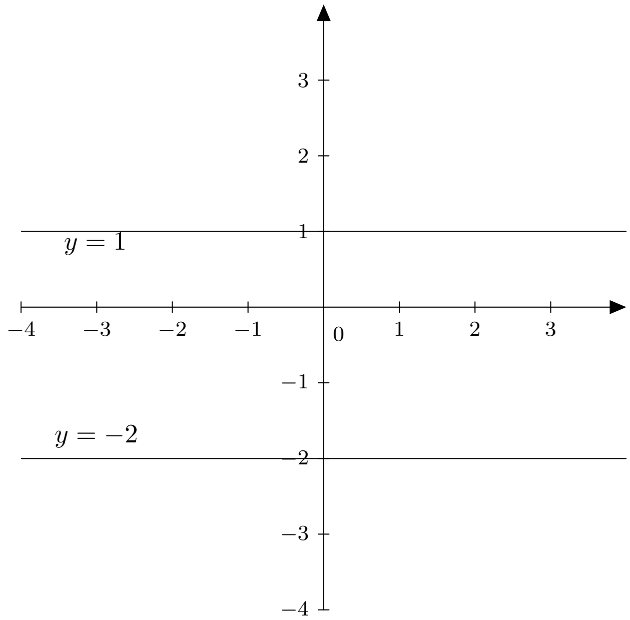


FIGURE 24.2 – Deux droites d'équation $y = 1$ et $y = -2$

2 Equation d'une droite

Définition 24.3 (Equation cartésienne d'une droite). *Si une droite est non parallèle à l'un des axes de coordonnées, alors l'équation de cette droite est de la forme $ax + b$. C'est une droite* oblique.

Exemple 24.4. Soit la droite tracée en figure 24.4. On cherche l'équation de cette droite de la forme $y = ax + b$. Cette droite passe par les points de coordonnées $A(0, 1)$ et $B(1/2, 0)$. Ainsi, on est amené à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} b = 1 \\ \frac{1}{2}a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

d'où l'équation de la droite est $y = -2x + 1$.

Remarque 24.5. D'une façon générale, la recherche de l'équation d'une droite sous la forme $y = ax + b$ conduit à un système de deux équations à deux inconnues a et b. Pour des méthodes de résolution, voir la **Leçon n° 23 : Systèmes d'équations et d'inéquations**

Définition 24.6 (Ordonnée à l'origine). *Si x est nul alors l'équation de la droite devient $y = b$ (c'est une droite verticale). Le nombre b est appelé* ordonnée à l'origine.

Proposition 24.7. *Si une droite passe par l'origine, son* ordonnée à l'origine *est nulle. Son équation est de la forme $y = ax$.*

Définition 24.8 (Coefficient directeur). *Dans les équations $y = ax$ ou $y = ax + b$ (pour $a \neq 0$), le nombre a est le* coefficient directeur *de la droite. On l'appelle aussi* la pente

Propriété 24.9. *Si une droite est non parallèle à l'un des axes de coordonnées et passe par le point $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, on a alors :*

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

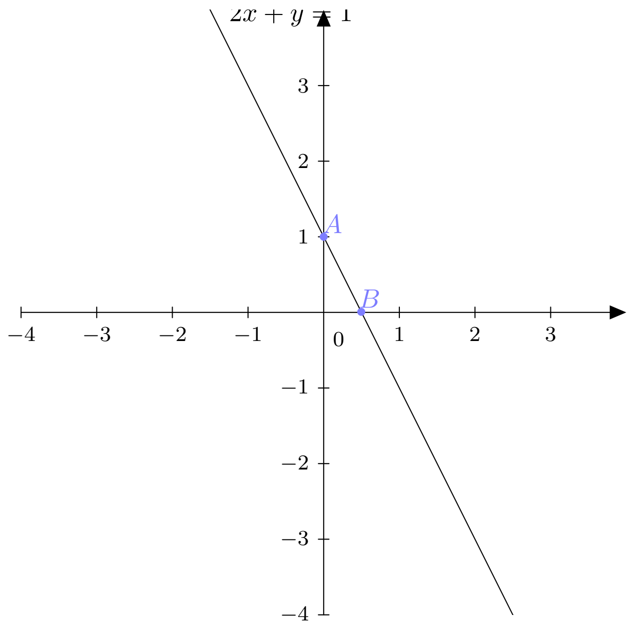


FIGURE 24.3 – Droite d'équation $y = -2x + 1$

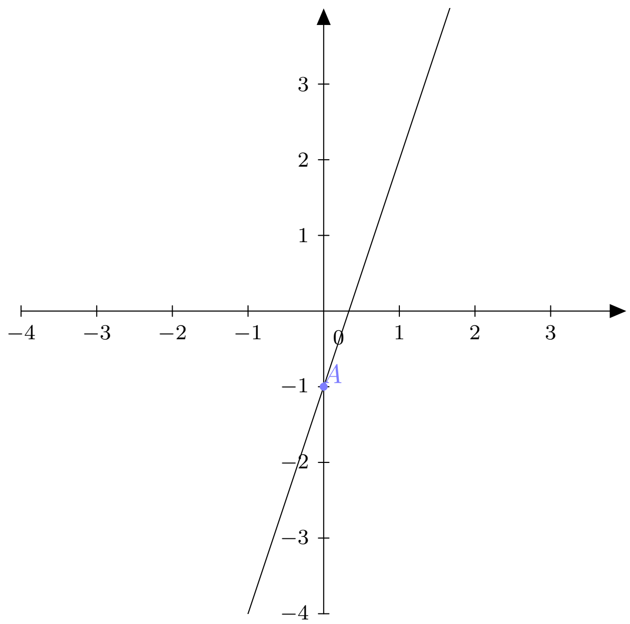


FIGURE 24.4 – L'ordonnée à l'origine de la droite d'équation $y = 3x - 1$ est -1

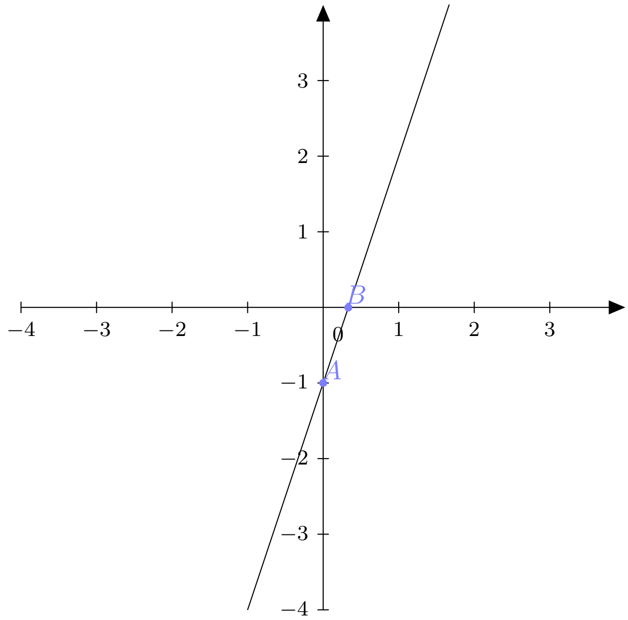


FIGURE 24.5 – La pente de la droite d'équation $y = 3x - 1$ est 3

3 Caractérisation de droites parallèles et perpendiculaires

3 1 Droites parallèles

Définition 24.10. *Deux droites seront* parallèles *si et seulement si elles ont le* même coefficient directeur *(même pente). Soient deux droites* $(d) : y = ax + b$ *et* $(d') : y = a'x + b'$*. Ces deux droites sont parallèles si et seulement si* $a = a'$*.*

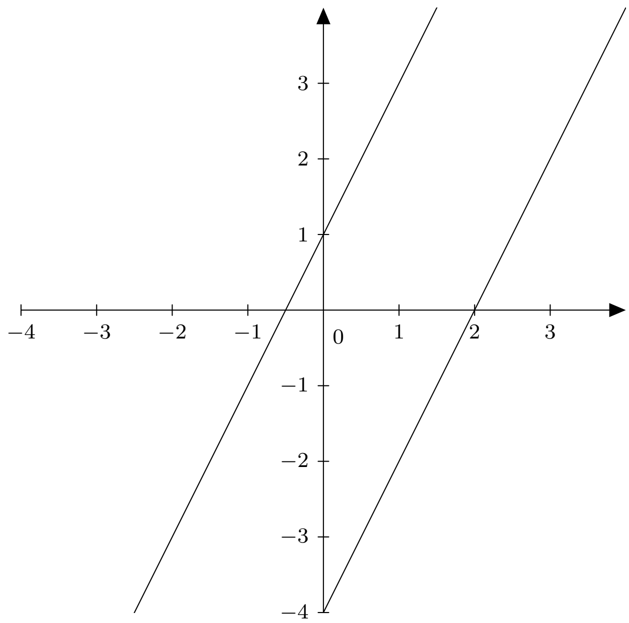


FIGURE 24.6 – Les deux droites d'équation « $y = 2x + 1$ » et « $y = 2x - 4$ » sont parallèles

3.2 Droites perpendiculaires

Comme on travaille sur un repère *orthonormé*, les axes sont perpendiculaires et les unités sur les axes sont les mêmes. Ainsi, on peut définir la notion de perpendiculaire.

Définition 24.11. *Soient* $(d) : ax + b$ *et* $(d') : y = a'x + b'$ *sont* perpendiculaires *si et seulement si* $aa' = 1$.

Remarque 24.12. A noter que dans la définition précédent, il faut supposer que $a \neq 0$ et $a' \neq 0$, ce qui revient à dire que aucune des droites (d) et (d') n'est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

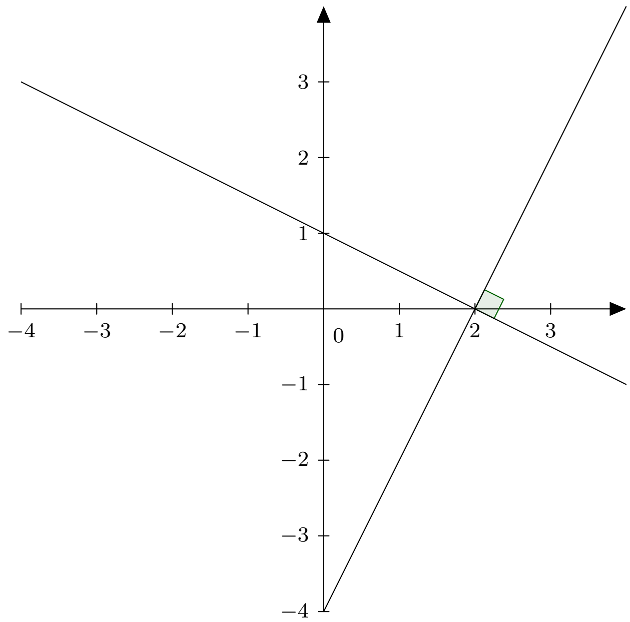


FIGURE 24.7 – Les deux droites d'équation « $y = -\frac{1}{2}x + 1$ » et « $y = 2x - 4$ » sont perpendiculaires

4 Autres formes d'équations de la droite

4.1 Equation paramétrique de la droite

Définition 24.13 (Vecteur directeur)**.** *Soit* (d) *une droite. Si* A *et* B *appartiennent à* (d)*, le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *dirige la droite : c'est un* vecteur directeur.

On choisit A comme origine de (d). Pour tout point M de (d), il existe un nombre k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$; les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires : ils ont la même direction. En notant $M(x, y)$ un point quelconque de (d), on peut écrire :

$$\begin{cases} x - x_A = k(x_B - x_A) \\ y - y_A = k(y_B - y_A) \end{cases}$$

Définition 24.14. *Si on note* a *et* b *les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *alors une* représentation paramétrique de la droite (AB) *est de la forme :*

$$\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \end{cases}$$

Exemple 24.15. Soit $A(1,4)$ et $\overrightarrow{AB}(3,-2)$. Les coordonnées du point $M(x,y)$ appartenant à la droite (AB) sont de la forme :

$$\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 4 - 2k \end{cases}$$

Si $k = 2$, on obtient le point de coordonnées $(7,0)$: intersection de la droite (AB) avec l'axe des abscisses.

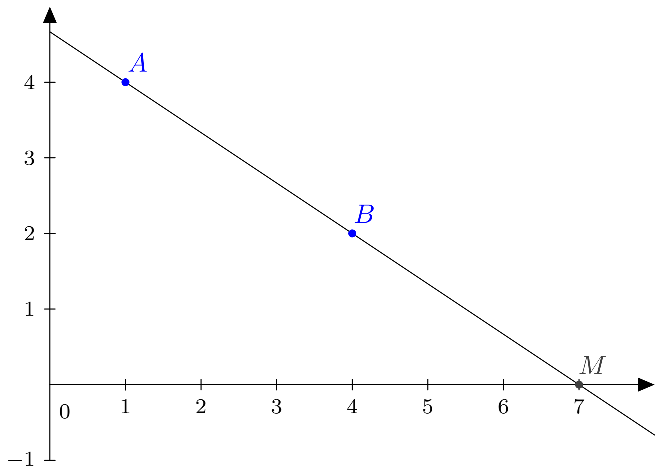


FIGURE 24.8 – Les deux droites d'équation « $y = -\frac{1}{2}x + 1$ » et « $y = 2x - 4$ » sont perpendiculaires

4 2 Forme implicite de l'équation cartésienne

Théorème 24.16. *Toute droite possède une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$. On parle d'équation* implicite *car ni x ni y ne sont explicités l'un en fonction de l'autre.*

Si une droite a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$, un vecteur directeur est alors donné par $\vec{v}(-b,a)$.

5 Forme implicite, parallélisme et perpendiculaires

5 1 Déterminant

Définition 24.17 (Déterminant)**.** *Soient deux droites $(d) : ax+by+c = 0$ et $(d') = a'x+b'y+c' = 0$. On appelle* déterminant *des deux droites (d) et (d') :*

$$\det(d,d') = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' + ba'.$$

Propriété 24.18. *Deux droites $(d) : ax + by + c = 0$ et $(d') : a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si leur déterminant est nulle.*

$$ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad a'x + b'y + c' = 0,\ (d) \parallel (d') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ab' - a'b = 0.$$

5 2 Droites perpendiculaires

Proposition 24.19. *Soient deux droites $(d) : ax + by + c = 0$ et $(d') : ax' + by' + c' = 0$. Les droites (d) et (d') sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' = 0$.*

On verra dans la **Leçon nº 40 : Orthogonalité** que deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leur produit scalaire est nul, on dira alors que les deux droites sont orthogonales.

5 3 Distance d'un point à une droite

Définition 24.20. *La distance d'un point M à une droite (D) : $ax+by+c=0$ est la longueur d du segment $[MH]$ où H est le pied, sur la droite (D), de la perpendiculaire issue de M.*

Remarque 24.21. Les coordonnées x et y de H vérifient $ax+by+c=0$.

Proposition 24.22. *Si $M(x_0,y_0)$ et (d) : $ax+by+c=0$. La distance d du point M à la droite (d) est donnée par la formule suivante :*

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ ou } d^2=\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}.$$

Exemple 24.23. Soit $A=(1,2)$ et $B(3,0)$. On cherche la distance du point $M(0,1)$ à la droite (AB). On calcule tout d'abord la forme implicite de l'équation cartésienne de la droite (AB).

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3a=2 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ 3\times -1+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases}$$

Donc l'équation cartésienne de l'équation est $y=-x+3$ et sous la forme implicite $y+x-3=0$. Ainsi :

$$d^2=\frac{(1-3)^2}{1^2+1^2}=\frac{4}{2}=2,$$

soit $d=\sqrt{2}$.

Compléments

LEÇON

25 Droites et plans de l'espace

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S

Prérequis Géométrie dans le plan, produit scalaire

Références [64, 65]

Contenu de la leçon

1 Règles de base de la géométrie dans l'espace

Pour travailler dans l'espace (ou la troisième dimension), il est nécessaire de se fixer quelques axiomes.

Axiome 25.1. *Par deux points distincts passe une seule droite. Deux points distincts* déterminent *une droite.*

Définition 25.2 (Points alignés)**.** *On dit que des points sont* alignés *s'ils appartiennent à la même droite.*

Axiome 25.3. *Par trois points non alignés passe un seul plan.*

Définition 25.4 (Points coplanaires)**.** *Si plusieurs points de l'espace appartiennent à un même plan, on dit qu'ils sont* coplanaires.

Axiome 25.5. *Si A et B sont deux points du plan $\mathcal{P}$ alors tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan $\mathcal{P}$.*

Axiome 25.6. *Si deux plans distincts ont un point commun, alors leur intersection est une droite.*

Définition 25.7 (Intersection de deux plans)**.** *Si deux plans distincts ont un point commun, alors leur intersection est une* droite.

Axiome 25.8. *Tous les résultats de la géométrie plane s'appliquent dans chaque plan de l'espace.*

Remarque 25.9. Un plan peut être défini par :
- un point et une droite ne passant pas par ce point,
- deux droites sécantes.

2 Droite de l'espace

2.1 Définition

Définition 25.10 (Droite dans l'espace)**.** *Soient A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace. La* droite *passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.*

2.2 Parallélisme et orthogonalité

Propriété 25.11. *Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ $(\neq \vec{0})$ et $\mathcal{D}'$ une droite de vecteur directeur $\vec{u'}$ $(\neq \vec{0})$*
- *$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires.*
- *$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont orthogonaux.*

2 3 Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

Définition 25.12 (Représentation paramétrique d'une droite de l'espace). *Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur non nul de l'espace. La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique :*

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, l'ensemble des points de l'espace de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \alpha + ta \\ y = \beta + tb \\ z = \gamma + tc \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

où l'un au moins des trois réels a, b ou c est non nul est la droite passant par le point $A(\alpha, \beta, \gamma)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$.

3 Plans de l'espace

Définition 25.13 (Vecteur normal). *Un* vecteur normal *du plan $\mathcal{P}$ est un vecteur non nul orthogonal à toute droite de $\mathcal{P}$.*

Propriété 25.14. *Deux vecteurs normaux à un même plan $\mathcal{P}$ sont colinéaires.*

Définition 25.15. *Soient A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace. Le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que :*

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

Définition 25.16 (Représentation cartésienne du plan). *Si dans un repère orthonormal le point A a pour coordonnées (x_A, y_A, z_A) et le vecteur $\vec{n}$ a pour coordonnées (a, b, c) (l'un des trois réels a, b ou c n'étant pas nul), une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est*

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Proposition 25.17. *Dans un repère orthonormal, tout plan de l'espace admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où l'un des trois réels a, b ou c n'est pas nul. Réciproquement, l'ensemble d'équation $ax + by + cz + d = 0$ où l'un des trois réels a, b ou c n'est pas nul est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.*

3 1 Parallélisme et perpendicularité de deux plans ou d'un plan et d'une droite

Proposition 25.18. *Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et $\mathcal{P}'$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n'}$.*

- *$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires.*
- *$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux.*

Proposition 25.19. *Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et $\mathcal{D}$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.*

- *$\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.*
- *$\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ou $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$ (dans ce cas, $\mathcal{D}$ est orthogonale à toute droite contenue dans $\mathcal{P}$).*

3.2 Distance d'un point à un plan

Définition 25.20 (Distance d'un point à un plan)**.** *Soient $\mathcal{P}$ un plan et M_0 un point. La distance de M_0 au plan $\mathcal{P}$ est la distance de $\mathcal{M}_0$ au projeté orthogonal H du point M_0 sur le plan $\mathcal{P}$. Cette distance est la plus courte distance de M_0 à un point quelconque de $\mathcal{P}$.*

Proposition 25.21. *Si dans un repère orthogonal le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ (l'un des trois réels a, b ou c n'étant pas nul) et M_0 a pour coordonnés (x_0,y_0,z_0) alors la distance de M_0 à $\mathcal{P}$ est :*

$$d(M_0,\mathcal{P}) = \frac{\lvert ax_0+by_0+cz_0+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

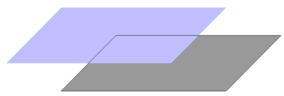
4 Positions relatives de droites et de plans

4.1 Deux plans

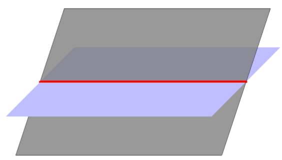
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans.

1. Si les deux plans sont parallèles,
   - ils peuvent être confondus ($\mathcal{P}=\mathcal{P}'$)

   - ils peuvent être strictement parallèles ($\mathcal{P}\neq\mathcal{P}'$).



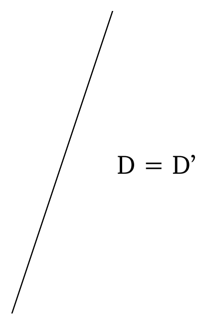
2. Si les deux plans sont non parallèles alors ils sont sécants en une droite.



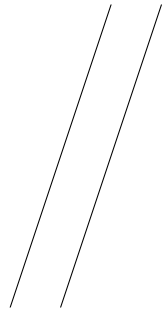
4.2 Deux droites

Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites.

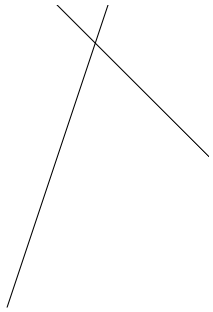
1. Si les deux droites sont parallèles alors
   (a) ils peuvent être confondues,



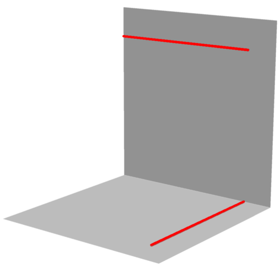
(b) ils peuvent être strictement parallèles.



2. Si les deux droites sont non parallèles
   (a) et coplanaires alors ils sont sécants en un point



   (b) ils peuvent être aussi non coplanaires.



Remarques 25.22. 1. Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ n'ont aucun point en commun alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ peuvent être strictement parallèles ou non coplanaires.

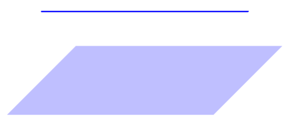
2. Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ peuvent être sécantes ou non coplanaires.

4 3 Une droite et un plan

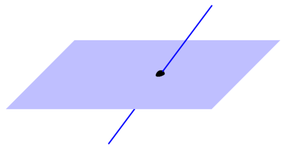
Soit $\mathcal{P}$ un plan et $\mathcal{D}$ une droite.

1. Si le plan et la droite est parallèles alors
   (a) ils peuvent être confondus (la droite est incluse dans le plan)

   (b) ils peuvent être strictement parallèles.



2. Si le plan et la droite sont non parallèle alors ils sont sécantes en un point.



Compléments

LEÇON

26 Droites remarquables du triangle

Niveau, prérequis, références

Niveau Quatrième
Prérequis Notion de triangles
Références [66, 67, 68]

Contenu de la leçon

1 Droites remarquables du triangle

Définition 26.1 (Droite remarquable). *On appelle* droite remarquable *dans un triangle une droite qui possède une propriété particulière quel que soit le triangle.*

Théorème 26.2. *Il existe quatre droites remarquables dans un triangle :*
- *Médiane*
- *Médiatrice*
- *Bissectrice*
- *Hauteur*

2 Médiane d'un triangle

Définition 26.3 (Médiane). *Une* médiane *d'un triangle est une droite passant par un sommet du triangle et par le milieu du côté opposé à ce sommet.*

Propriété 26.4. *Les médianes d'un triangle sont concourantes. Le point d'intersection de ces médianes est appelé* centre de gravité *du triangle. On a de plus :*

$$AG = 2 \times GI, \ BG = 2 \times GJ, \ CG = 2 \times GK.$$

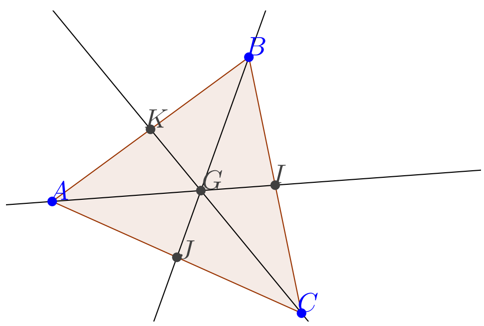


FIGURE 26.1 – G est le centre de gravité du triangle ABC

3 Médiatrice d'un triangle

Définition 26.5 (Médiatrice). *Une* médiatrice *d'un triangle est une médiane d'un côté du triangle (c'est-à-dire la droite perpendiculaire à un côté du triangle et passant par son milieu).*

Propriété 26.6. *Les médiatrices d'un triangle sont concourantes. Le point d'intersection de ces médiatrices est le centre du* cercle circonscrit *au triangle.*

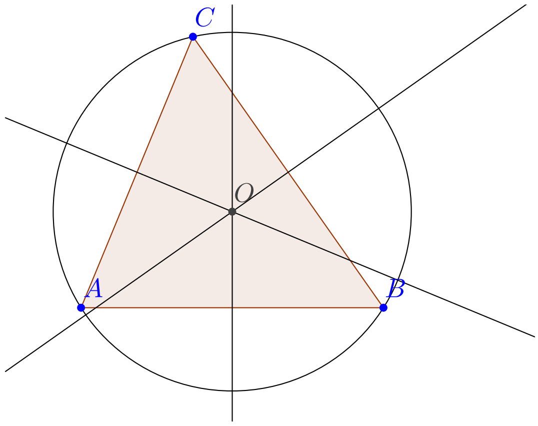


FIGURE 26.2 – O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

4 Hauteur d'un triangle

Définition 26.7. *Une* hauteur *d'un triangle est une droite passant par un sommet du triangle et perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.*

Propriété 26.8. *Les hauteurs d'un triangle sont concourantes. Le point d'intersection de ces hauteurs est appelé* orthocentre *du triangle.*

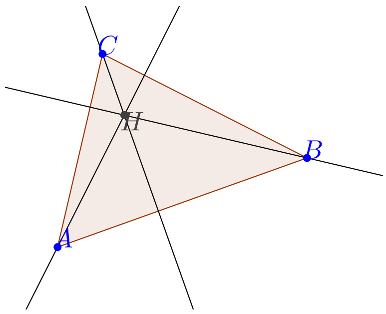


FIGURE 26.3 – H est l'orthocentre du triangle ABC

5 Bissectrice dans un triangle

Définition 26.9 (Bissectrice)**.** *Une* bissectrice *d'un triangle est une bissectrice de l'un des angles du triangles (c'est-à-dire une droite partageant cet angle en deux angles égaux).*

Propriété 26.10. *Les bissectrices d'un triangle sont concourantes. Le point d'intersection des bissectrices est le centre du cercle inscrit du triangle.*

Remarque 26.11. Les points de contacts du cercle inscrit du triangle sont appelés les points de Nagel.

6 Le cas des triangles particuliers

6 1 Triangle rectangle

Propriété 26.12. *Soit ABC un triangle rectangle en A. (BA) et (CA) sont deux hauteurs qui sont confondues avec les côtés $[BA]$ et $[CA]$. L'orthocentre du triangle ABC rectangle en A est donc A.*

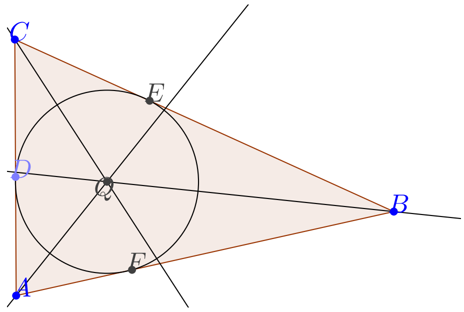


FIGURE 26.4 – Les bissectrices sont concourantes

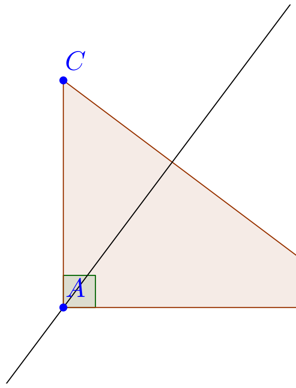


FIGURE 26.5 – Deux des hauteurs d'un triangle rectangle sont confondues avec deux des trois côtés.

6 2 Triangle isocèle

Propriété 26.13. *Si ABC est un triangle isocèle en A (c'est-à-dire $AB = AC$), alors la médiatrice de $[BC]$, la hauteur issue de A, la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et la médiane issue de A sont* confondues.

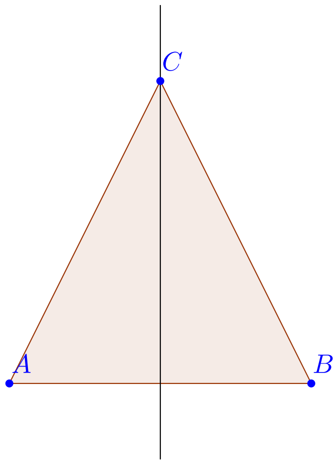


FIGURE 26.6 – Une des hauteurs du triangle isocèle est confondues avec la médiatrice, médiane et bissectrice.

6.3 Triangle équilatéral

Propriété 26.14. *Si ABC est un triangle équilatéral, alors les médiatrices, médianes, hauteurs et bissectrices sont confondues.*

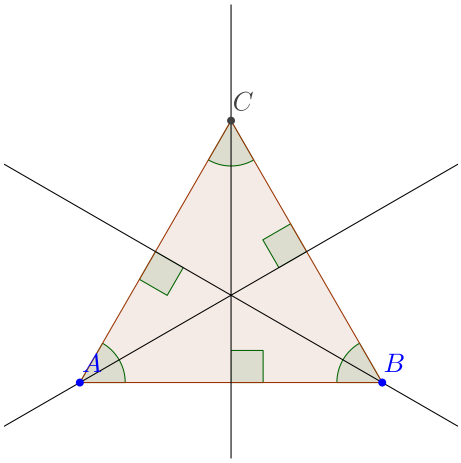


FIGURE 26.7 – Si ABC est un triangle équilatéral, alors les médiatrices, médianes, hauteurs et bissectrices sont confondues.

Compléments

1 Démonstrations de la leçon

Les démonstrations sont hors programme et nécessite un outillage mathématique vu au lycée ou en BTS.

Démonstration de la propriété 26.4. Le milieu I de $[BC]$ est défini par l'équation vectorielle :

$$\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

L'isobarycentre G des trois points A, B et C est défini par l'équation vectorielle :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

De ces deux équations, on déduit :

$$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GI} = \vec{0}.$$

Par conséquent, G, A et I sont alignés, autrement dit G appartient à la médiane (AI). On démontre de même qu'il appartient aux deux autres médianes. Les trois médianes sont donc bien concourantes. □

Démonstration de la propriété 26.6. Soient ABC un triangle rectangle, I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$. Pour tout point M de la médiatrice issue de I, $MA = MB$ et pour tout point M de la médiatrice issue de J, $MC = MA$. D'où il existe un point d'intersection O tel que $OA = OB = OC$. □

Démonstration de la propriété 26.8. On considère l'homothétie de centre G centre de gravité du triangle, et de rapport -2. Elle transforme le triangle ABC en un triangle $A'B'C'$.

Le point I milieu de $[BC]$ a pour image le point A qui est donc le milieu de $[B'C']$. La hauteur issue de A est perpendiculaire à $[BC]$ donc est perpendiculaire à $[B'C']$ et passe par son milieu. C'est la médiatrice du segment $[B'C']$.

On démontre ainsi que les trois hauteurs du triangle ABC sont les trois médiatrices du triangle $A'B'C'$. Elles sont donc concourantes. □

2 La droite d'Euler (hors programme)

Définition 26.15. *Le* cercle d'Euler *d'un triangle est l'unique cercle passant par :*
- *les trois milieux des trois côtés du triangle ;*
- *le pied de chacune des trois hauteurs du triangle ;*
- *le milieu de chacun des trois segments reliant l'orthocentre à un sommet du triangle.*

Proposition 26.16. *Dans un triangle, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et le centre du cercle d'Euler sont alignés. La droite qui passe par ces quatre points particuliers du triangle est appelé* droite d'Euler.

Démonstration. Soit M le point défini par $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$. La relation de Chasles donne

$$\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega I_1} + \overrightarrow{I_1 B} + \overrightarrow{\Omega I_1} + \overrightarrow{I_1 C}$$

Or I_1 est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{I_1 B} + \overrightarrow{I_1 C} = \vec{0}$. D'où :

$$\overrightarrow{\Omega M} - \overrightarrow{\Omega A} = 2\overrightarrow{\Omega I_1} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{\Omega I}.$$

Par définition de Ω, la droite (ΩI_1) est la médiatrice du segment $[BC]$, donc lui est perpendiculaire. La relation vectorielle établie juste au-dessus montre alors que la droite (AM) est aussi perpendiculaire à $[BC]$, donc (AM) est une hauteur du triangle ABC.

De même, on montre que (BM) et (CM) sont les hauteurs de ABC donc M appartient aux trois hauteurs de ce triangle et en est donc l'orthocentre H.

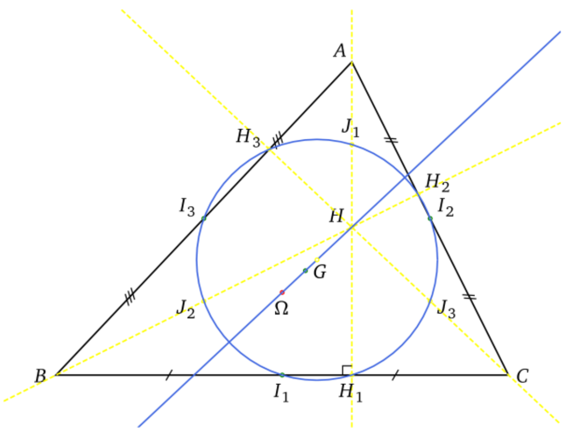
On a donc

$$\overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}.$$

Par la relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}.$$

Or $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (car G est le centre de gravité du triangle ABC). Donc, on obtient finalement $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$, ce qui montre que les points Ω, G et H sont alignés dans cet ordre. □



LEÇON

27 Le cercle

Niveau, prérequis, références

Niveau Collège (Définitions, propriétés), Première S (équation cartésienne du cercle)
Prérequis Produit scalaire (équation cartésienne du cercle)
Références [69, 70]

Contenu de la leçon

1 Définitions

Définition 27.1 (Cercle)**.** *Soit O un point du plan et r un nombre réel. Le* cercle *$\mathcal{C}$ de* centre *O et de* rayon *r est l'ensemble des points à distance r de O. Si M appartient au cercle $\mathcal{C}$ alors :*

$$OM = r.$$

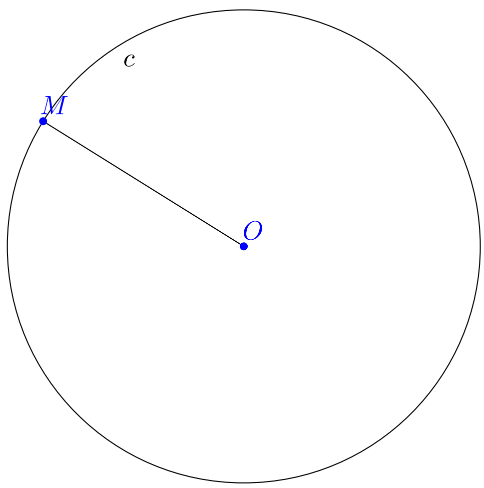


FIGURE 27.1 – Cercle de centre O et de rayon OM

Définition 27.2 (Objets géométriques liés au cercle)**.**
- *Une* corde *est un segment de droite dont les extrémité se trouvent sur le cercle.*
- *Un* arc *est une portion de cercle délimitée par deux points.*
- *Un* rayon *est un segment de droite joignant le centre à un point du cercle.*
- *Un* diamètre *est une corde passant par le centre (la longueur du diamètre est $2r$ si r est une mesure du rayon).*
- *Un* disque *est une région du plan limitée par un cercle.*
- *Un* secteur angulaire *est une partie du disque comprise entre deux rayons.*
- *Un* angle au centre *est un angle formé par deux rayons du cercle.*

2 Quelques propriétés du cercle

2 1 Aire d'un cercle

Propriété 27.3 (Aire d'un cercle)**.** *Le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r a pour aire πr^2.*

Exemple 27.4. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 3. L'aire du cercle $\mathcal{C}$ est donc de 9π.

2 2 Tangente

Définition 27.5. *On dit que deux cercles sont* tangents *l'un de l'autre si leur intersection est réduit à un point.*

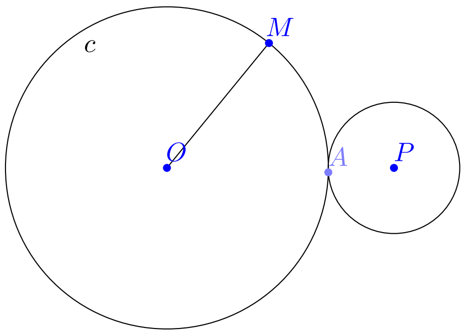


FIGURE 27.2 – Deux cercles tangents de point de contact A

Propriété 27.6. *Une droite peut avoir, avec un cercle*
- *0 point d'intersection*
- *1 point d'intersection (tangente)*
- *2 points d'intersection*

Définition 27.7 (Tangente au cercle)**.** *On dit qu'une droite est* tangente *à un cercle s'il n'a qu'un seul point d'intersection avec ce dernier.*

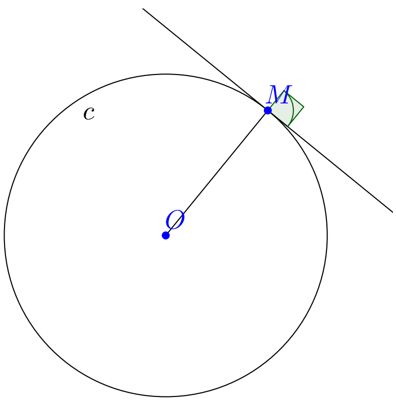


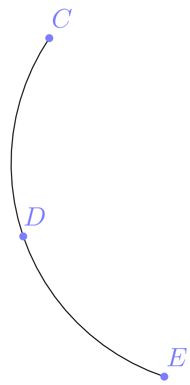
FIGURE 27.3 – Tangente au cercle de point d'intersection M

Propriété 27.8. *La tangente en un point du cercle est perpendiculaire au rayon en ce point (voir la figure précédente).*

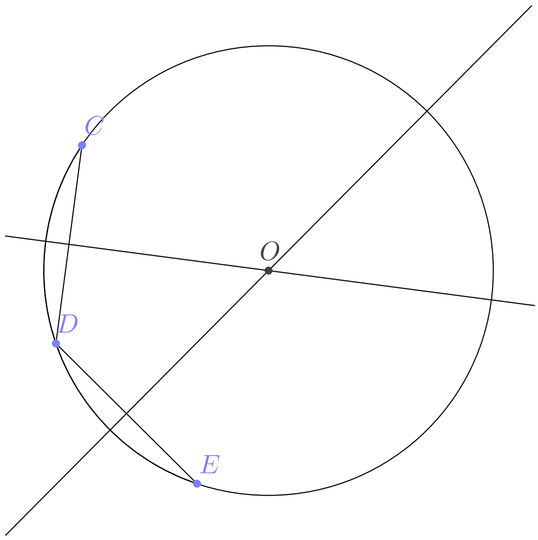
2 3 Médiatrice

Propriété 27.9. *Dans un cercle, la médiatrice d'une corde passe par le centre du cercle.*

Exemple 27.10 (Application de la propriété 27.9)**.** Soit l'arc de cercle passant par trois points C, D et E. On cherche le centre et le rayon du cercle dont l'arc de cercle y est confondu.



Pour cela, on trace les cordes $[DC]$ et $[DE]$. On construit les médiatrices des segments $[DC]$ et $[DE]$ et leur point d'intersection (d'après le propriété 27.9) est le centre du cercle qui contient l'arc de cercle $\overset{\frown}{CDE}$.



2 4 Angle inscrit, angle au centre

Définition 27.11. *Soient A, M, B trois points distincts appartenant au cercle de centre O et de rayon quelconque :*

- *l'angle $\widehat{AMB}$ est un* angle inscrit *qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$;*
- *l'angle $\widehat{AOB}$ est l'*angle au centre *qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$.*

Propriété 27.12. *Un angle inscrit mesure la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.*

Conséquence 27.13. *Deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.*

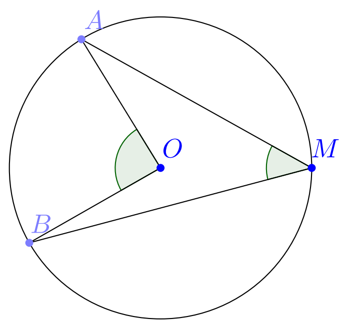


FIGURE 27.4 – Théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre

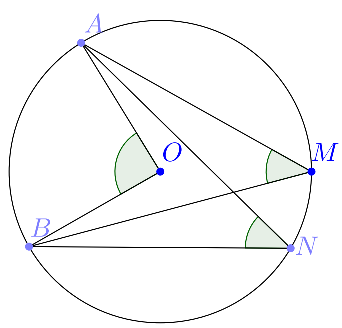


FIGURE 27.5 – $\widehat{ANB} = \widehat{AMB}$ car ils interceptent l'arc AB.

3 Equation cartésienne du cercle

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan.

Définition 27.14 (Cercle défini par son centre et son rayon)**.** *Le cercle de centre $O(a, b)$ et de rayon r a pour équation cartésienne :*

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

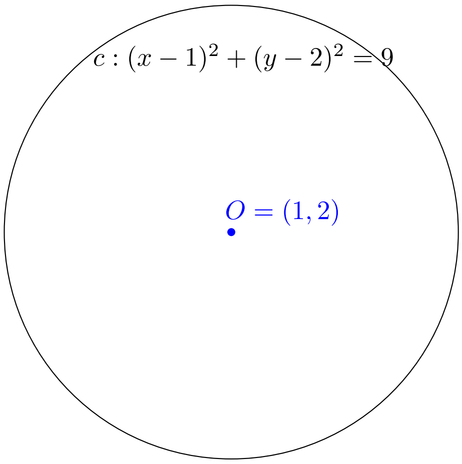


FIGURE 27.6 – Equation cartésienne d'un cercle de centre $O(1, 2)$ et de rayon 3

Définition 27.15 (Cercle défini par son diamètre)**.** *Un point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$. Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ alors le cercle de diamètre $[AB]$ a pour équation cartésienne :*

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0.$$

Définition 27.16 (Forme générale d'une équation cartésienne de cercle)**.** *En développant les expressions précédente on voit qu'une équation cartésienne de cercle peut s'écrire sous la forme :*

$$x^2 + y^2 + mx + py + q = 0.$$

Remarque 27.17. La réciproque est fausse.

Exemples 27.18.

1. L'équation $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$ peut s'écrire :

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + 6 - 1 - 9 = 0.$$

On obtient alors :

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4 = 2^2.$$

Ceci est l'équation du cercle de centre $A(1, -3)$ et de rayon 2.

2. L'équation $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 20 = 0$ va s'écrire :

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 + 20 - 4 - 16 = 0.$$

On obtient alors :

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 0.$$

Cette égalité est seulement vraie pour les coordonnées du point $A(-2, 4)$. L'égalité ci-dessus n'est donc pas une équation de cercle.

3. L'équation $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 15 = 0$ s'écrit :

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 + 15 - 9 - 1 = 0.$$

On obtient alors

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = -5.$$

Or une somme de deux carrés ne peut pas être négative. Il n'y a donc pas de solutions pour l'équation précédent. Ce n'est donc pas l'équation d'un cercle.

Compléments

1 Puissance d'un point par rapport à un cercle

Si M est un point et Γ est le cercle de centre O et de rayon R, alors pour toute droite passant par M et rencontrant le cercle en A et en B, on a :

$$MA \times MB = \left| OM^2 - R^2 \right|.$$

Cette valeur ne dépend pas de la droite choisie, mais seulement de la position de M par rapport au cercle.

Remarques 27.19.

– Si M est à l'extérieur du cercle,

$$MA \times MB = OM^2 - R^2$$

– Si M est à l'intérieur du cercle,

$$OM^2 - R^2 = -MA \times MB.$$

Définition 27.20 (Puissance d'un point par rapport au cercle). *On appelle* puissance du point *M par rapport au cercle Γ le produit des mesures algébriques $\overline{MA}$ et $\overline{MB}$ (c'est-à-dire la valeur $-MA \times MB$). Ce produit est indépendant de la droite choisie et vaut toujours $OM^2 - R^2$.*

Lorsque le point M est à l'extérieur du cercle, il est possible de mener des tangentes au cercle. En appelant T le point de contact d'une de ces tangentes, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle OMT, la puissance de M est MT^2. L'égalité

$$MA \times MB = MT^2$$

est suffisante pour affirmer que la droite (MT) est tangente au cercle.

Propriété 27.21. *Si*
- *A, B, C, D sont quatre points tels que (AB) et (CD) se coupent en M*
- *$\overline{MA} \times \overline{MB} = \overline{MC} \times \overline{MD}$ (en mesures algébriques)*

alors les quatre points sont cocycliques.

2 Le cercle vue comme une conique

Définition 27.22. *Le* cercle *est une ellipse dont les foyers sont confondus au centre du cercle ; la longueur du grand axe est égale à la longueur du petit axe.*

C'est une conique dont *l'excentricité* e vaut 0. Elle peut être obtenue par l'intersection d'un plan avec un cône de révolution lorsque le plan est perpendiculaire à l'axe de révolution du cône (ou « section droite » du cône).

LEÇON

28 Solides de l'espace

Niveau, prérequis, références

Niveau Collège
Prérequis Géométrie dans le plan
Références [71, 72, 73, 74, 75]

Contenu de la leçon

1 Définitions

Définition 28.1 (Solide). *Un* solide *dans l'espace est un ensemble de points situés à l'intérieur d'une partie fermée de l'espace.*

Définition 28.2 (Volume). *On appelle* volume *la portion de l'espace occupée par un solide.*

Définition 28.3 (Patron). *Un* patron *d'un solide est un modèle plan permettant de construire par pliage, le solide.*

Définition 28.4 (Solide selon Platon). *Est* solide *ce qui possède longueur, largueur et profondeur, et la limite d'un solide est une surface.*

Définition 28.5 (Solide selon Leibniz). *Le chemin suivi par un point se déplaçant vers un autre est une ligne (...) Le déplacement d'une ligne dont les points ne se remplacent pas sans cesse donne une surface. Le déplacement d'une surface dont les points ne se remplacent pas sans cesse donne un solide.*

2 Solides usuelles

Définition 28.6 (Cube). *Un* cube *est un solide dont toutes les faces sont des carrés de côté c.*

Propriété 28.7. *Si on note c la longueur de l'arrête d'un cube alors :*
- *La grande diagonale AG a pour mesure : $\sqrt{c^2+c^2+c^2} = c\sqrt{3}$.*
- *Le volume du cube vaut $V = c \times c \times c = c^3$.*

Définition 28.8 (Parallélépipède rectangle). *Un* parallélépipède rectangle *(ou* pavé*) dont la base est un rectangle et les faces sont rectangulaires.*

Propriété 28.9. *Si on note L, l et h les dimensions respectives du pavé droit, alors :*
- *la diagonale AG a pour mesure $\sqrt{L^2+l^2+h^2}$,*
- *le volume du pavé vaut $V = L \times l \times h$.*

Propriété 28.10 (Section du pavé droit). *Si le plan $\mathcal{P}$ est parallèle à une arrête, la section du pavé droite est un rectangle.*

Définition 28.11 (Pyramide). *Une* pyramide *est un solide à base qui peut être quelconque (rectangulaire, carré, ou triangulaire) et les faces latérales sont des triangles.*

Propriété 28.12. *Si on note c le côté de base et h la hauteur de la pyramide alors*

$$V = \frac{1}{3}B \times h = \frac{1}{3}c^2 \times h.$$

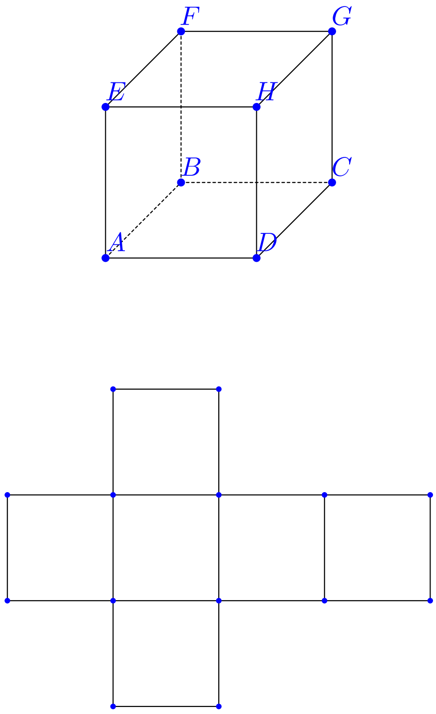


FIGURE 28.1 – Le cube et son patron

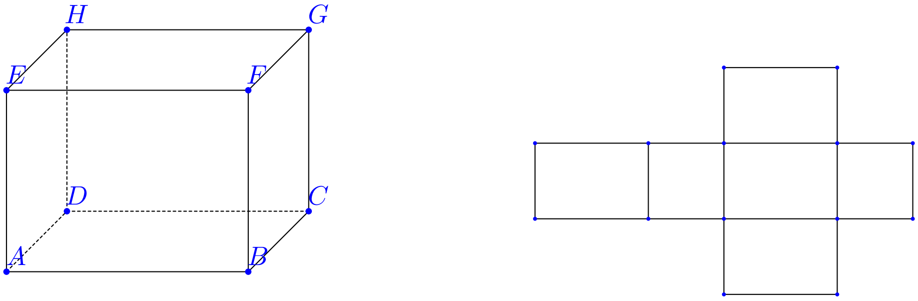


FIGURE 28.2 – Pavé et son patron

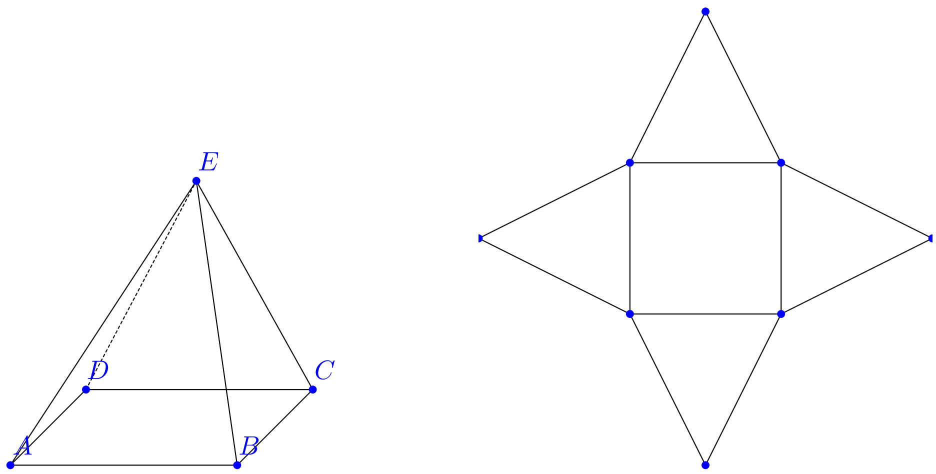


FIGURE 28.3 – Pyramide à base carrée et son patron

Proposition 28.13. *Si $\mathcal{P}$ est parallèle à la base, la section est un carré dont les côtés sont parallèles à ceux de la base.*

Définition 28.14 (Tétraèdre)**.** *Un* tétraèdre *est une pyramide à base triangulaire.*

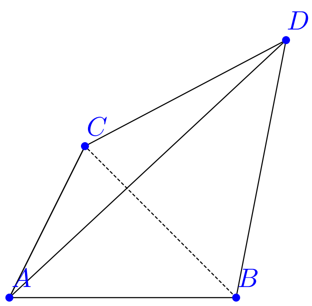


FIGURE 28.4 – Le tétraèdre

Propriété 28.15. *Si on note h la hauteur du tétraèdre et B l'aire de sa base alors :*

$$V = \frac{1}{3} B \times h.$$

Propriété 28.16 (Section du tétraèdre)**.** *Si $\mathcal{P}$ est parallèle à l'une des faces, la section est un triangle dont les côtés sont parallèles à ceux de la base.*

3 Solides de révolution

Définition 28.17 (Solide de révolution)**.** *Un* solide de révolution *est engendré par une surface plane fermée tournant autour d'un axe.*

Définition 28.18 (Boule et sphère)**.** *Une* boule *est un solide de révolution (on a fait tourner un cercle sur un axe). La* sphère *de centre O et de rayon r est le bord de la boule de même centre et de même rayon, c'est l'ensemble des points qui sont à distance r du point O.*

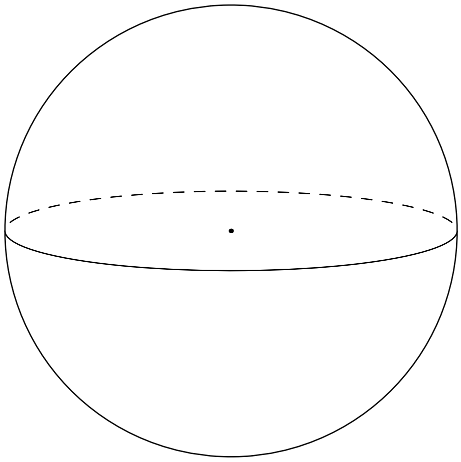


FIGURE 28.5 – Sphère

Propriété 28.19. *Si r est le rayon de la sphère alors son volume vaut*

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Définition 28.20 (Cylindre circulaire droit)**.** *Un* cylindre *droit est un solide de révolution, on a fait tourné un rectangle autour d'un axe.*

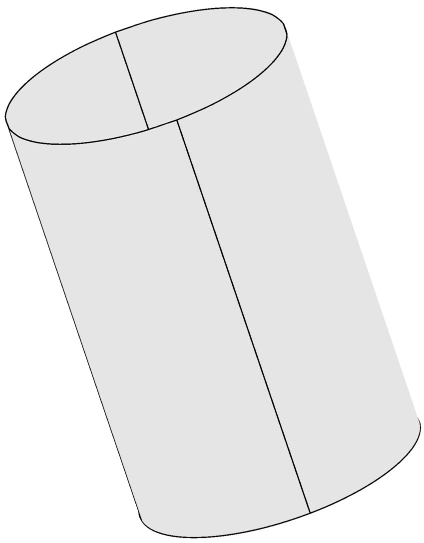


FIGURE 28.6 – Cylindre

Propriété 28.21. *Le volume d'un cylindre vaut $V = S \times h$ où S désigne l'aire d'une des deux bases et h la hauteur du cylindre.*

Définition 28.22 (Cône de révolution)**.** *Un* cône de révolution *est un solide de révolution auquel on a fait tourné un triangle autour d'un axe.*

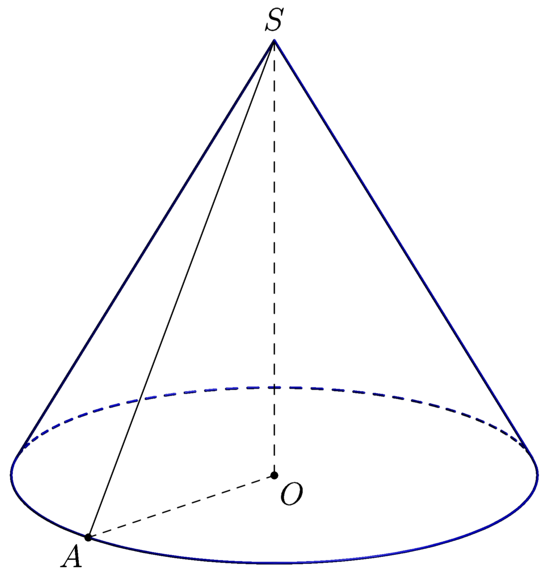


FIGURE 28.7 – Cône de révolution

Propriété 28.23. *Si on note h la hauteur du cône et r le rayon du cercle de base, alors :*

$$V = \frac{1}{3}B \times h = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h.$$

Propriété 28.24. *Si $\mathcal{P}$ est parallèle à la base, la section est un cercle dont le centre se trouve sur l'axe du cône.*

Définition 28.25 (Conique)**.** *On appelle* conique *la figure plane qui est intersection entre un plan et un cône.*

4 Solides de Platon

Définition 28.26 (Solide de Platon)**.** *Un* solide de Platon *est un polyèdre régulier, c'est-à-dire inscriptible dans une sphère et toutes ses faces sont des polygones réguliers isométriques*

Propriété 28.27. *Chaque solide de Platon vérifie la formule d'Euler :*

$$F + S = A + 2$$

avec F le nombre de faces, A le nombre d'arrêtes et S le nombre de sommets.

Théorème 28.28. *Il y a 5 solides de Platon :*

1. *L'*icosaèdre *qui est composé de 20 faces (qui sont des triangles équilatéraux), 12 sommets et 30 arrêtes ;*
2. *Le* dodécaèdre *qui est composé de 12 faces (qui sont des pentagones réguliers), 20 sommets et 30 arrêtes ;*
3. *L'*octaèdre *qui est composé de 8 faces (qui sont des triangles équilatéraux), 6 sommets et 12 arrêtes ;*
4. *Le* cube *qui est composé de 6 faces (qui sont des carrés), 8 sommets et 12 arrêtes ;*
5. *Le* tétraèdre *qui est composé de 4 faces (qui sont des triangles équilatéraux), 4 sommets et 6 arrêtes.*

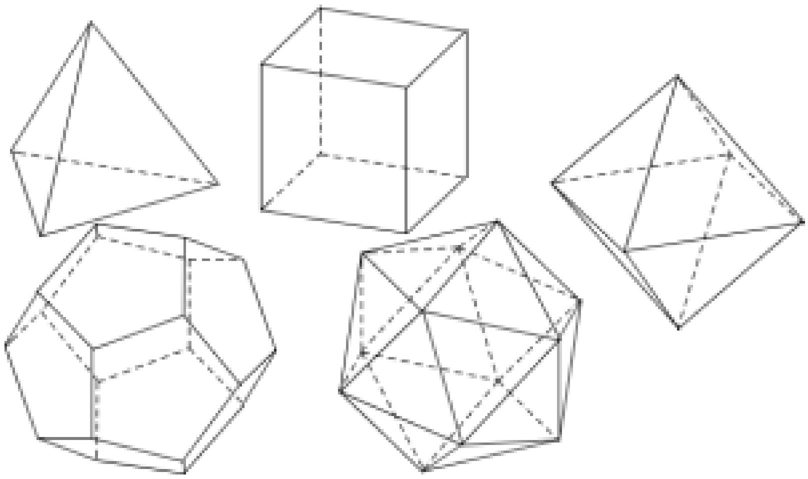


FIGURE 28.8 – Solides de Platon

Compléments

Démonstration. On montre qu'il y a cinq et seulement cinq solides de Platon. On considère un polyèdre régulier et on note s le nombre de sommets, f le nombre de faces et a le nombre d'arrêtes du polyèdre. On note aussi q le nombre de côtés du polygone régulier qui constitue la face du polyèdre et p le nombre de faces qui aboutissent chacun de ses sommets. On a alors : $fq = 2a$ et $sp = 2a$. Il s'agit donc de résoudre

$$\begin{cases} s - a + f = 2 \\ fq = 2a \\ sp = 2a \end{cases}$$

d'où

$$s = \frac{4q}{2p + 2q - pq}, \quad a = \frac{2pq}{2p + 2q - pq}, \quad f = \frac{4p}{2p + 2q - pq}.$$

On recherche alors tous les couples d'entiers (p, q) vérifiant $p \geq 3$, $q \geq 3$ et $2p + 2q - pq > 0$ et on en obtient exactement 5 :

$$(3,3), \ (4,3), \ (3,4), \ (5,3), \ (3,5),$$

desquels on déduit les triplets (s, a, f) correspondants :

$$(4,6,4), \ (6,12,8), \ (8,12,6), \ (12,30,20), \ (20,30,12).$$

On admet que les cinq polyèdres obtenus sont constructibles et que ce sont les seuls à similitude près. □

LEÇON

29 Barycentre

Niveau, prérequis, références

Niveau Première S

Prérequis Vecteurs

Références [76, 77]

Contenu de la leçon

On supposera que A et B sont deux points du plan.

1 Définition de barycentre

Définition 29.1 (Barycentre de deux points)**.** *Soient α et β deux réels tels que $\alpha+\beta \neq 0$. On appelle* barycentre de deux points (A,α) *et* (B,β) *le point G défini par :*

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Exemple 29.2. Soit $[AB]$ un segment. On veut construire le barycentre G de $(A,3)$ et $(B,2)$. Le point G est donc tel que :

$$3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

On transforme l'égalité par la relation de Chasles :

$$3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}.$$

D'où :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}.$$

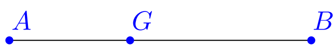


FIGURE 29.1 – G barycentre de $(A,3)$, $(B,2)$

Remarque 29.3.
- Physiquement, G est le point d'équilibre de la balance $[AB]$ munie des masses α et β.
- Mathématiquement, la notion est étendue à des coefficients qui peuvent être négatifs.

Exemple 29.4. Soit G le point d'un segment $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. On a :

$$4\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

G est donc le barycentre de $(A,3)$ et $(B,1)$.

Remarque 29.5. Si $\alpha = \beta$ alors $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$, ce qui signifie que G est le milieu de $[AB]$.

2 Autres caractérisations du barycentre

Théorème 29.6. *Soient α et β deux réels tels que $\alpha+\beta \neq 0$ et G un point du plan. Dans ces conditions, G est le barycentre de (A, α), (B, β) si et seulement si, pour tout point M du plan,*

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}.$$

Théorème 29.7. *Soient α et β deux réels tels que $\alpha+\beta \neq 0$ et G un point du plan. Dans ces conditions, G est barycentre de (A, α) et (B, β) si et seulement si*

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}.$$

3 Propriétés du barycentre

Théorème 29.8 (Homogénéité)**.** *Le barycentre de deux points reste* inchangé *lorsqu'on remplace les deux coefficients par des coefficients proportionnels (non nuls).*

Exemple 29.9. Construire le barycentre de $(A, 350)$ et $(B, 140)$ revient à étudier $(A, 5)$ et $(B, 2)$.

Théorème 29.10. *Soient α et β deux réels tels que $\alpha+\beta \neq 0$. Le barycentre G de (A, α) et (B, β) est situé sur la droite (AB).*

Théorème 29.11. *Le barycentre de deux points A et B affectés du même coefficient non nul est le milieu de $[AB]$. On l'appelle* isobarycentre *des points A et B ou encore centre de gravité des points A et B.*

4 Coordonnées du barycentre dans un repère (O, i, j)

En utilisant le théorème 29.6 avec $M = O$, on a :

$$\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{OG}.$$

On note (x_A, y_A) et (x_B, y_B) les coordonnées respectives de A et B dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a donc :

$$\overrightarrow{OA} = x_A\vec{\imath} + y_A\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB} = x_B\vec{\imath} + y_B\vec{\jmath}$$

donc :

$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{OG} = (\alpha x_A + \beta x_B)\vec{\imath} + (\alpha y_A + \beta y_B)\vec{\jmath}.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 29.12. *Les coordonnées du barycentre G de (A, α) et (B, β) sont :*

$$G\begin{pmatrix} \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta} \\ \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$$

Exemple 29.13. On veut calculer les coordonnées de G, barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$ tels que $A(1, 3)$ et $B(4, 1)$. D'après le théorème 29.12, on trouve :

$$G = \left(2, \frac{7}{3}\right).$$

5 Barycentre d'un système de n points pondérés

Le cas $n = 2$ a été traité précédemment. On s'intéresse au cas $n \geq 3$.

Définition 29.14 (Barycentre de trois points pondérés)**.** *On appelle* barycentre de trois points pondérés (A, α)*,* (B, β) *et* (C, γ) *le point* G *défini par :*

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

lorsque $alpha + \beta + \gamma \neq 0$*.*

Théorème 29.15. *Soient* α*,* β *et* γ *trois réels tels que* $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ *et* G *un point du plan. Dans ces conditions* G *est le barycentre de* (A, α)*,* (B, β)*,* (C, γ) *si et seulement si pour tout point* M *du plan :*

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}.$$

Théorème 29.16. *Soient* α*,* β *et* γ *trois réels tels que* $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ *et* G *un point du plan. Dans ces conditions,* G *est le barycentre de* (A, α)*,* (B, β) *et* (C, γ) *si et seulement si :*

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AC}.$$

Remarque 29.17. Si un coefficient est nul, $\gamma = 0$ alors G est le barycentre de (A, α) et (B, β). On a encore la propriété d'homogénéité, et les coordonnées de G se calculent à l'aide des formules suivantes :

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \end{pmatrix}$$

Théorème 29.18. *L'isobarycentre des sommets d'un triangle* ABC *est son centre de gravité* G*.*

Exemple 29.19. Soit ABC un triangle. On veut construire le barycentre G de $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

Première méthode On a :

$$2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \tag{29.1}$$

L'idée est d'introduire le point I milieu de $[BC]$. D'après le théorème 29.6 appliqué pour $M = G$, on a :

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}.$$

La relation (29.1) s'crit alors

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \vec{0}.$$

G est donc le milieu de $[AI]$.

Seconde méthode On a :

$$2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \tag{29.2}$$

On introduit le barycentre G' de $(A, 2)$ et $(B, 1)$. Alors, d'après le théorème 29.6 appliqué pour $M = G$, on a :

$$2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

La relation (29.2) s'écrit alors $3\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Donc le point G est le barycentre de $(G', 3)$ et $(C, 1)$.

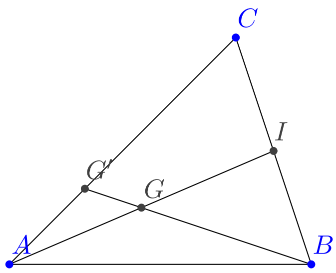


FIGURE 29.2 – Figure de l'exemple

6 Recherche de lieux géométriques

Exemple 29.20. ABC est un triangle dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 1 cm.

1. On va déterminer l'ensemble E_1 des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = 6$ cm. Pour réduire la somme vectorielle, on pose G_1 le barycentre de $(B, 1)$, $(C, 2)$ (que l'on peut construire avec $\overrightarrow{BG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$). Alors, pour tout point M :

$$\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = (1+2)\overrightarrow{MG_1} = 3\overrightarrow{MG_1}.$$

   E_1 est donc l'ensemble des points M tels que $\left\|3\overrightarrow{MG_1}\right\| = 6 \text{ cm} \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MG_1}\right\| = 2$ cm. On en déduit que E_1 est le cercle de centre G_1 et de rayon 2 cm.

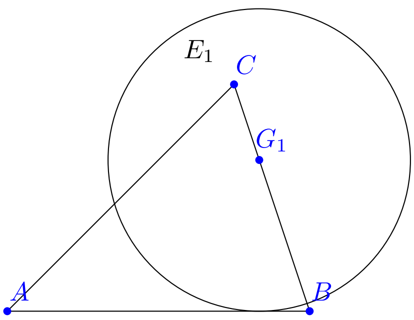


FIGURE 29.3 – Construction de l'ensemble E_1

2. Soit ABC un triangle. On va construire l'ensemble E_2 des points M tels que :

$$\left\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|.$$

   On note
   – G_2 le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, 1)$,
   – G_3 le barycentre de $(A, 1)$ et $(C, 1)$.
   Pour tout point M, on a alors :

– $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (3+1)\overrightarrow{MG_2} = 4\overrightarrow{MG_2}$,
– $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = (1+1)\overrightarrow{MG_3} = 2\overrightarrow{MG_3}$.

E_2 est donc l'ensemble des points M tels que $\left\|4\overrightarrow{MG_2}\right\| = 2\left\|2\overrightarrow{MG_3}\right\| \Leftrightarrow \|MG_2\| = \|MG_3\|$. On en déduit que E_2 est la médiatrice de $[G_2, G_3]$.

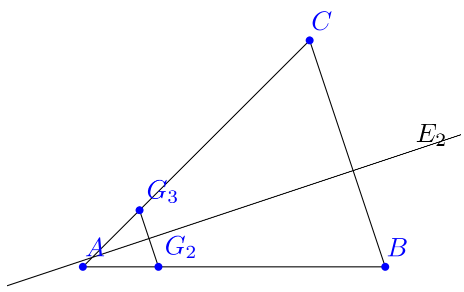


FIGURE 29.4 – Construction de l'ensemble E_2

7 Alignement de points

Théorème 29.21. *Pour prouver que trois points sont alignés il suffit de montrer que l'un peut s'exprimer comme un barycentre des deux autres.*

Exemple 29.22. Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$, K barycentre de $(A,1)$ et $(C,2)$, et J le milieu de $[IC]$. On va montrer que B, K et J sont alignés. B étant un point de la figure de base, il sera difficile de l'exprimer comme barycentre des points K et J.

Exprimer J comme barycentre de B et K Comme J est le milieu de $[IC]$ alors J est barycentre de $(I,2)$ et $(C,2)$. Comme I est le milieu de $[AB]$ alors I est le barycentre de $(A,1)$ et $(B,1)$. Donc J est aussi le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,2)$. Or, K est le barycentre de $(A,1)$ et $(C,2)$ donc on en déduit que J est le barycentre de $(K,3)$ et $(B,1)$, ce qui prouve que B, K et J sont alignés.

Exprimer K comme barycentre de B et J K est défini comme le barycentre de $(A,1)$, $(C,2)$. Il faut essayer de faire apparaître B et J. Comme aucune solution naturelle n'apparaît, on va forcer l'apparition du point B dans le système de points. On peut écrire que K est le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(B,-1)$, $(C,2)$ (ceci est vrai car :

$$\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}).$$

Comme I est le milieu de $[AB]$, on peut remplacer $(A,1)$, $(B,1)$ par $(I,2)$. Donc K est le barycentre de $(I,2)$, $(B,-1)$ et$(C,2)$. Il suffit maintenant de remplacer $(I,2)$, $(C,2)$ par $(J,4)$ car J est le milieu de $[IC]$. On obtient finalement que K est le barycentre de $(J,4)$, $(B,-1)$ et donc les points B, K et J sont alignés.

8 Droites concourantes

Théorème 29.23. *Pour prouver que les droites (AB), (CD) et (EF) sont concourantes, il suffit de montrer qu'un certain point G peut être obtenu comme un barycentre de A et B, puis comme barycentre de C et D et enfin comme un barycentre de E et F (ainsi on aura prouver que G appartient aux trois droites).*

Exemple 29.24. Soit ABC un triangle, P le barycentre de $(A,1)$, $(C,2)$, Q le barycentre de $(A,2)$, $(B,1)$ et R le barycentre de $(B,1)$, $(C,4)$. Il s'agit de montrer que les droites (AR), (BP) et (CQ) sont concourantes.

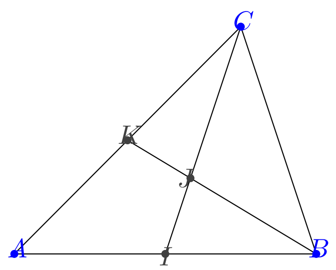


FIGURE 29.5 – Figure de l'exemple

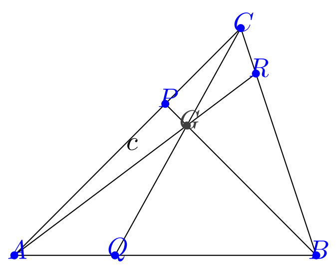


FIGURE 29.6 – Figure de l'exemple

Soit G le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 4)$. R est le barycentre de $(B, 1), (C, 4)$ donc G est aussi le barycentre de $(A, 2), (R, 5)$. G est donc bien sur la droite (AR).

P est le barycentre de $(A, 1), (C, 2)$ donc celui aussi de $(A, 2), (C, 4)$. Ainsi, G est aussi le barycentre de $(P, 6), (B, 1)$, ce qui prouve qu'il appartient à la droite (PB).

Q est le barycentre de $(A, 2), (B, 1)$ donc G est aussi le barycentre de $(Q, 3), (C, 4)$. G est donc bien aussi sur la droite (QC).

Le point G appartient aux trois droites, ce qui prouve qu'elles sont bien concourantes.

Compléments

Démonstration du théorème 29.6.

– Si G est le barycentre de (A, α) et (B, β) alors d'après la relation de Chasles :

$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MG} + \beta\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{MB} + \beta\overrightarrow{BG}$$

et puisque, par hypothèse $\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{BG} = \vec{0}$, il vient :

$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MG}.$$

– Réciproquement, on suppose que pour tout point M du plan :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}.$$

Alors, en particulier pour $M = G$, on a :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Comme $\alpha + \beta \neq 0$, ceci signifie bien que G est le barycentre de (A, α) et (B, β).

□

Démonstration du théorème 29.7.

– Si G est le barycentre de (A, α) et (B, β) alors on utilise le théorème 29.6 avec $M = A$, ce qui dont :

$$\beta\overrightarrow{AB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{AG}.$$

Puis, on divise par $\alpha + \beta$ qui est non nul :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}.$$

– Réciproquement, si on a la relation $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ alors on peut écrire :

$$\beta\overrightarrow{AB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \beta\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{GB} = \alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Comme $\alpha + \beta \neq 0$, ceci signifie bien que G est le barycentre de (A, α) et (B, β).

□

Démonstration du théorème 29.8. Soit k un réel non nul ; la relation $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ (avec $\alpha + \beta \neq 0$) est bien équivalente à la relation $k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ (puisque $\alpha + \beta \neq 0$ équivaut ici à $k\alpha + k\beta \neq 0$) qui signifie bien que G est le barycentre de $(A, k\alpha)$ et $(B, k\beta)$. □

Démonstration du théorème 29.10. Supposons $\alpha \neq 0$. Les relations suivantes sont alors équivalentes :

(i) G est le barycentre de (A, α) et (B, β)

(ii) G est le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, \frac{\beta}{\alpha})$

On a alors :

$$\overrightarrow{AG} + \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{BG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{GB}.$$

– Si α et β sont du même signe alors $\frac{\beta}{\alpha} > 0$, donc $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont de même sens : $G \in [AB]$
– Si α et β sont de signes opposés alors $\frac{\beta}{\alpha} < 0$ donc $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont de sens opposés : $G \notin [AB]$.

□

Démonstration du théorème 29.11. $\alpha\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$. □

Démonstration du théorème 29.15. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
&G \text{ est le barycentre de } (A,\alpha),\ (B,\beta),\ (C,\gamma)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}\\
\Leftrightarrow\ &\alpha\overrightarrow{GM} + \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{GM} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{GM} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}\\
\Leftrightarrow\ &\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}.
\end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème 29.16. On utilise le théorème 29.15 avec $M = A$. □

Démonstration du théorème 29.18. $\alpha\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{GB} + \alpha\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ avec $\alpha \neq 0$ équivaut à $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. □

LEÇON

30 Produit scalaire

Niveau, prérequis, références

Niveau Première S

Prérequis Vecteur, norme d'un vecteur

Références [78, 79, 80]

Contenu de la leçon

1 Définition

Définition 30.1 (Produit scalaire). *On appelle* produit scalaire *des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le nombre réel défini par :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 .\right]$$

Remarque 30.2. Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Théorème 30.3. *Si $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormée (c'est-à-dire $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormale) et si $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ alors :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Exemple 30.4. Soit $\vec{u} = (3, -1)$ et $\vec{v} = (2, 6)$ alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + (-1) \times 6 = 6 - 6 = 0.$$

On dira que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2 Propriétés

Propriétés 30.5. *Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:*

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{0} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{0} = 0$
3. *Pour tout réel k,* $k\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$
4. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
5. $\vec{u} \cdot \vec{u}$ *est noté* $\vec{u}^2$ *est appelé carré scalaire de* $\vec{u}$.
6. $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ *(carré de la longueur du vecteur $\vec{u}$)*
7. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ *(cela signifie que* $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}$*)*
8. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
9. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Propriété 30.6. *Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à dire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.*

Remarque 30.7. Si on note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 \Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

3 Autres expressions du produit scalaire

Théorème 30.8. *Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Propriété 30.9. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls* colinéaires *:*

1. *S'ils ont même sens alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$*
2. *S'ils ont sens contraire alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.*

Exemple 30.10. Si $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{v}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 = 6$.

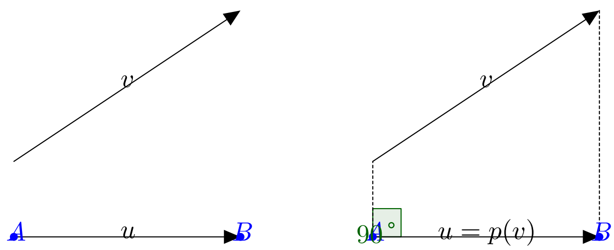


FIGURE 30.1 – Projection orthogonale de v sur une droite portant u

Propriété 30.11. *Etant donné deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si on note $p(\vec{v})$, la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur une droite portant $\vec{u}$ alors on a :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot p(\vec{v}).$$

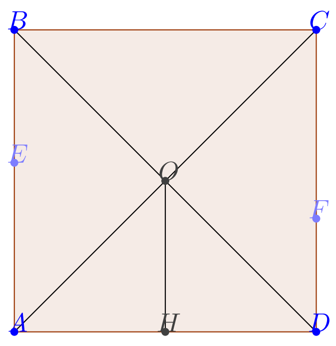


FIGURE 30.2 – Figure de l'exemple

Exemple 30.12.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ car $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = -3 \times 3 = -9$ car $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires et de sens contraires.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = 3 \times 1,5 = 4,5$ car le projeté orthogonale de $\overrightarrow{AO}$ sur (AD) est $\overrightarrow{AH}$ et que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens.
- Les produits scalaires $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EF}$ sont tous égaux entre eux. En effet, si on projette orthogonalement $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sur (AD), on obtient à chaque fois $\overrightarrow{AD}$. Donc tous ces produits scalaires sont égaux à $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \times 3 = 9$.

4 Applications

4.1 Vecteur normal à une droite

Définition 30.13. *On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ est normal à une droite $\mathcal{D}$ si $\vec{n} \neq \vec{0}$ et si $\vec{n}$ est orthogonal à la direction de $\mathcal{D}$.*

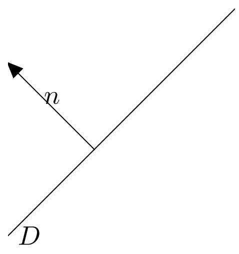


FIGURE 30.3 – Le vecteur n est normale à la droite D

Théorème 30.14. *Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$*

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{0}.$$

Théorème 30.15. *Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $ux + vy + w = 0$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le vecteur $\vec{n}(u, v)$ est normal à $\mathcal{D}$.*

4.2 Relations dans un triangle

Théorème 30.16 (Formule d'Al-Kashi)**.** *Dans un triangle ABC,*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}.$$

Théorème 30.17 (Formule des 3 sinus)**.** *Soit ABC un triangle (on note $a = BC$, $b = AC$, $c = BA$), S l'aire de ce triangle et R le rayon du cercle circonscrit au triangle :*

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R.$$

4.3 Relations et équations trigonométriques

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires dans une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tels que $(\vec{\imath}, \vec{u}) = b$ et $(\vec{\imath}, \vec{v}) = a$. On a

$$\vec{u} = \cos b \cdot \vec{\imath} + \sin b \cdot \vec{\jmath} = \cos a \cdot \vec{\imath} + \sin a \cdot \vec{\jmath}.$$

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. De plus, $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{\imath}, \vec{v}) - (\vec{\imath}, \vec{u}) = a - b$. Donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(a - b).$$

D'où :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

En remplaçant a par $\frac{\pi}{2} - a$, on obtient :

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

À partir de ces formules, on déduit les suivantes :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b\\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a\\ \sin 2a &= 2\sin a \cos a\\ \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a.\end{aligned}$$

On a aussi

$$\cos X = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} X = \alpha + 2k\pi \\ X = -\alpha + 2k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin X = \sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} X = \alpha + 2k\pi \\ X = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

4 4 Recherche de lieux géométriques

1. On cherche tout d'abord l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$.

Propriété 30.18. *Soit I le milieu du segment $[AB]$ (avec $A \neq B$). Pour tout point M, on a :*

$$MA^2 + MB^2 = 2IM^2 + \frac{AB^2}{2} \quad \textit{(Théorème de la médiane)}.$$

Etant donné un réel k, on en déduit que l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$ est un cercle, ou un point ou l'ensemble vide.

Exemple 30.19. Soit A et B deux points tels que $AB = 2$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 20$. On utilise le théorème de la médiane :

$$MA^2 + MB^2 = 20 \Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{AB^2}{2} = 20 \Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{4}{2} = 20 \Leftrightarrow IM^2 = 9 \Leftrightarrow IM = 3$$

(car $IM > 0$). L'ensemble E est donc le cercle de centre I et de rayon 3.

2. On cherche à déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$. Pour cela, on décompose $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en passant par I le milieu de $[AB]$.

Exemple 30.20. Soit A et B deux points tels que $AB = 4$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12$.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 12.$$

Or, $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$. On a donc :

$$(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = 12 \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 12 \Leftrightarrow MI^2 - 2^2 = 12.$$

On en déduit que $M \in E \Leftrightarrow MI^2 = 16 \Leftrightarrow MI = 4$. E est donc le cercle de centre I et de rayon 4

3. On cherche à déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k$. Pour cela, on cherche un point particulier H appartenant à l'ensemble. On a alors $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = k$. Ainsi,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}) \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \perp \vec{u}.$$

L'ensemble est alors la droite passant par H de vecteur normal $\vec{u}$.

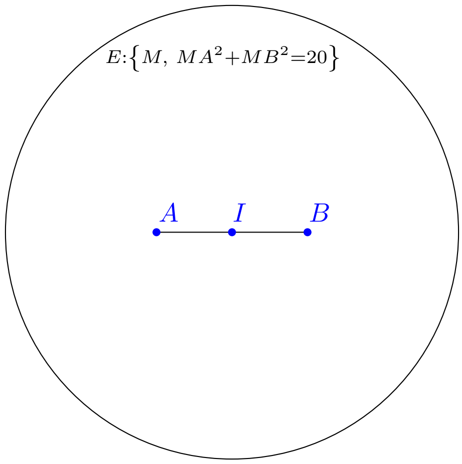


FIGURE 30.4 – Construction de l'ensemble E de l'exemple 30.19

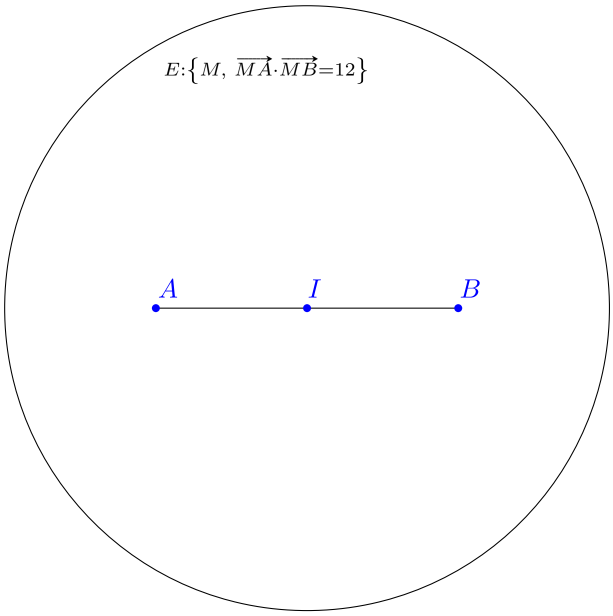


FIGURE 30.5 – Construction de E de l'exemple 30.20

Exemple 30.21. Soit A et B deux points tels que $AB = 3$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -6$. Soit H le point de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient de sens contraires et tel que $AH \times AB = 6 \Leftrightarrow AH = \frac{6}{3} = 2$. Ainsi, on a bien $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = -6$. Dès lors :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -6 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \perp \overrightarrow{AB}.$$

L'ensemble E est alors la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.

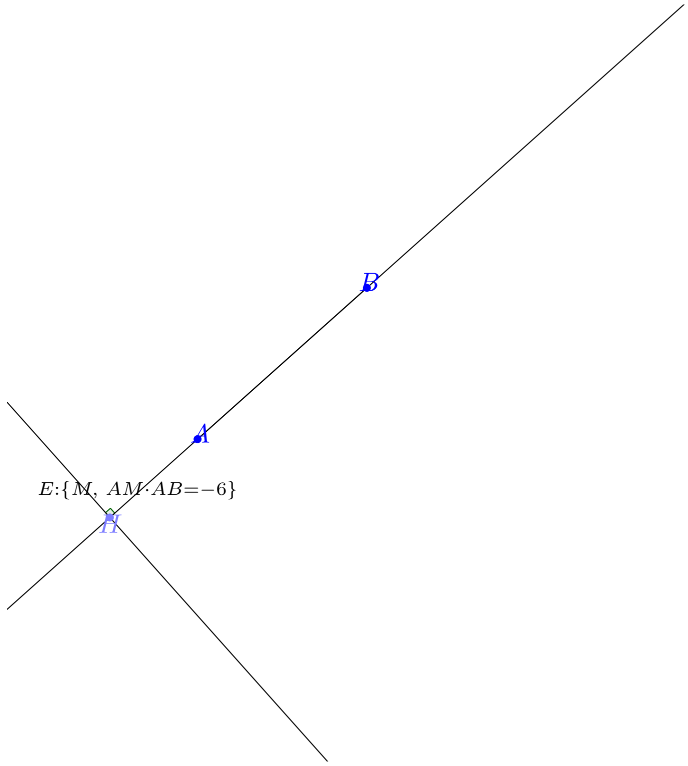


FIGURE 30.6 – Construction de E de l'exemple 30.21

Compléments

Démonstration du théorème 30.3. On a : $\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y')$ et donc :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2.$$

D'où :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left[(x + x')^2 + (y + y')^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)\right] = xx' + yy'.$$

□

Démonstration des propriétés 30.5-1, 30.5-3 et 30.5-4. 1. D'après la définition du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right] = \left[\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\right] = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

3. On se donne un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et trois vecteurs $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3)$. On utilise la formule du théorème 30.3 :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3 \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + x_1x_3 + y_1y_3 = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.\end{aligned}$$

4. De même,

$$\begin{aligned}(k\vec{u})\cdot\vec{v} &= kx_1x_2 + ky_1y_2 = kx_2x_1 + ky_2y_1 = \vec{u}\cdot(k\vec{v})\\ &= kx_1x_2 + ky_1y_2 = k(x_1x_2 + y_1y_2) = k\times(\vec{u}\cdot\vec{v}).\end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème 30.16. Si on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on a :

$$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}) = c^2 + b^2 + 2b\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$$

Or $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = \cos[\pi + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})] = -\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\cos\widehat{A}$. □

Démonstration du théorème 30.17. On note H le pied de la hatueur issue de A dans le triangle ABC.

– Dans le cas où $\widehat{B}$ est obtus, $AH = AB\sin(\pi - \widehat{B}) = AB\sin\widehat{B} = c\sin\widehat{B}$.
– Dans le cas où $\widehat{B}$ est aigu, $AH = AB\sin\widehat{B} = c\sin\widehat{B}$.

Donc, dans tous les cas, $AH = c\sin\widehat{B}$ et $S = \frac{1}{2}BC\cdot AH = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$. D'où

$$S = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}.$$

□

LEÇON

31 Théorème de Thalès

Niveau, prérequis, références

Niveau Troisième

Prérequis Géométrie du triangle, théorème de la droite des milieux

Références [81, 82, 83]

Contenu de la leçon

1 Thalès de Milet

Thalès est un mathématicien grec qui aurait vécu au VI^e^ siècle avant Jésus-Christ. Nous ne le connaissons qu'à travers les écrits de Sophocle, de Pappus et d'autres. On peut en fait seulement lui attribuer les quatre résultats mathématiques suivant :

1. Deux angles opposés par le sommet sont de même mesure.
2. Le diamètre d'un cercle coupe ce même cercle en deux parties de même aire.
3. Les angles à la base d'un triangle isocèle sont de la même mesure.
4. Si un triangle est inscrit dans un cercle tel que l'un de ses côtés soit le diamètre de ce cercle alors ce triangle est rectangle.

A la fin du 19^e^ siècle, une épreuve d'histoire des mathématiques avait été introduite dans les épreuves de recrutement des professeurs de mathématiques. Il était bien vu à cette époque d'associer à chaque théorème son auteur. Le théorème que nous allons présenter dans cette leçon a été trop rapidement attribué à Thalès mais néanmoins on a conservé par habitude cette dénomination.

2 Le théorème (ou propriété) de Thalès

Définition 31.1. *Soit (d) et (d') deux droites sécantes en A. B et M sont deux points de la droite (d) distincts de A. C et N sont 2 points de la droite (d'), distincts de A. Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors :*

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Remarques 31.2. 1. On peut utiliser le théorème de Thalès dans les trois configurations de la figure 31.1.

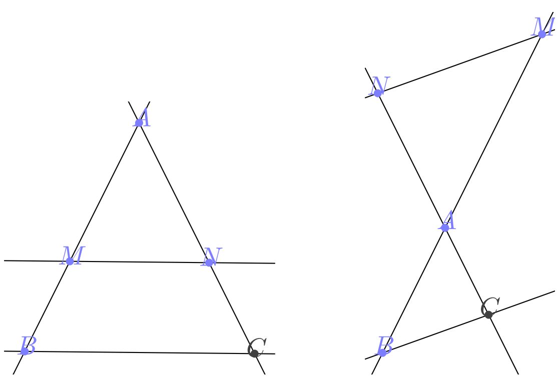


FIGURE 31.1 – Trois configurations pour le théorème de Thalès : configuration vue en classe de quatrième, configuration dite « papillon », configuration extérieure

2. Dans le cas où M est le milieu de $[AB]$ et N est le milieu de $[AC]$, on se retrouve dans la configuration de la réciproque du théorème de la droite des milieux.

Exemple 31.3. Thalès se serait servi du théorème précédent pour mesure la hauteur d'une pyramide. Voici comment il aurait procédé :

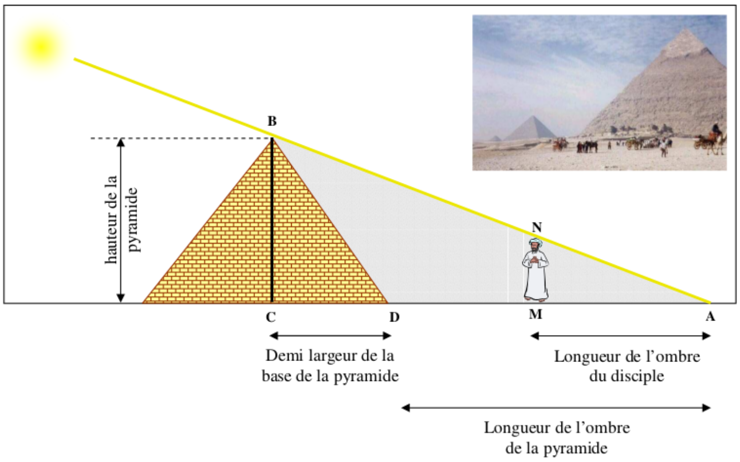


FIGURE 31.2 – Mesure de la pyramide

A un moment ensoleillé de la journée, Thalès place un de ses disciples de telle sorte que son ombre coïncide avec celle de la pyramide comme sur le schéma. Il prend alors les mesures suivantes :

$$CD = 115 \text{ m}, \ DM = 163,4 \text{ m}, \ AM = 3,5 \text{ m}, \ MN = 1,8 \text{ m}$$

Il effectue alors le raisonnement suivant :

Dans le triangle ABC, on a :

$$\begin{cases} N \in [AB] \\ M \in [AC] \\ (MN)//(BC) \end{cases}$$

D'après le théorème de Thalès, on a donc :

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} = \frac{MN}{BC}.$$

D'où

$$\frac{3,5}{AC} = \frac{AN}{AB} = \frac{1,8}{BC}$$

Or $AC = AM + MD + CD = 3,5 + 163,4 + 115 = 281,9$ m. D'où :

$$\frac{3,5}{281,9} = \frac{1,8}{BC} \Leftrightarrow 3,5 \times BC = 507,42 \Leftrightarrow BC = 145,0 \text{ (à 0,1 près)}.$$

La pyramide a donc une hauteur de 145 m à 10 cm près.

3 La réciproque du théorème de Thalès

Théorème 31.4. *Soit (d) et (d') deux droites sécantes en A. B et M sont 2 points de la droite (d), distincts de A. C et N sont 2 points de la droite (d'), distincts de A. Si*

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

et les points A, M, B sont alignés dans le même ordre que les points A, N, C alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Remarque 31.5. La réciproque de Thalès correspond dans le cas où $\frac{SN}{SB} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2}$ au théorème de la droite des milieux.

Exemples 31.6.

1. Dans la figure 31.3 ($AN = 5,4$ cm, $AB = 9$ cm, $AC = 12,5$ cm, $AN = 7,5$ cm), est-ce que les droites (MN) et (BC) sont parallèles ? Dans le triangle ABC, M est un

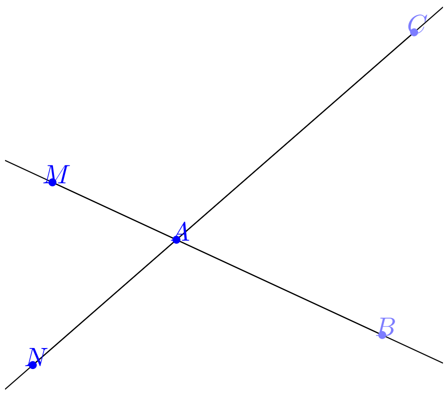


FIGURE 31.3 – Figure de l'exemple 1

point de la droite (AB) et N point de la droite (AC).

$$\frac{AM}{AB} = \frac{5,4}{9} = 0,6 \quad \text{et} \quad \frac{AN}{AC} = \frac{7,5}{12,5} = 0,6 = \frac{AM}{AB}.$$

De plus, les points A, M, B sont alignés dans le même ordre que les points A, N, C. Donc les droites (MN) et (BC) sont parallèles d'après la réciproque du théorème de Thalès.

2. Dans la figure 31.4 ($AM = 11,9$, $AN = 18,2$, $AC = 52$, $AB = 35$), est-ce que les droites (MN) et (BC) sont parallèles ? Dans le triangle ABC, M est n point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC).

$$\frac{AM}{AB} = \frac{11,9}{35} = 0,34 \quad \text{et} \quad \frac{AN}{AC} = \frac{18,2}{52} = 0,35$$

Ainsi, $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$. Donc les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Compléments

1 Démonstration du théorème de Thalès

Pour démontrer le théorème de Thalès, on aura besoin de deux lemmes.

Lemme 31.7. *Si deux triangles ont un côté commun et si les troisièmes sommets sont sur une parallèle à ce côté commun, alors ils ont la même aire.*

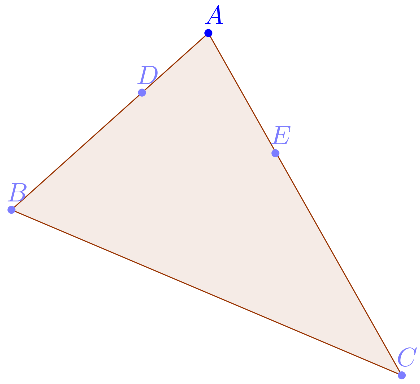


FIGURE 31.4 – Figure de l'exemple 2

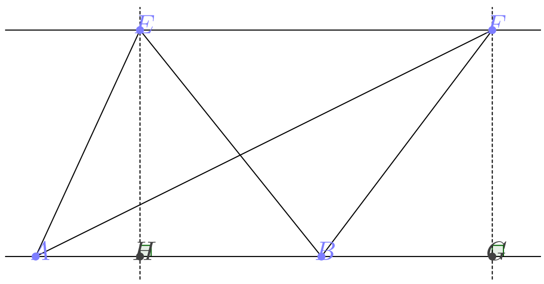


FIGURE 31.5 – Triangles de même aire

Démonstration du lemme 31.7. Soient $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites, $(EH) \perp (\mathcal{D})$ et $(FG) \perp (\mathcal{D}')$. $EFGH$ est un rectangle car ses côtés sont parallèles deux à deux et il a au moins deux angles droits. Donc ses côtés opposés ont même longueur ; en particulier $EH = FG$.

EH est la hauteur relative à $[AB]$ dans le triangle EAB et FG est la hauteur relative à $[AB]$ dans le triangle FAB.

L'aire du triangle ne dépend que de la longueur du côté et de la longueur de la hauteur relative à ce côté. Pour les triangles EAB et FAB, ces longueurs sont égales, donc ils ont la même aire. □

Lemme 31.8. *Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a+c}{b+d}$ est un troisième rapport égal aux deux premiers.*

Démonstration du lemme 31.8. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $ad = bc$. Si $ad = bc$ alors $ad + cd = bc + cd$ (on ajoute un même nombre aux deux membres). D'où :

$$d(a+c) = c(b+d)$$

et en appliquant inversement la règle des produits en croix :

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}.$$

Conclusion : Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. □

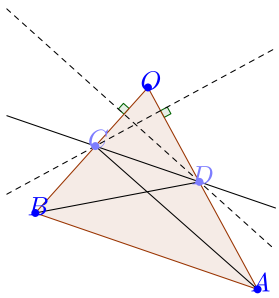


FIGURE 31.6 – h_1 la hauteur issue de D dans le triangle OCD, h_2 la hauteur issue de C dans le triangle OCD

Démonstration du théorème de Thalès. Sur la figure 31.7, $(CD)//(AB)$. On peut appliquer le lemme 31.7 pour affirmer que ACD et BCD ont la même. On note $A(OCD)$, par exemple, l'aire du triangle OCD. En ajoutant à chacune de ces deux aires celle du triangle OCD, on obtient que les triangles ODA et OCB ont la même aire. On en déduit que :

$$\frac{A(OCD)}{A(OAD)} = \frac{A(OCD)}{A(OCB)}.$$

Soit h_1 la hauteur issue de D dans le triangle OCD et h_2 la hauteur issue de C dans le triangle OCD :

$$\frac{A(OCD)}{A(OAD)} = \frac{OC \times \frac{h_1}{2}}{OA \times \frac{h_1}{2}} = \frac{OC}{OA}$$
$$\frac{A(OCD)}{A(OCB)} = \frac{OD \times \frac{h_2}{2}}{OB \times \frac{h_2}{2}} = \frac{OD}{OB}.$$

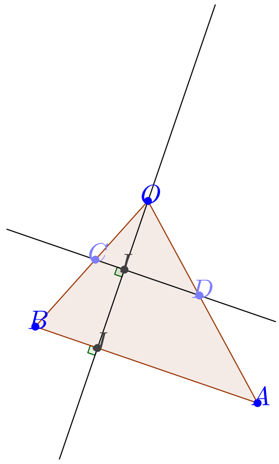


FIGURE 31.7 – Soit la hauteur issue de O du triangle OAB, I intersection de cette hauteur avec (CD) et J intersection de cette hauteur avec (AB)

Conclusion : $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}$.

Les triangles IJD et IDB ont la même aire (lemme 31.7). Donc les triangles OJD et OIB ont la même aire :

$$A(OJD) = \frac{1}{2} \times OJ \times OI \quad \text{et} \quad A(OIB) = \frac{1}{2} \times OI \times BJ.$$

D'où : $OJ \times DI = OI \times BJ$ et $\frac{OI}{OJ} = \frac{DI}{BJ}$. De la même manière dans les triangles OIA et OCJ, on obtient $\frac{OI}{OJ} = \frac{CI}{AJ}$. D'après le lemme 31.8, si

$$\frac{OI}{OJ} = \frac{DI}{BJ} = \frac{CI}{AJ}$$

alors

$$\frac{OI}{OJ} = \frac{DI}{BJ} = \frac{CI}{AJ} = \frac{DI + CI}{BJ + AJ} = \frac{DC}{AB}.$$

D'après ce qui précède, on a alors :

$$\frac{OI}{OJ} = \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}.$$

Conclusion :

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{DC}{AB}.$$

□

LEÇON

32 Trigonométrie

Niveau, prérequis, références

Niveau Troisième et Première S
Prérequis Géométrie du triangle, théorème de Pythagore, notion de fonction, produit scalaire.
Références [84, 85]

Contenu de la leçon

1 De la trigonométrie vue en classe de troisième

1.1 Définitions

Définition 32.1. *Dans un triangle ABC rectangle en A, on définit le* sinus, *le* cosinus *et la* tangente *de l'angle aigu $\widehat{ABC}$ de la manière suivante :*

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$
$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$
$$\tan \widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB}.$$

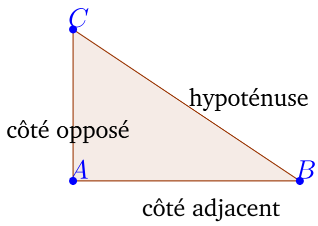


FIGURE 32.1 – Côté opposé, côté adjacent à un angle, hypoténuse

Remarque 32.2. On a aussi avec l'angle $\widehat{ACB}$:

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC}, \ \sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC}, \ \tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}.$$

Propriété 32.3. *Le sinus et le cosinus d'un angle aigu sont strictement plus grands que 0 et strictement plus petits que 1 et ils n'ont pas d'unité.*

Remarque 32.4 (Sur la calculatrice (Casio FX-92)).
1. Lorsque l'on connaît le sinus d'un angle, on peut trouver la mesure de cet angle en utilisant les touches : [Shift] - [sin] .
2. Lorsque l'on connaît le cosinus d'un angle, on peut trouver la mesure de cet angle en utilisant les touches : [Shift] - [cos] .
3. Lorsque l'on connaît le tangente d'un angle, on peut trouver la mesure de cet angle en utilisant les touches : [Shift] - [tan] .

Exemples 32.5 (Connaissant sinus, cosinus et tangente).

1. Si $\sin \widehat{ABC} = 0,8$ et $\widehat{ABC}$ est un angle aigu alors $\widehat{ABC} = 53,13$ degrés à $0,01$ près.
2. Si $\cos \widehat{ABC} = 0,5$ et $\widehat{ABC}$ est un angle aigu alors $\widehat{ABC} = 60$ degrés.
3. Si $\tan \widehat{ABC} = 0,2$ et $\widehat{ABC}$ est un angle aigu alors $\widehat{ABC} = 11,30$ degrés à $0,01$ près.

1 2 Formules de trigonométrie

Propriété 32.6. *Pour toutes valeurs de x, on a :*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{et} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

1 3 Quelques exemples

Exemples 32.7.

1. Soit DEF un triangle rectangle en D tel que $\widehat{DEF} = 30^\circ$ et $DF = 5$. Quelle est la mesure de EF?. Comme DEF est un triangle rectangle en D :

$$\begin{aligned} \sin \widehat{DEF} &= \frac{DE}{DF} \\ \sin 30 &= \frac{DE}{5} \\ DE &= 5 \times \sin 30 \\ DE &= 2,5 \end{aligned}$$

2. ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 5$ ET $Ac = 7$. On veut déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ à $0,01$ près. Comme ABC est un triangle rectangle en A.

$$\begin{aligned} \tan \widehat{ABC} &= \frac{AC}{AB} \\ \tan \widehat{ABC} &= \frac{7}{5} \\ \widehat{ABC} &= 50,19 \text{ degrés à 0,01 près.} \end{aligned}$$

La dernière étape est faite grâce à la calculatrice (en tapant les touches [Shift] - [tan] .

2 De la trigonométrie vue en classe de Première S

2 1 Le radian

Définition 32.8 (Radian)**.** *Le radian est une unité de mesure des angles choisie de façon que l'angle plat (180°) mesure π radians.*

Remarque 32.9. Pour trouver la mesure d'un angle de x degrés, on a recours à un tableau de proportionnalité.

degrés	180	x
radians	π	α

Exemple 32.10. Un angle de 60° vaut en radians :

$$\alpha = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

2.2 Cercle trigonométrique

Définition 32.11 (Cercle trigonométrique)**.** *Si on muni le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le* cercle trigonométrique *est le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct (sens contraire des aiguilles d'une montre).*

Soit M un point du cercle tel que α soit une mesure (en radians) de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

Définition 32.12 (Sinus et cosinus)**.** *On appelle* cosinus *et* sinus *de α et on note $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, les coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:*

$$\overrightarrow{OM} = (\cos\alpha)\overrightarrow{OI} + (\sin\alpha)\overrightarrow{OJ}.$$

Soit Δ la droite (verticale) d'équation $x = 1$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et H le point défini par $(OM) \cap \Delta$. Ce point H existe dès lors que Δ et (OM) ne sont pas parallèles, c'est-à-dire dès que M n'est ni en $J(0, 1)$, ni en $J'(0, -1)$, c'est-à-dire dès que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Définition 32.13 (Tangente)**.** *On appelle* tangente *de α et on note $\tan\alpha$, l'ordonnée du point H dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.*

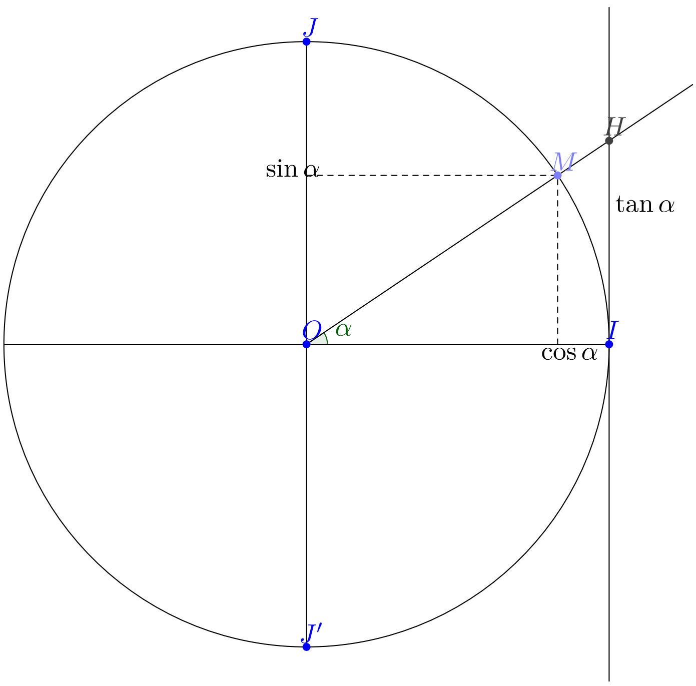


FIGURE 32.2 – Cercle trigonométrique, cosinus, sinus et tangente d'un angle

La table 32.1 rappelle les valeurs remarquables du cosinus, du sinus et de la tangente.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

TABLE 32.1 – Valeurs remarquables

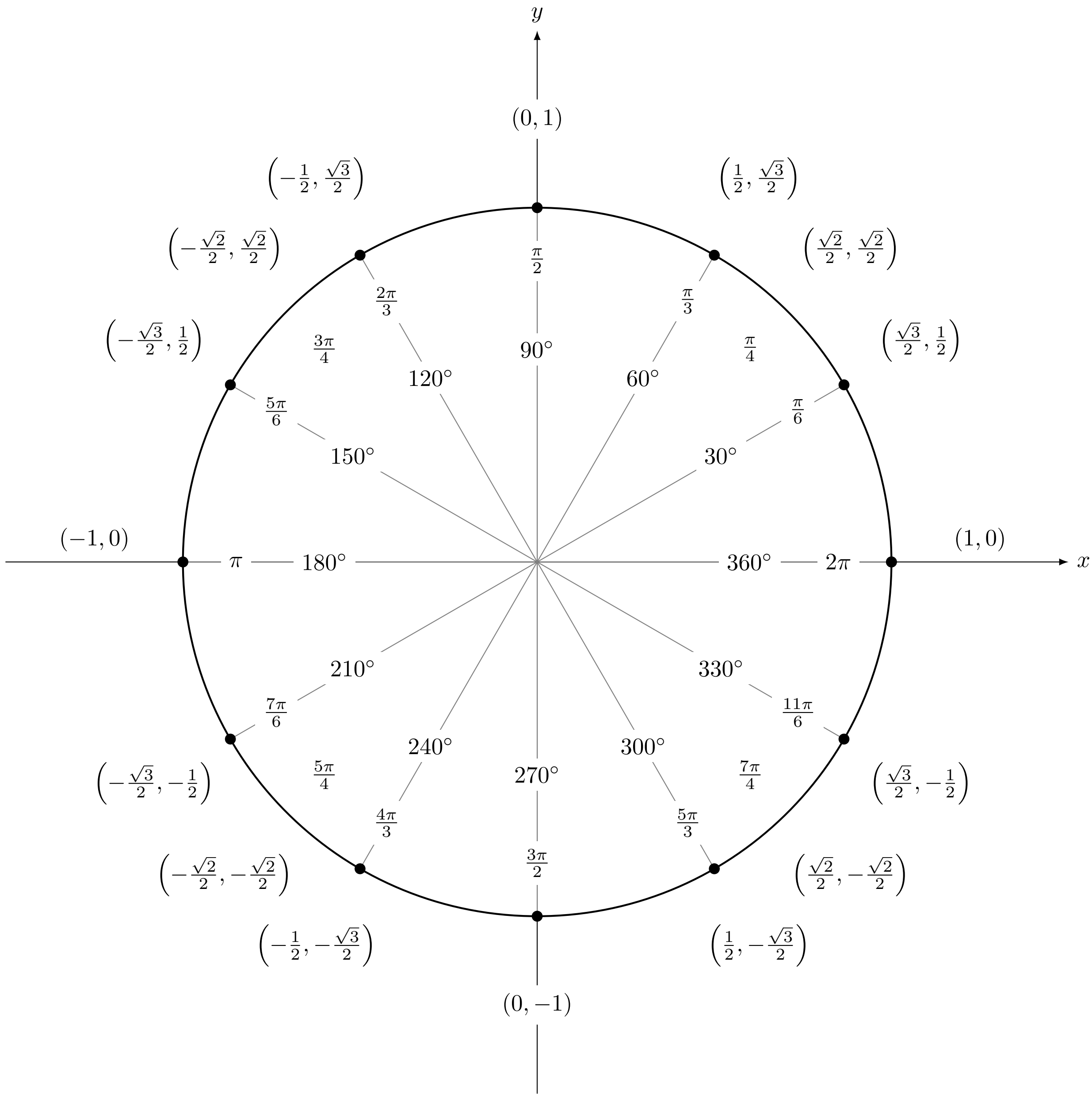


FIGURE 32.3 – Cercle trigonométrique et quelques valeurs remarquables

Propriété 32.14 (Sinus et cosinus).

1. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$
2. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$
3. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
4. $-1 \leq \cos x \leq 1$
5. $-1 \leq \sin x \leq 1$

Exemple 32.15. On admet que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, on veut calculer la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{12}$. On utilise la relation 3 :

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} = 1.$$

On calcule $\cos^2 \frac{\pi}{12}$:

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{6 + 2\sqrt{12} + 2}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

D'où :

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

Or $\sqrt{A^2} = |A|$ donc :

$$\left|\sin \frac{\pi}{12}\right| = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}.$$

Or, $\sin \frac{\pi}{12} \geq 0$ car $\frac{\pi}{12} \in [0\,,\pi]$. Donc :

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}.$$

2 3 Fonction sinus et cosinus

Définition 32.16 (Fonction périodique). *Une fonction f est dite* périodique *de période T si pour tout réel x, on a : $f(x+T) = f(x)$.*

Pour étudier une fonction périodique, on se limite à une période car :

$$\cdots = f(x+2T) = f(x+T) = f(x) = f(x-T) = f(x-2T) = \cdots$$

Théorème 32.17. *Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π. De plus, la fonction cosinus est paire ($\cos(-x) = \cos x$) et la fonction sinus est impaire ($\sin(-x) = -\sin x$).*

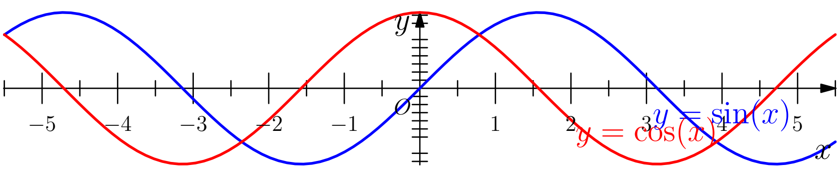


FIGURE 32.4 – Représentation graphique de $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$

2.4 Résolution des équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$ ($x \in \mathbb{R}$)

- Si $a \notin [-1\,,1]$ alors ces équations n'ont pas de solutions (car $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$)
- Si $a \in [-1\,,1]$, elles ont une infinité

  Pour $\cos x = a$ on résout déjà l'équation sur l'intervalle $[0\,,2\pi]$ en cherchant à l'aide du cercle trigonométrique les deux angles α et $-\alpha$ dont le cosinus vaut a. On trouve les solutions de l'équation en ajoutant les multiples de 2π.

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

  Pour $\cos x = a$ on résout déjà l'équation sur l'intervalle $[0\,,2\pi]$ en cherchant à l'aide du cercle trigonométrique les deux angles α et $\pi - \alpha$ dont le sinus vaut a. On trouve les solutions de l'équation en ajoutant les multiples de 2π.

$$\sin x = a \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2.5 Angles associés

Propriétés 32.18. *On a les propriétés suivantes :*

1. $\cos(-x) = \cos x$,
2. $\sin(-x) = \sin x$,
3. $\cos(\pi - x) = -\cos x$,
4. $\sin(\pi - x) = \sin x$,
5. $\cos(\pi + x) = -\cos x$,
6. $\sin(\pi + x) = -\sin x$
7. $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$,
8. $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$,
9. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$,
10. $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$.

2.6 Formules trigonométriques

Proposition 32.19 (Formules d'addition).

1. $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$,
2. $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,
3. $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$,
4. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Proposition 32.20 (Formules de duplication).

1. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$,
2. $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$.

Proposition 32.21 (Formule de linéarisation).

1. $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$,
2. $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$.

Exemple 32.22. On va calculer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{8}$, $\sin \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$. En utilisant les formules de linéarisation :

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

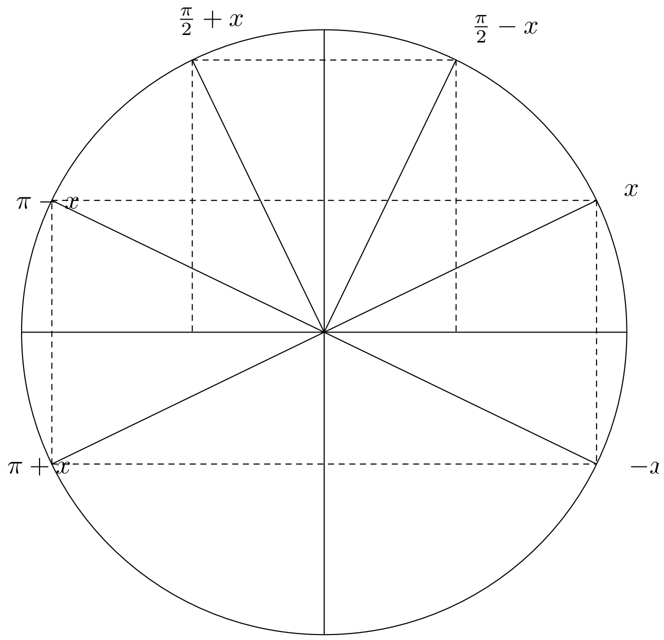


FIGURE 32.5 – Angles associés

et comme $\cos\frac{\pi}{8}>0$, il vient $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

et comme $\sin\frac{\pi}{8}>0$, il vient $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. D'où :

$$\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}.$$

Or :

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\frac{6-4\sqrt{2}}{4-2}=3-2\sqrt{2}=1-2\sqrt{2}+2=(1-\sqrt{2})^2.$$

D'où :

$$\tan\frac{\pi}{8}=\left|1-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-1.$$

En utilisant les formules d'addition :

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$

D'où

$$\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\frac{8-2\sqrt{12}}{6-2}=2-\sqrt{3}.$$

Démonstration de la propriété 32.6. On se place dans le cas où x est une valeur strictement compris entre 0 et 90 degrés. Prenons un triangle ABC rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = x$. On a alors :

$$\cos x = \frac{AB}{BC}, \ \sin x = \frac{AC}{BC}, \ \tan x = \frac{AC}{BC}.$$

Ainsi,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}.$$

On sait que le triangle ABC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$. D'où :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{BC^2}{BC^2} = 1.$$

De plus :

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{BC} \times \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB} = \tan x.$$

□

Calcul de valeurs remarquables. Pour calculer les valeurs de $\sin\frac{\pi}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{4}$, on exploite la diagonale du carré (de côté 1). Dans le triangle ABC rectangle en B, on a :

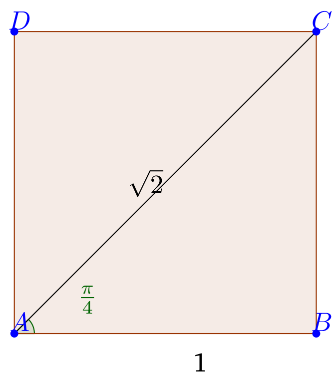


FIGURE 32.6 – Carré de côté 1

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{BC}{AB} = 1.$$

Pour calculer les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, on exploite naturellement la configuration du triangle équilatéral de côté 1 avec une de ses hauteurs qui, d'après le théorème de Pythagore, mesure $\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Dans le triangle AHC rectangle en H, on a :

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2}, \ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \tan\frac{\pi}{6} = \frac{AH}{CH} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

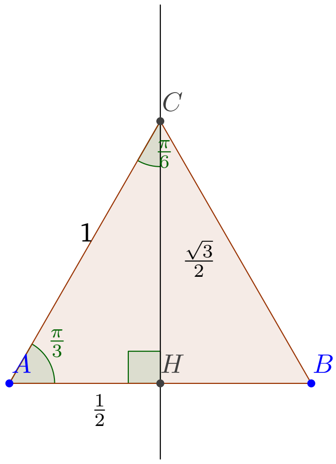


FIGURE 32.7 – Triangle équilatéral de côté 1

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\frac{\pi}{3} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2},\ \tan\frac{\pi}{3} = \frac{CH}{AH} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

□

Démonstration des propriétés 32.18. Les relations $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$ s'obtiennent immédiatement par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

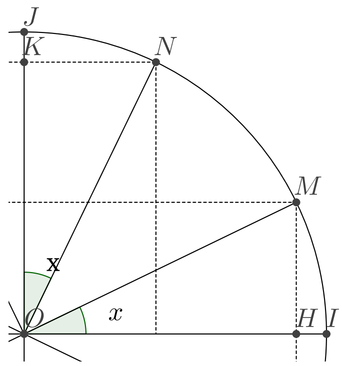
Supposons tout d'abord que x est un angle aigu (c'est-à-dire $x \in [0\,,\frac{\pi}{2}]$. On montre les relations :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

On note I, J, M et N les points du cercle trigonométrique correspondants aux angles de 0, $\frac{\pi}{2}$, x et $\frac{\pi}{2} - x$ radians respectivement. Notons H (resp. K) le projeté orthogonal de M (resp. N) sur l'axe des abscisses (resp. ordonnées). D'après la relation de Chasles sur les angles :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OJ}) \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - x + (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OJ}) \pmod{2\pi} \Leftrightarrow (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OJ}) = x \pmod{2\pi}.$$

Les coordonnées du point M sont $M(\cos x, \sin x)$, celles du point N sont : $N(\cos(\frac{\pi}{2} - x), \sin(\frac{\pi}{2} - x))$.



Comme x est un angle aigu, toutes ces coordonnées sont positives et :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = KN \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = OK.$$

Mais par ailleurs, d'après les relations métriques dans le triangle ONK rectangle en K, on a :

$$\cos x = OK \quad \text{et} \quad \sin x = KN.$$

D'où les relations : $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$. Les autres relations se démontrent de manière analogue.

Par exemple, si x appartient à $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, on pose $y=-x$. Comme y est un angle aigu, on a, par exemple, en utilisant ce qui précède :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\sin y \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right)=-\sin y,$$

c'est-à-dire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin(-x)=-\sin x \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin(-x)=\sin x.$$

De même, si x appartient à $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, alors on pose $y=\pi-x$ et on utilise les formules précédentes.

□

Justification d'une formule de trigonométrie.

Méthode utilisant le produit scalaire On va étudier la quantité $\cos(a-b)$ où a et b sont deux nombres réels. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires tels que :

$$(\vec{\imath}, \vec{u})=a \quad \text{et} \quad (\vec{\imath}, \vec{v})=b.$$

Une première expression du produit scalaire donne :

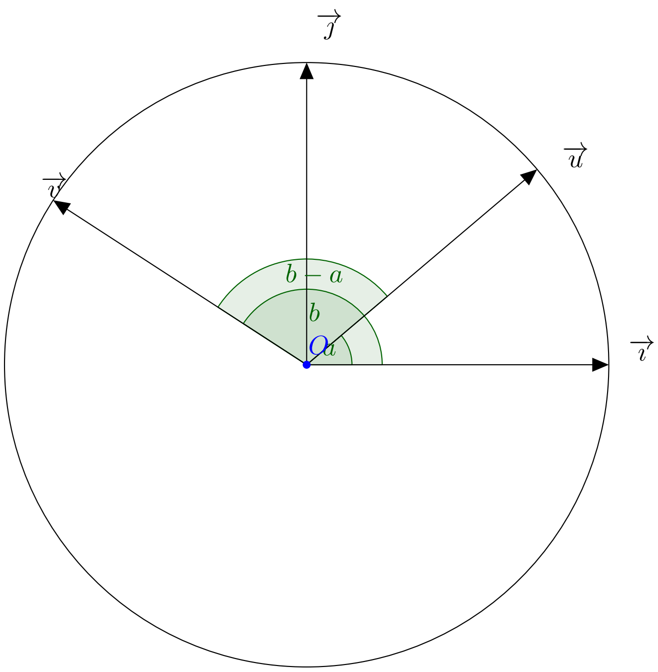


FIGURE 32.8 – Figure pour la démonstration (méthode avec produit scalaire)

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

D'après la relation de Chasles :

$$(\vec{u}, \vec{v})=(\vec{u}, \vec{\imath})+(\vec{\imath}, \vec{v})=b-a$$

donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=\cos(b-a)=\cos(a-b)$ car la fonction cosinus est paire. D'autre part, d'après la définition du cosinus et du sinus, on a :

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}=\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$$

D'après l'expression du produit scalaire avec les coordonnées $(xx' + yy')$, on obtient alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Ce qui nous donne une formule trigonométrique :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Méthode n'utilisant pas le produit scalaire On étudie cette fois-ci $\cos(a+b)$ où a et b sont deux nombres réels. On considère le cercle de centre O et de rayon 1 dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Sur ce cercle, on place un point A tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = a$, le point M tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = b$ et le point A' tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \frac{\pi}{2}$. D'après la relation de Chasles pour les

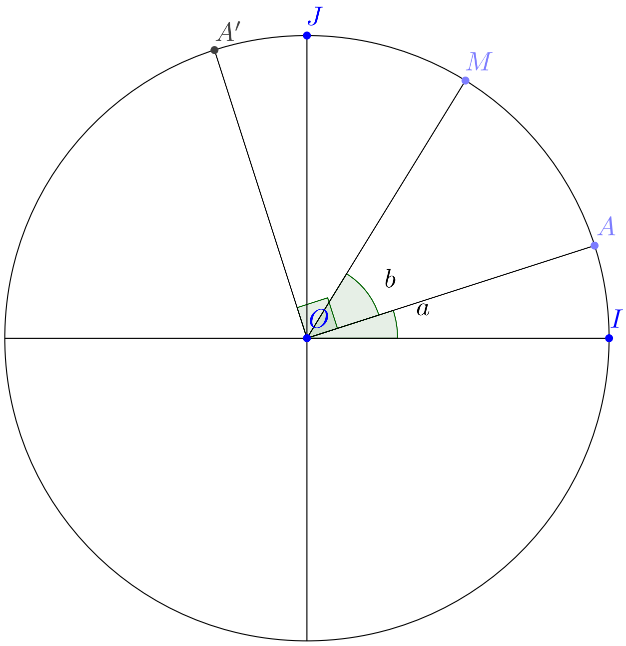


FIGURE 32.9 – Figure pour la démonstration (méthode sans produit scalaire)

angles, on a :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = a + b \pmod{2\pi}$$

Donc :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(a+b)\overrightarrow{OI} + \sin(a+b)\overrightarrow{OJ}.$$

Mais en se plaçant dans le repère orthonormé (O, A, A'), on a :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(b)\overrightarrow{OA} + \sin(b)\overrightarrow{OA'}$$

et en exprimant les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a :

$$\overrightarrow{OA} = \cos(a)\overrightarrow{OI} + \sin(a)\overrightarrow{OJ}$$

et

$$\overrightarrow{OA'} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\overrightarrow{OI} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\overrightarrow{OJ} = -\sin(a)\overrightarrow{OI} + \cos(a)\overrightarrow{OJ}.$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \cos(b)\cos(a)\overrightarrow{OI} + \cos(b)\sin(a)\overrightarrow{OJ} - \sin(b)\sin(a)\overrightarrow{OI} + \sin(b)\cos(a)\overrightarrow{OJ} \\ &= [\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)]\overrightarrow{OI} + [\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)]\overrightarrow{OJ}\end{aligned}$$

et par unicité des coordonnées d'un vecteur dans un repère, il vient les deux relations :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

□

Démonstration de la proposition 32.20.

$$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a = 2\sin a \cos a$$

□

Démonstration de la proposition 32.21. On rappelle que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ quelque soit le réel x. Donc :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1,$$

d'où $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$. De même,

$$\cos(2a) = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a,$$

d'où $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$. □

LEÇON

33 Relations métriques et trigonométriques dans un triangle

Niveau, prérequis, références

Niveau Première S

Prérequis Géométrie du triangle

Références [86, 87, 88]

Contenu de la leçon

1 Relations métriques dans un triangle

1 1 Théorème de Pythagore

Théorème 33.1 (Théorème de Pythagore). *ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $BC^2 + AB^2 + AC^2$.*

Exemple 33.2 (Escargot). On part d'un triangle isocèle rectangle dont les côtés autres que l'hypoténuse mesurent 1 unité. L'hypoténuse mesure alors $\sqrt{2}$ unités. On place un triangle rectangle sur cette hypoténuse, son côté adjacent à l'angle droit mesurant 1 unité. Alors l'hypoténuse de ce nouveau triangle mesure $\sqrt{3}$ unités, et ainsi de suite...

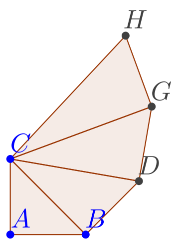


FIGURE 33.1 – Escargot

1 2 Formule d'Al-Kashi

Théorème 33.3 (Formule d'Al-Kashi). *Dans un triangle ABC,*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}.$$

1 3 Formule des 3 sinus

Théorème 33.4 (Formule des 3 sinus). *Soit ABC un triangle (on note $a = BC$, $b = AC$, $c = BA$), S l'aire de se triangle et R le rayon du cercle circonscrit au triangle :*

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R.$$

2 Relations trigonométriques dans un triangle

Définition 33.5. *Dans un triangle ABC rectangle en A, on définit le* sinus, *le* cosinus *et la* tangente *de l'angle aigu $\widehat{ABC}$ de la manière suivante :*

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$
$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$
$$\tan \widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB}.$$

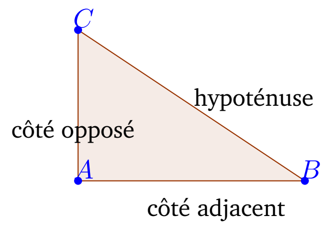


FIGURE 33.2 – Côté opposé, côté adjacent à un angle, hypoténuse

Remarque 33.6. On a aussi avec l'angle $\widehat{ACB}$:

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC}, \quad \sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC}, \quad \tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}.$$

Propriété 33.7. *Le sinus et le cosinus d'un angle aigu sont strictement plus grands que 0 et strictement plus petits que 1 et ils n'ont pas d'unité.*

2 1 Formules de trigonométrie

Propriété 33.8. *Pour toutes valeurs de x, on a :*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{et} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Proposition 33.9 (Formules d'addition). *1.* $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$,

2. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,

3. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$,

4. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Proposition 33.10 (Formules de duplication). *1.* $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$,

2. $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$.

Proposition 33.11 (Formule de linéarisation). *1.* $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$,

2. $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$.

Exemple 33.12. On va calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$. En utilisant les formules de linéarisation :

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

et comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, il vient $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

et comme $\sin\frac{\pi}{8} > 0$, il vient $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. D'où :

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}.$$

Or :

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{6-4\sqrt{2}}{4-2} = 3-2\sqrt{2} = 1-2\sqrt{2}+2 = (1-\sqrt{2})^2.$$

D'où :

$$\tan\frac{\pi}{8} = \left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1.$$

En utilisant les formules d'addition :

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\\
\sin\frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{8-2\sqrt{12}}{6-2} = 2-\sqrt{3}.$$

3 Applications

Exemple 33.13. On considère trois carrés disposés comme dans la figure 33.3. Montrer que $\alpha = \beta+\gamma$. On a bien sûr $\alpha = \frac{\pi}{4}$. On montre donc que $\beta+\gamma = \frac{\pi}{4}$. D'après une formule d'addition :

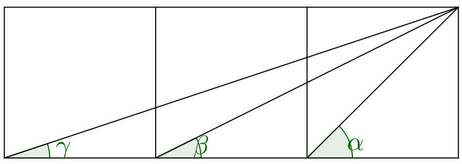


FIGURE 33.3 – Figure de l'exemple

$$\cos(\beta+\gamma) = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma.$$

Or, si l'on note a la longueur des côtés des carrés, on a (d'après le théorème de Pythagore et les relations du cosinus et du sinus dans un triangle rectangle) :

$$\begin{aligned}
\cos\beta &= \frac{2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\gamma = \frac{3a}{\sqrt{10}a} = \frac{3}{\sqrt{10}}\\
\sin\beta &= \frac{a}{\sqrt{5}a} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\gamma = \frac{a}{\sqrt{10}a} = \frac{1}{\sqrt{10}}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\cos(\beta+\gamma) = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{5}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Et comme $0 < \beta+\gamma < \pi$, on a bien $\beta+\gamma = \frac{\pi}{4}$.

Exemple 33.14. Soit ABC un triangle avec $a = 2$, $b = 3$ et $c = 4$. Calculer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{S}$ de ABC.

D'après la formule d'Al-Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

Donc :

$$\cos\widehat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

On remplace par les valeurs numériques :

$$\cos\widehat{A} = \frac{9+16-4}{24} = \frac{7}{8}.$$

Or $\cos^2\widehat{A} + \sin^2\widehat{A} = 1$, donc :

$$\sin^2\widehat{A} = 1 - \frac{49}{64} = \frac{15}{64}.$$

Or ABC étant un triangle, l'angle $\widehat{A}$ est compris entre 0 et π rad donc son sinus est positif. D'où :

$$\sin\widehat{A} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

Enfin, d'après la formule de l'aire du triangle, on obtient :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{3\sqrt{15}}{4}.$$

Exemple 33.15. Soit ABC un triangle avec $b = 3$, $c = 8$ et $\widehat{A} = 60°$. Calculer la valeur exacte de a ainsi que $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ (en degrés à 10^{-1} près).

D'après la formule d'Al-Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 9 + 64 - 48 \times \frac{1}{2} = 49.$$

D'où $a = 7$. On peut déterminer $\cos\widehat{B}$ à l'aide de la formule d'Al-Kashi :

$$\cos\widehat{B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{13}{14}.$$

On a $\cos B > 0$ et ABC triangle donc $B \in \left]0\,,90\right[$. On calcule donc $\widehat{B} = \arccos\frac{13}{14} \simeq 21,8°$. On peut calculer $\widehat{C}$ avec la relation $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} = 180°$. Ainsi :

$$\widehat{C} = 180 - 21,8 - 60 = 98,2°.$$

Exemple 33.16 (Aire maximale d'un rectangle inscrit dans un cercle). Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon 1 cm. Quelle est l'aire maximale d'un rectangle dont les sommets sont sur le cercle $\mathcal{C}$.

On note O le centre du cercle et soit I et K deux points diamétralement opposés. Soit M un point mobile sur le cercle et on note x une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$. Enfin, on note M' le point diamétralement opposé à M. D'après la formule de l'aire d'un triangle exprimée avec un sinus :

$$\mathcal{A}(MOI) = \frac{1}{2}OM \times OI\sin x.$$

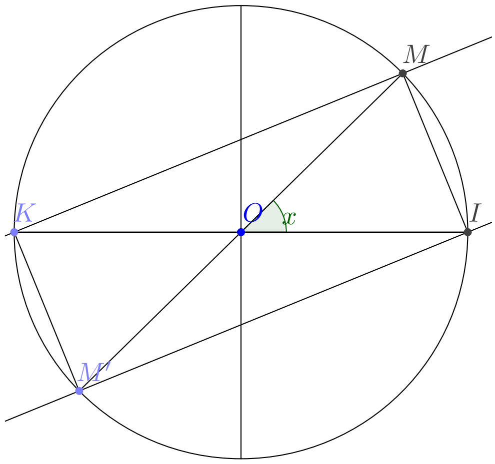


FIGURE 33.4 – Figure de l'exemple

Comme le rayon du cercle est égal à 1 :

$$\mathcal{A}(MOI) = \frac{1}{2}\sin x.$$

Enfin, les diagonales d'un rectangle partagent celui-ci en quatre triangles de même aire (puisque la médiane dans un triangle partage celui-là en deux triangles de même aire) donc :

$$\mathcal{A}(MKM'I) = 2\sin x.$$

L'aire du rectangle inscrit dans le cercle est donc maximale lorsque le sinus l'est, à savoir pour $x = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorsque le rectangle est un carré ; l'aire maximale est alors de 2 cm^2.

Exemple 33.17 (Formule de Héron)**.** Soit ABC un triangle de demi-périmètre p (p est défini par la relation $2p = a+b+c$). On montre que l'aire $\mathcal{S}$ de ABC est donnée par :

$$\mathcal{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(formule de Héron)}.$$

D'après la formule d'Al-Kashi, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

$$\begin{aligned}
\cos\widehat{A} &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\
1-\cos\widehat{A} &= 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc} \\
1+\cos\widehat{A} &= 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\sin^2\widehat{A} = 1-\cos^2\widehat{A} = (1-\cos\widehat{A})(1+\cos\widehat{A}) = \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+b+c)}{4b^2c^2}$$

$$4b^2c^2\sin^2\widehat{A} = (2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)(2p) = 16p(p-a)(p-b)(p-c).$$

En outre,

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4}b^2c^2\sin^2\widehat{A} = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

D'où la formule de Héron.

Exemple 33.18 (Inégalités dans le triangle). Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$, et $c = AB$. On va montrer que :

$$|b - c| \leq a \leq b + c.$$

D'après la formule d'Al-Kashi, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \Leftrightarrow \cos\widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

On en déduit l'encadrement :

$$-2bc \leq a^2 - b^2 - c^2 \leq 2bc.$$

D'où $(b-c)^2 \leq a^2 \leq (b+c)^2$. Par croissance de l'application $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[0\,, +\infty[$, on obtient :

$$|b - c| \leq |a| \leq |b + c|\,.$$

Comme a, b et c sont des quantités positives :

$$|b - c| \leq a \leq b + c.$$

Compléments

Démonstration du théorème de Pythagore. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les vecteurs portés par les côtés du triangle ABC vérifient la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.$$

Ainsi :

$$AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = AC^2 + CB^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$$

donc la relation du théorème est équivalente à l'annulation du dernier produit scalaire, ce qui correspond précisément au cas où les vecteurs sont orthogonaux, autrement dit lorsque les côtés $[AC]$ et $[BC]$ forment un angle droit. □

Démonstration du théorème 33.3. Si on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on a :

$$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}) = c^2 + b^2 + 2b\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$$

Or $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = \cos[\pi + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})] = -\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\cos\widehat{A}$. □

Démonstration du théorème 33.4. On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

- Dans le cas où $\widehat{B}$ est obtus, $AH = AB\sin(\pi - \widehat{B}) = AB\sin\widehat{B} = c\sin\widehat{B}$.
- Dans le cas où $\widehat{B}$ est aigu, $AH = AB\sin\widehat{B} = c\sin\widehat{B}$.

Donc, dans tous les cas, $AH = c\sin\widehat{B}$ et $S = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$. D'où

$$S = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}.$$

□

Justification d'une formule de trigonométrie.

Méthode utilisant le produit scalaire On va étudier la quantité $\cos(a - b)$ où a et b sont deux nombres réels. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires tels que :

$$(\vec{\imath}, \vec{u}) = a \quad \text{et} \quad (\vec{\imath}, \vec{v}) = b.$$

Une première expression du produit scalaire donne :

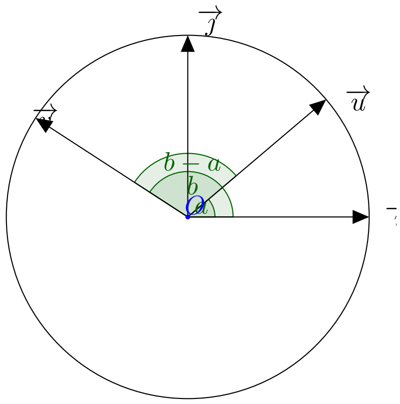


FIGURE 33.5 – Figure pour la démonstration (méthode avec produit scalaire)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

D'après la relation de Chasles :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{\imath}) + (\vec{\imath}, \vec{v}) = b - a$$

donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(b-a) = \cos(a-b)$ car la fonction cosinus est paire. D'autre part, d'après la définition du cosinus et du sinus, on a :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$$

D'après l'expression du produit scalaire avec les coordonnées $(xx' + yy')$, on obtient alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Ce qui nous donne une formule trigonométrique :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Méthode n'utilisant pas le produit scalaire On étudie cette fois-ci $\cos(a+b)$ où a et b sont deux nombres réels. On considère le cercle de centre O et de rayon 1 dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Sur ce cercle, on place un point A tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = a$, le point M tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = b$ et le point A' tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \frac{\pi}{2}$. D'après la relation de Chasles pour les angles, on a :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = a + b \pmod{2\pi}$$

Donc :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(a+b)\overrightarrow{OI} + \sin(a+b)\overrightarrow{OJ}.$$

Mais en se plaçant dans le repère orthonormé (O, A, A'), on a :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(b)\overrightarrow{OA} + \sin(b)\overrightarrow{OA'}$$

et en exprimant les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a :

$$\overrightarrow{OA} = \cos(a)\overrightarrow{OI} + \sin(a)\overrightarrow{OJ}$$

et

$$\overrightarrow{OA'} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\overrightarrow{OI} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\overrightarrow{OJ} = -\sin(a)\overrightarrow{OI} + \cos(a)\overrightarrow{OJ}.$$

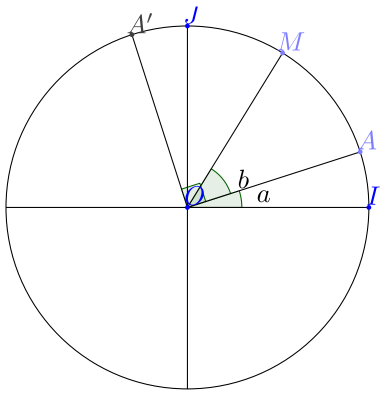


FIGURE 33.6 – Figure pour la démonstration (méthode sans produit scalaire)

Finalement :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \cos(b)\cos(a)\overrightarrow{OI} + \cos(b)\sin(a)\overrightarrow{OJ} - \sin(b)\sin(a)\overrightarrow{OI} + \sin(b)\cos(a)\overrightarrow{OJ} \\ &= [\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)]\overrightarrow{OI} + [\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)]\overrightarrow{OJ}\end{aligned}$$

et par unicité des coordonnées d'un vecteur dans un repère, il vient les deux relations :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\end{aligned}$$

□

Démonstration de la proposition 33.10.

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos(a+a) = \cos a\cos a - \sin a\sin a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ \sin(2a) &= \sin(a+a) = \sin a\cos a + \cos a\sin a = 2\sin a\cos a\end{aligned}$$

□

Démonstration de la proposition 33.11. On rappelle que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ quelque soit le réel x. Donc :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1,$$

d'où $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$. De même,

$$\cos(2a) = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a,$$

d'où $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$. □

LEÇON

34 Produit vectoriel, produit mixte

Niveau, prérequis, références

Niveau BTS

Prérequis Définition d'un vecteur et de ses coordonnées cartésiennes, repère orthonormé et orthonormé direct de l'espace, produit scalaire.

Références [89, 90]

Contenu de la leçon

1 Quelques rappels

On note $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Proposition 34.1.
- *Deux vecteurs non colinéaires définissent un plan vectoriel*
- *Trois vecteurs non colinéaires forment une base de $\mathcal{V}$, ou trièdre.*

Si $\mathcal{P}$ est un plan, le plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}} = \{AB,\ A, B \in \mathcal{P}\}$.

Définition 34.2. *Trois vecteurs sont dits* coplanaires *si et seulement si ils appartiennent à un même plan $\mathcal{P}$.*

On note $\mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v})$ l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\operatorname{vol}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

2 Définition du produit vectoriel

On rappelle tout d'abord que $\mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v})$ vaut :

$$\mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,|\sin(\theta)|$$

où θ est l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

Définition 34.3. *Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$. Si $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$, on pose $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. Sinon, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur tel que :*

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$,
2. $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$,
3. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ *est un trièdre direct,*
4. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v})$.

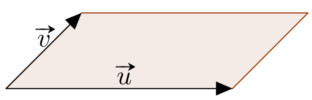


FIGURE 34.1 – Parallélogramme porté par les vecteurs u et v

Propriété 34.4. *Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ alors :*

1. $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ *(alternance)*
2. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ *(antisymétrie)*
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v}$
4. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ *si et seulement si $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$.*

3 Définition d'un produit mixte

On note $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ le produit scalaire.

Définition 34.5 (Produit mixte)**.** *Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$. On appelle* produit mixte *de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, le réel*

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] := \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle .$$

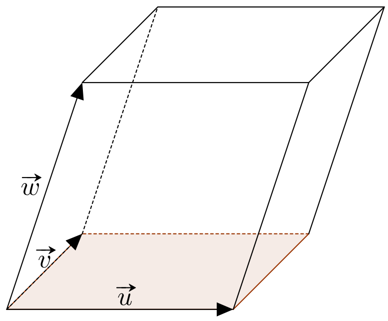


FIGURE 34.2 – Parallélépipède P construit sur les vecteurs u, v, w

On rappelle que P est un parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ si :

$$P = \{x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w},\ x, y, z \in [0\,, 1]\} .$$

Théorème 34.6. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \pm \mathrm{vol}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$*. De plus, le signe est positif si le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est direct et il est négatif dans le cas contraire.*

Corollaire 34.7. *Le produit mixte est inchangé par permutation circulaire de ses arguments, c'est-à-dire :*

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}].$$

Le produit mixte change de signe quand on transpose deux de ses arguments, par exemple :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}].$$

4 Propriétés de linéarité

Propriété 34.8 (Distributivité du produit vectoriel par rapport à l'addition)**.** *Pour tout $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$,*

1. $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$,
2. $(\vec{u} + \vec{w}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u}$.

Corollaire 34.9 (Additivité du produit mixte par rapport à la deuxième variable)**.**

$$[\vec{u}, \vec{v} + \vec{v'}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v'}, \vec{w}].$$

Proposition 34.10. *Le produit mixte est linéaire en chacune de ses variables, c'est-à-dire :*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u}, \vec{u'}, \vec{v}, \vec{w}, \quad [\lambda \vec{u} + \mu \vec{u'}, \vec{v}, \vec{w}] = \lambda[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + \mu[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

et de même par rapport aux deuxième et troisième variables.

Théorème 34.11 (Expression analytique du produit vectoriel)**.** *Dans un repère orthonormal* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$*, si les coordonnées de* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont respectivement* (x, y, z) *et* (x', y', z') *alors les coordonnées de* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *sont :*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} yz' - zy \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}.$$

Exemple 34.12. Soit les vecteurs $\vec{u}(1, 2, 0)$ et $\vec{v}(-1, 3, 1)$. On va calculer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Pour calculer l'abscisse $x_{\vec{u} \wedge \vec{v}}$ du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$, il faut donc calculer :

$$yz' - zy' = 2 \times 1 - 0 \times 3 = 2.$$

De même,

$$y_{\vec{u} \wedge \vec{v}} = 0 \times (-1) - 1 \times 1 = -1 \quad \text{et} \quad z_{\vec{u} \wedge \vec{v}} = 1 \times 3 - 2 \times (-1) = 5.$$

Donc les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont $(2, -1, 5)$.

5 Applications

Exemple 34.13 (Calcul du sinus d'un angle)**.** Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. Alors :

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$$

va nous permettre de calculer l'angle $\widehat{BAC}$. De plus, si on appelle H le pied de la hauteur issue de B, dans le triangle ABH :

$$\sin \widehat{BAC} = \frac{BH}{BA}$$

donc

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = AB \times \times AC \times \frac{BH}{BA} = AC \times BH.$$

Comme l'aire du triangle ABC est $\frac{AC \times BH}{2}$, on a alors :

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{2}.$$

Application Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct, on définit les points $A(2, -2, 3)$ et $B(4, -6, 1)$ et $C(0, -1, 5)$. L'unité est le cm. On veut calculer l'aire du triangle ABC en cm^2.

On calcule les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = (2, -4, -4)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-2, 1, 2)$$

donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-4, 4, -6)$ et :

$$\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + -6^2} = \sqrt{68}.$$

L'aire du triangle ABC est donc :

$$\frac{\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\|}{2} = \frac{\sqrt{68}}{2} = \frac{2\sqrt{17}}{2} = \sqrt{17} \approx 4,12\text{cm}^2.$$

Exemple 34.14 (Moment d'une force)**.** Le moment d'une force $\vec{F}$ s'exerçant au point A par rapport au poids de pivot P est le vecteur :

$$M_{\vec{F}/P} = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{F}.$$

Ce vecteur désigne l'aptitude de la force $\vec{F}$ à faire tourner un système mécanique autour du point P, qui est le pivot.

Exemple 34.15 (Equation du plan P)**.** En utilisant le produit mixte, donner une équation du plan P défini par le point $A(1,1,2)$ et les vecteurs $\vec{u}(0,1,2)$ et $\vec{v}(-1,1,-1)$.

Soit $M(x,y,z)$ un point du plan P, on a :

$$\overrightarrow{AM}(x-1, y-1, z-2).$$

Alors

$$[\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}] = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = 0.$$

On calcule donc $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-3,-2,1)$ et :

$$\overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (x-1) \times (-3) + (y-1) \times (-2) + (z-2) \times 1$$

qui est nul. Donc une équation du plan P est :

$$-3x + 3 - 2y + 2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow -3x - 2y + z + 3 = 0.$$

Exemple 34.16 (Moment d'une force par rapport à un axe)**.** Soit $\vec{F}$ une force exercée le long d'une droite D et soit $(O, \vec{v})$ un axe orienté. Le produit mixte $[\vec{v}, \overrightarrow{OA}, \vec{F}]$, où A est un point quelconque de D est appelé *moment de la force* $\vec{F}$ par rapport à l'axe $(O, \vec{v})$.

Compléments

Démonstration du théorème 34.6.

1. Si les trois vecteurs sont coplanaires. Alors le volume est nul. Quant au produit mixte, il est également nul d'après les propriétés 1 et 2 du produit vectoriel (ajouté au fait qu'un produit scalaire entre deux vecteurs orthogonaux est nul).
2. Si les trois vecteurs forment un trièdre direct. Alors on sait que le volume du parallélépipède est égal à l'aire de la base fois la hauteur correspondante. On obtient donc :

$$\mathrm{vol}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v}) \times h$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v}) \times \cos((\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w})) \|\vec{w}\| \qquad (34.1) \\ &= \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]. \end{aligned}$$

3. Si les vecteurs forment un trièdre alors, dans la ligne (34.1), le cosinus (négatif) est précédé d'un signe moins.

□

Démonstration du corollaire 34.7. Les volumes étant égaux, il s'agit simplement d'appliquer la règle des trois doigts. □

Démonstration des propriétés 34.8.

1. On va montrer que $\vec{r} = \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) - \vec{u} \wedge \vec{v} - \vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{0}$.

Premier cas On suppose que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ sont non-coplanaires. Pour montrer que $\vec{r} = \vec{0}$, il suffit de montrer que $\langle \vec{r}, \vec{t} \rangle = 0$ pour tout vecteur $\vec{t}$. Mais grâce à la linéarité du produit scalaire par rapport à la seconde variable, il suffit de vérifier cette dernière propriété pour trois vecteurs d'une base, il suffit donc de vérifier que

$$\langle \vec{r}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{r}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{r}, \vec{w} \rangle = 0.$$

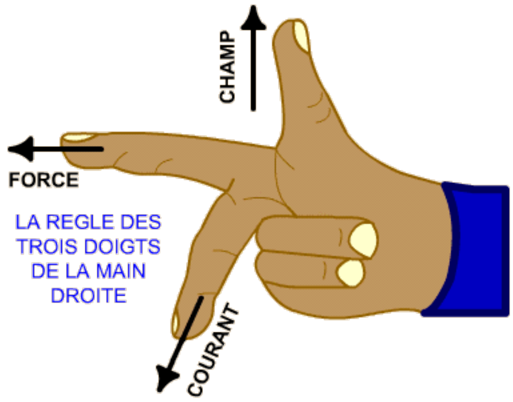


FIGURE 34.3 – La règle des trois doigts

Or, par définition, le produit vectoriel de n'importe quel vecteur avec $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{u}$. Les trois termes du second membre sont donc nuls. Donc : $\langle \vec{r}, \vec{u} \rangle = 0$. On calcule $\langle \vec{r}, \vec{v} \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle \vec{r}, \vec{v} \rangle &= \langle \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}), \vec{v} \rangle - \underbrace{\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{v} \rangle}_{=0} - \langle \vec{u} \wedge \vec{w}, \vec{v} \rangle \\ &= [\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{v}] - [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}].\end{aligned}$$

Or $\mathrm{vol}(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{v}) = \mathrm{vol}(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$. En effet, ces deux parallélépipèdes ont la même hauteur et $\mathcal{A}(\vec{v} + \vec{w}, \vec{v}) = \mathcal{A}(\vec{w}, \vec{v})$ car ces deux parallélogrammes ont la même hauteur et une base commune.

De plus, $(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{v})$ et $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$ ont la même orientation. Donc $\det(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{v}) = \det(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$ et donc $\langle \vec{r}, \vec{r} \rangle = 0$.

On peut faire le même raisonnement pour montrer que $\langle \vec{r}, \vec{w} \rangle = 0$.

Second cas Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires alors on peut exprimer un vecteur en fonction des deux autres.

2. Il suffit d'utiliser l'anti-symétrie du produit vectoriel pour se ramener au cas précédent.

□

LEÇON

35 Homothéties et translations

Niveau, prérequis, références

Niveau Première S
Prérequis Rotations, vecteurs
Références [91, 92]

Contenu de la leçon

1 Définitions - Propriétés

Définition 35.1. *On appelle* translation *de vecteur* $\vec{u}$*, l'application qui a un point* M *associe l'unique point* M' *tel que* $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$*. On la note souvent* $t_{\vec{u}}$*. Le point* M'*, image du point* M *par* $t_{\vec{u}}$ *est noté* $M' = t_{\vec{u}}(M)$*.*

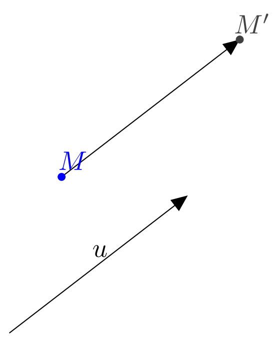


FIGURE 35.1 – Translation de vecteur u

Remarques 35.2.
1. La translation de vecteur nul est l'application identique (c'est-à-dire l'application qui à un point M associe le point M lui-même).
2. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, la translation de vecteur $\vec{u}$ n'a aucun point invariant, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun point M tel que $t_{\vec{u}}(M) = M$.
3. Si la translation de vecteur $\vec{u}$ associe à un point M le point M', alors l'application qui à M' associe M est la translation de vecteur $-\vec{u}$. On dit que la translation de vecteur $\vec{u}$ a pour réciproque la translation de vecteur $-\vec{u}$.

Propriété 35.3. *Soient* M *et* N *deux points et soient* M' *et* N' *leurs images par la translation de vecteurs* $\vec{u}$*. On a :*
$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}.$$

Définition 35.4 (Homothéties)**.** *Soit* Ω *un point et* k *un réel non nul. On appelle* homothétie de centre Ω *et de rapport* k*, l'application qui à un point* M *associe l'unique point* M' *tel que* $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$*. On la note souvent* $h_{(\Omega,k)}$*. Le point* M'*, image du point* M *par* $h_{(\Omega,k)}$ *pourra être noté* $M' = h(M)$*.*

Remarques 35.5.
1. L'homothétie de centre Ω est de rapport 1 est l'application identique (c'est-à-dire l'application qui à un point M associe le point M lui-même).

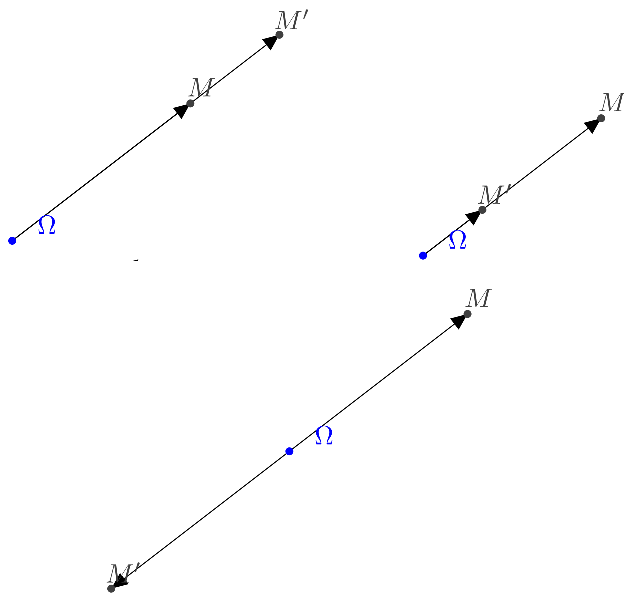


FIGURE 35.2 – Divers homothéties de centre Ω et de rapport k ($k > 1$, $0 < k < 1$, $k < 0$)

2. L'homothétie de centre Ω et de rapport -1 est la symétrie centrale de centre Ω.
3. Si $k \neq 1$, l'homothétie de centre Ω et de rapport k a pour seul point invariant, le point Ω. On a alors $h(\Omega) = \Omega$.
4. Si l'homothétie de centre Ω et de rapport k associe à un point M le point M', alors l'application qui à M' associe M est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{k}$. On dit que l'homothétie de centre Ω et de rapport k a pour réciproque l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{k}$.

Exemple 35.6. Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. On note I, J, K, L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Soit t la transformation transformant A en I

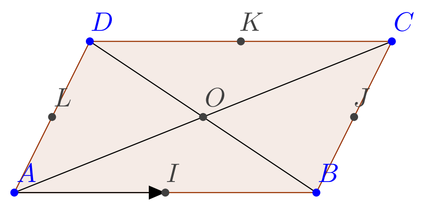


FIGURE 35.3 – Figure de l'exemple

On a :

1. $t(I) = B$,
2. $t(D) = K$,
3. $t(L) = O$,
4. $t(O) = J$.

Propriété 35.7. *Si M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k, alors les points Ω, M et M' sont alignés.*

Propriété 35.8. *Soient M et N deux points et soient M' et N' leurs images par l'homothétie de centre Ω et de rapport k. On a : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.*

Exemple 35.9. Soit ABC un triangle et A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. L'homothétie qui transforme les points A, B et C en les points A', B', C' est l'homothétie de centre

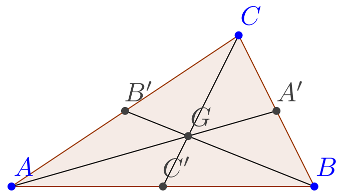


FIGURE 35.4 – Figure de l'exemple

G (G étant le centre de gravité du triangle ABC) et de rapport $-\frac{1}{3}$.

Exemple 35.10. Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit k un réel non nul, $\Omega(a,b)$ et $M(x,y)$. On veut déterminer les coordonnées du point M', image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

Or, $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM'}$ sont :

$$k\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(x-a) \\ k(y-b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx-ka \\ ky-kb \end{pmatrix}$$

Or $\overrightarrow{\Omega M'} = (x_{M'} - x_\Omega, y_{M'} - y_\Omega)$ et $\Omega(a,b)$. Donc :

$$\overrightarrow{OM'}\begin{pmatrix} kx-(k-1)a-a \\ ky-(k-1)b-b \end{pmatrix} \Leftrightarrow M' = \begin{pmatrix} kx-(k-1)a \\ ky-(k-1)b \end{pmatrix}.$$

Pour $k=1$, on retrouve bien que $M' = M$ car $k-1=0$.

2 Actions sur les configurations élémentaires

Propriété 35.11 (Points alignés). *Si A, B, C sont trois points alignés, leurs images A', B', C' par une translation t ou par une homothétie h sont des points alignés. On dit que les translations et les homothéties conservent l'alignement.*

Propriété 35.12 (Images). *Par une translation t :*
- *l'image d'une droite (AB) est la droite $(A'B')$ avec $A' = t(A)$ et $B' = t(B)$;*
- *l'image d'une droite (d) est une droite (d') parallèle à (d) ;*
- *l'image d'une droite (d) passant par A est la droite (d') parallèle à (d) et passant par $A' = t(A)$.*

Par une homothétie h :
- *l'image d'une droite (AB) est la droite $(A'B')$ avec $A' = h(A)$ et $B' = h(B)$;*
- *l'image d'une droite (d) est une droite (d') parallèle à (d) ;*
- *l'image d'une droite (d) passant par A est la droite (d') parallèle à (d) et passant par $A' = h(A)$.*

Propriété 35.13. *Soient A et B deux points, G le barycentre de (A,α) et (B,β) (avec $\alpha+\beta \neq 0$). Si A', B' et G' sont les images respectives de A, B et G par une translation t ou par une homothétie h alors G' est le barycentre de (A',α) et (B',β). On dit qu'une translation et une homothétie conservent le barycentre.*

Remarques 35.14. 1. En particulier, une translation et une homothétie conservent le milieu.

2. La propriété se généralise au barycentre de n points pondérés.

Propriété 35.15. *Soient A et B deux points distinct, A' et B' leurs images respectives par une translation t ou par une homothétie h. L'image du segment $[AB]$ par la translation t ou par l'homothétie h est le segment $[A'B']$.*

Propriété 35.16. *Soient A, B et C trois points deux à deux distincts et A', B', C' leurs images respectives par une translation t ou par une homothétie h. On a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$. On dit qu'une translation ou une homothéties conservent les angles (orientés).*

Remarque 35.17. Si A, B, C, D sont quatre points distincts et A', B', C', D' leurs images par une translation ou par une homothétie, on a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'})$. Le résultat peut se démontrer en notant que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) + \pi.$$

Propriété 35.18. *Une translation et une homothétie conservent les angles géométriques, le parallélisme, l'orthogonalté.*

Propriété 35.19. *Une translation conserve les longueurs et les aires. Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$ et les aires par k^2.*

Propriété 35.20. *Soient O, A, B trois points deux à deux distincts et O', A', B' leurs images respectives par une translation t ou par une homothétie h.*
- *Par la translation t, l'image du cercle de centre O et de rayon r est le centre de centre O' et de rayon r*
- *Par l'homothétie h de rapport k, l'image du cercle de centre O et de rayon r est le cercle de centre O' et de rayon $|k|\, r$.*
- *Par la translation t ou l'homothétie h, l'image du cercle de diamètre $[AB]$ est le cercle de diamètre $[A'B']$ et l'image du cercle de centre O passant par A est le cercle de centre O' passant par A'.*

3 Quelques exercices d'approfondissement

Exercice 35.21. Soit ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$

1. Démontrer qu'il existe une homothétie h de centre C transformant B en A' et A en B'. Donner, en fonction de l'aire du triangle ABC, l'aire du triangle $A'B'C$.
2. Donner, en fonction de l'aire du triangle ABC, les aires des triangles $AB'C'$ et $A'BC'$.
3. Déduire, des questions précédentes, que l'aire du triangle $A'B'C'$ est le quart de l'aire du triangle ABC. Retrouver ce résultat en utilisant une homothétie.

Exercice 35.22. On considère deux points distincts A et B. Pour tout point M du plan, soit I le milieu de $[AM]$ et G le barycentre de $(A, -1)$, $(B, 2)$ et $(M, 1)$

1. Faire une figure.
2. Démontrer que I est l'image de M par une transformation du plan à déterminer. Démontrer que G est l'image de I par une transformation du plan à déterminer.
3. En déduire
   - le lieu des points I lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$;
   - le lieu des points G lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$;
   - le lieu des points I lorsque M décrit la droite perpendiculaire à (AB) en B ;
   - le lieu des points G lorsque M décrit la droite perpendiculaire à (AB) en B.

Exercice 35.23. Soient A et B deux points distincts, I le milieu de $[AB]$. Soit (d) la médiatrice de $[AB]$. Soit (C) le cercle de centre A et de rayon AI et (C') le cercle de diamètre $[AB]$. A tout point M, on associe le point M' barycentre de $(A,-1)$ et $(M,2)$. Déterminer le lieu géométrique de M' lorsque M décrit :

1. la droite (AB)
2. la droite (d)
3. le cercle (C)
4. le cercle (C')

Exercice 35.24. Soit ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. A tout point M on associe le point $f(M) = M'$ défini par :

$$\overrightarrow{MM'} = k\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}.$$

1. Montrer que si $k = \frac{1}{2}$, l'application f est une homothétie dont le centre est le cercle de gravité du triangle ABC et dont on déterminer le rapport. Quelle est l'image par cette homothétie du triangle ABC ?
2. Montrer que si $k = -1$, l'application f est une translation dont on donnera le vecteur.
3. Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'application f lorsque $k \neq -1$.

Exercice 35.25. On considère un parallélogramme $ABCD$. Soit I le milieu de $[CD]$, J le point d'intersection des droites (BI) et (AC) et K le point d'intersection des droites (AI) et (BD).

1. Que représente J pour le triangle BCD ?
2. Déterminer une homothétie transformant (JK) en (AB).
3. Justifier que (JK) est parallèle à (AB).
4. Que représente l'aire du triangle (IJK) par rapport à l'aire du parallélogramme ?

Exercice 35.26. On considère un trapèze $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[CD]$. Soit O le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD).

1. Justifier qu'il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$.
2. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k. Déterminer $A' = h(A)$.
3. Soit $B' = h(B)$. Justifier que $B' \in (CD)$. En déduire que $B' = D$.
4. Soient I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$. En utilisant l'homothétie h, démontrer que O, I et J sont alignés.
5. On suppose dans cette question que $ABCD$ n'est pas un parallélogramme. Soit O' le point d'interesction de (AD) et (BC).
   (a) Démontrer que O', I et J sont alignés.
   (b) En déduire le théorème suivant « *Dans un trapèze qui n'est pas un parallélogramme, les milieux des côtés parallèles, le point de concours des diagonales et le point de concours des côtés non parallèles sont alignés.*

Compléments

1 Démonstrations

Démonstration de la propriété 35.3. Soient M et N deux points et soient M' et N' leurs images par la translation de vecteur $\vec{v}$. Par définition, on a : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{u}$, donc $MM'NN'$ est un parallélogramme. Donc $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$. □

Démonstration de la propriété 35.7. Si M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k, alors on a $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$, c'est-à-dire que les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M'}$ et $\overrightarrow{\Omega M}$ sont colinéaires, donc les points Ω, M et M' sont alignés. □

Démonstration de la propriété 35.8. Soient M et N deux points et soient M' et N' leurs images par l'homothétie de centre Ω et de rapport k. On peut écrire :

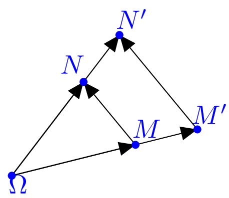


FIGURE 35.5 – Figure de la démonstration

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'\Omega} + \overrightarrow{\Omega N'} = -\overrightarrow{\Omega M'} + \overrightarrow{\Omega N'} = -k\overrightarrow{\Omega M} + k\overrightarrow{\Omega N} = k(-\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{\Omega N}) = k(\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega N}) = k\overrightarrow{MN}.$$

Donc $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$. □

Démonstration de la propriété 35.11. Soient A, B, C trois points alignés et A', B', C' leurs images par une translation t.

- Si $A = B$, on a $A' = B'$, il est alors évident que les points A', B', C' sont alignés.
- Si $A \neq B$, il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$. A', B' et C' étant les images de A, B, C par t, on sait que :
$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}.$$
L'égalité $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ permet alors d'en déduire $\overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$. On en déduit que les points A', B' et C' sont alignés.

Soient A, B, C trois points alignés et A', B', C' leurs images par une homothétie par une homothétie h de rapport k.

- Si $A = B$, on a $A' = B'$, il est alors évident que les points A', B', C' sont alignés.
- Si $A \neq B$, il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$. A', B' et C' étant les images de A, B, C par h, on sait que
$$\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB} \quad \text{où } k \text{ est le rapport de l'homothétie } h.$$
L'égalité $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ permet alors d'en déduire $k\overrightarrow{AC} = \lambda k\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$. On en déduit que les points A', B' et C' sont alignés.

□

Démonstration de la propriété 35.12. Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$.

- Soient A et B deux points distincts et soient $A' = t(A)$ et $B' = t(B)$ leurs images par la translation t. On a $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ donc $A' \neq B'$. Si C est un point de la droite (AB), alors A, B et C sont alignés. Comme une translation conserve l'alignement, on en déduit que A', B' et $C' = t(C)$ sont alignés. Donc C' appartient à la droite $(A'B')$.
Soit N un point de la droite $(A'B')$. Soit $\vec{u}$ le vecteur de la translation t. Soit t' la translation de vecteur $-\vec{u}$ (t' est la translation réciproque de t). On a $t'(A') = A$ et $t'(B') = B$. Soit M l'image de N par la translation t'. D'après la démonstration précédente, N étant sur la droite $(A'B')$, son image M est sur la droite (AB). t' étant la translation réciproque de t, on a $N = t(M)$. On a donc démontré que si N est un point de la droite $(A'B')$, alors N est l'image par t d'un point M de la droite (AB). On en déduit que l'image de la droite (AB) par la translation t est la droite $(A'B')$.

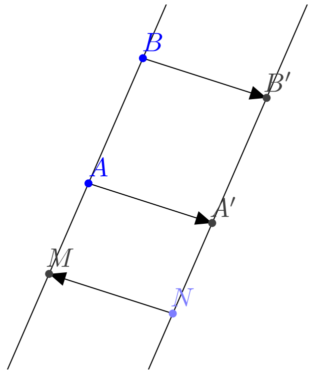


FIGURE 35.6 – Figure 1 de la démonstration

- Soit (d) une droite. Considérons A et B deux points distincts de (d). (d) est alors la droite (AB). On sait que l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$ avec $A' = t(A)$ et $B' = t(B)$. De plus, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. Donc les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles. On en déduit que l'image de la droite (d) est une droite (d') parallèle à (d).
- Soit (d) une droite passant par A. Considérons B un point de (d) distinct de A. (d) est alors la droite (AB). On sait que l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$ avec $A' = t(A)$ et $B' = t(B)$. De plus $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. Donc les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles. On en déduit que l'image de la droite (d) est la droite (d') passant par A et parallèle à (d).

Soit h une homothétie de rapport k.

- Soient A et B deux points distincts et soient $A' = h(A)$ et $B' = h(B)$ leurs images par l'homothétie h. On a : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. Comme k est non nul, on a $A' \neq B'$. Si C est un point de la droite (AB) alors A, B et C sont alignés. Comme une homothétie conserve l'alignement, on en déduit que A', B' et $C' = h(C)$ sont alignés. Donc C' appartient à la droite $(A'B')$.

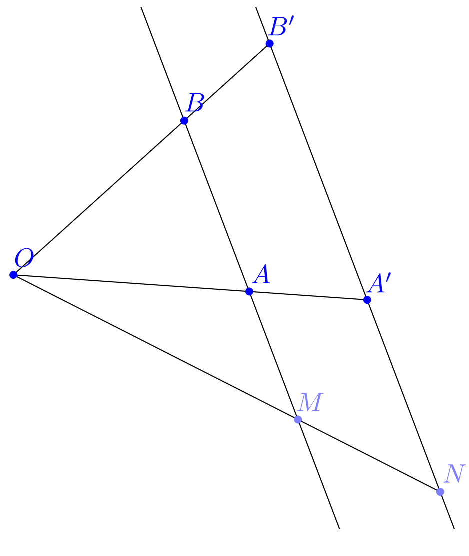


FIGURE 35.7 – Figure 2 de la démonstration

Soit N un point de la droite $(A'B')$. Soit le centre de l'homothétie h. Soit h' l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{k}$ (h' est l'homothétie réciproque de h). On a :

$$h(A') = A \quad \text{et} \quad h(B') = B.$$

Soit M l'image de N par l'homothétie h'. D'après la démonstration précédente, N étant sur la droite $(A'B')$, son image M est sur la droite (AB). h' étant l'homothétie réciproque de h, on a $N = h(M)$. On a donc démontré que si N est un point de la droite $(A'B')$ alors N est l'image par h d'un point M de la droite (AB). On en déduit que l'image de la droite (AB) par l'homothétie h est la droite $(A'B')$.

- Soit (d) une droite. Considérons A et B deux points distincts de (d). (d) est alors la droite (AB). On sait que l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$ avec $A' = h(A)$ et $B' = h(B)$. De plus, $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. Donc les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles. On en déduit que l'image de la droite (d) est une droite (d') parallèle à (d).
- Soit (d) une droite passant par A. Considérons B un point de (d) distinct de A. (d) est alors la droite (AB). On sait que l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$ avec $A' = h(A)$ et $B' = h(B)$. De plus $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. Donc les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles. On en déduit que l'image de la droite (d) est la droite (d') passant par A' et parallèle à (d).

□

Démonstration de la propriété 35.13. Soient A et B deux points, G le barycentre de (A, α) et (B, β) (avec $\alpha + \beta \neq 0$).

- Si A', B' et G' sont les images respectives de A, B et G par une translation t. On sait que $\overrightarrow{G'A'} = \overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{G'B'} = \overrightarrow{GB}$. Par définition du barycentre, on a
$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$
On en déduit que :
$$\alpha\overrightarrow{G'A'} + \beta\overrightarrow{G'B'} = \vec{0}.$$
Donc G' est le barycentre de (A', α) et (B', β).
- Si A', B' et G' sont les images respectives de A, B et G par une homothétie h. On sait que $\overrightarrow{G'A'} = k\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{G'B'} = k\overrightarrow{GB}$ où k est le rapport de l'homothétie ($k \neq 0$). Par définition du barycentre, on a :
$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$
On en déduit que :
$$\alpha\frac{1}{k}\overrightarrow{G'A'} + \beta\frac{1}{k}\overrightarrow{G'B'} = \vec{0}$$
donc
$$\alpha\overrightarrow{G'A'} + \beta\overrightarrow{G'B'} = \vec{0}.$$
Donc G' est le barycentre de (A', α) et (B', β).

□

Démonstration de la propriété 35.15. Soit $[AB]$ un segment et t une translation de vecteur $\vec{u}$. Un point M appartient au segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$ avec $\lambda \in [0, 1]$. Or :
$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow (1-\lambda)\overrightarrow{AM} - \lambda\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow (1-\lambda)\overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$
Donc $M \in [AB]$ si et seulement si M est le barycentre de $(A, 1-\lambda)$ et (B, λ) avec $\lambda \in [0, 1]$, par conservation du barycentre, M' est alors barycentre de $(A', 1-\lambda)$ et (B', λ) avec $\lambda \in [0, 1]$. Donc si $M \in [AB]$ alors $M' \in [A'B']$.

Inversement si un point N appartient à $[A'B']$. N est alors barycentre de $(A', 1-\lambda)$ et (B', λ) avec $\lambda \in [0, 1]$. Considérons le point M image de N par t', translation réciproque de la translation t. On a $t'(A') = A$, $t'(B') = B$ et $t'(N) = M$. N étant barycentre de $(A', 1-\lambda)$ et (B', λ) avec $\lambda \in [0, 1]$, par conservation du barycentre, M est alors barycentre de $(A, 1-\lambda)$ et (B, λ) avec $\lambda \in [0, 1]$ donc M appartient au segment $[AB]$. Et comme $t(N) = M$ on en déduit que N est l'image d'un point M de $[AB]$.

Donc l'image du segment $[AB]$ par la translation t est le segment $[A'B']$ avec $A' = t(A)$ et $B' = t(B)$.

La propriété se démontre de la même pour une homothétie car une homothétie conserve le barycentre. □

Démonstration de la propriété 35.16. Soient A', B', C' les images de A, B et C par une translation t. On sait que

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}.$$

Donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$.

Soient A', B', C', les images de A, B et C par une homothétie h de rapport k ($k \neq 0$). On sait que

$$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{AC}.$$

Alors

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (k\overrightarrow{AB}, k\overrightarrow{AC}).$$

- Si $k > 0$, on a $(k\overrightarrow{AB}, k\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- Si $k < 0$, on a $(k\overrightarrow{AB}, k\overrightarrow{AC}) = (-\overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Dans tous les cas, on a donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$. □

Démonstration de la propriété 35.18. Soient A, B et C trois points deux à deux distincts et soient A', B', C' leurs images par une translation t ou par une homothétie h, on sait que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$$

et par conséquent $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$. Donc une translation et une homothétie conservent les angles orientés.

Soient A, B, C et D quatre points deux à deux distincts et soient A', B', C' et D' leurs images par une translation t ou par une homothétie h. On peut écrire :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) + \pi.$$

On sait que

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{C'D'}).$$

On obtient donc :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) + \pi = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) + (\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{C'D'}) + \pi = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}).$$

Si deux droites (AB) et (CD) sont parallèles, on a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0 \pmod{\pi}$. Leurs images $(A'B')$ et $(C'D')$ sont alors deux droites telles que $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = 0 \pmod{\pi}$, donc $(A'B')$ et $(C'D')$ sont des droites parallèles. Donc, une translation et une homothétie conservent le parallélisme.

Si deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires, on a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Leurs images $(A'B')$ et $(C'D')$ sont alors deux droites telles que $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, donc $(A'B')$ et $(C'D')$ sont des droites perpendiculaires. Donc, une translation et une homothétie conservent l'orthogonalité. □

Démonstration de la propriété 35.19.
- Soient A et B deux points et soient A' et B' leurs images par une translation t. On sait que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ donc $A'B' = AB$. Une translation conserve les longueurs.
  On admet qu'une translation conserve les aires.
- Soient A et B deux points et soient A' et B' leurs images par une homothétie h et de rapport k. On sait que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ donc $A'B' = |k|\, AB$. Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$.
  On admet qu'une homothétie de rapport k multiplie les aires de k^2.

□

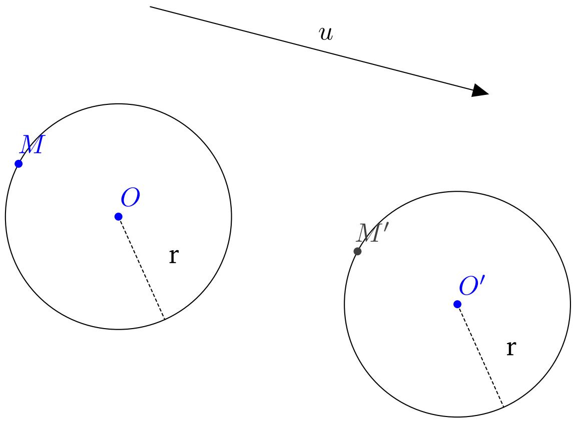


FIGURE 35.8 – Image d'un cercle par une translation

Démonstration de la propriété 35.20. 1. Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$. Soit M un point du cercle de centre O et de rayon r. On a $OM = r$. Si on note O' et M' les images de O et M par la translation t, on sait que $O'M' = OM$. Donc $O'M' = r$. Donc M' est un point du cercle de centre O' et de rayon r (on a aussi démontré que l'image du cercle de centre O et de rayon r est contenu dans le cercle de centre O' et de rayon r).

Inversement soit N un point du cercle de centre O' et de rayon r. On a $O'N = r$. Considérons le point M image de N par la translation t' réciproque de t. On a alors $M = t'(N)$ donc $N = t(M)$. Comme on sait que $O' = t(O)$, on en déduit que $O'N = OM$ donc $OM = r$, c'est-à-dire que M appartient au cercle de centre O et de rayon r. Donc tout point N du cercle de centre O' et de rayon r est l'image d'un point M du cercle de centre O et de rayon r. On en conclut que l'image par t du cercle de centre O et de rayon r est le cercle de centre $O' = t(O)$ et de rayon r.

Le cercle de diamètre $[AB]$ a pour centre le milieu I de $[AB]$ a pour rayon $\frac{AB}{2}$. Une translation conserve le milieu (conservation du barycentre) et conserve les distances. L'image du cercle de diamètre $[AB]$ est donc le cercle de centre I', milieu de $[A'B']$ et de rayon $\frac{AB}{2} = \frac{A'B'}{2}$, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[A'B']$. On en conclut que l'image du cercle de diamètre $[AB]$ est le cercle de diamètre $[A'B']$ avec $A' = t(A)$ et $B' = t(B)$.

Le cercle de centre O passant par A est le cercle de centre O et de rayon OA. Une translation conserve les distances donc l'image du cercle de centre O et de rayon OA est le cercle de centre O' et de rayon $O'A' = OA$, c'est-à-dire le cercle de centre O' passant par A'. On en conclut que l'image du cercle de centre O passant par A est le cercle de centre O' passant par A'.

2. Soit h une homothétie de centre Ω et de rapport k. Soit M un point du cercle de centre O et de rayon r. On a $OM = r$. Si on note O' et M' les images de O et M par l'homothétie h, on sait que $O'M' = |k|\,OM$. Donc $O'M' = |k|\,r$. Donc M' est un point du cercle de centre O' et de rayon $|k|\,r$ (on a ainsi démontré que l'image du cercle de centre O et de rayon r est contenue dans le cercle de centre O' et de rayon $|k|\,r$).

Inversement soit N un point du cercle de centre O' et de rayon $|k|\,r$. On a $O'N = |k|\,r$. Considérons le point M image de N par l'homothétie h' réciproque de h. On a alors $M = h'(N)$ donc $N = h(M)$. Comme on sait que $O' = h(O)$, on en déduit que $O'N = |k|\,OM$

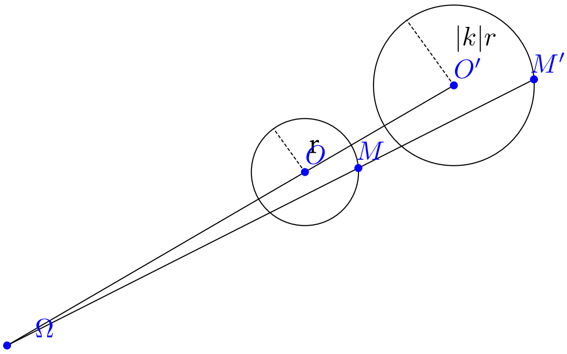


FIGURE 35.9 – L'image d'un cercle par une homothétie est un cercle

donc

$$OM = \frac{1}{|k|} O'N = \frac{1}{|k|} |k| \, r = r,$$

c'est-à-dire que M appartient au cercle de centre O et de rayon r. Donc tout point N du cercle de centre O' et de rayon r est l'image d'un point M du cercle de centre O et de rayon r. On en conclut que l'image par h du cercle de centre O et de rayon R est le cercle de centre $O' = h(O)$ et de rayon $|k| \, r$.

Le cercle de diamètre $[AB]$ a pour centre le milieu I de $[AB]$ et pour rayon $\frac{AB}{2}$. Une homothétie conserve le milieu et multiplie les distances par $|k|$. l'image du cercle de diamètre $[AB]$ est donc le cercle de centre I', milieu de $[A'B']$ et de rayon $|k| \, \frac{AB}{2} = \frac{A'B'}{2}$, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[A'B']$. On en conclut que l'image du cercle de diamètre $[AB]$ est le cercle de diamètre $[A'B']$ avec $A' = h(A)$ et $B' = h(B)$.

Le cercle de centre O passant par A est le cercle de centre O et de rayon OA. Une homothétie multiplie les distances par $|k|$ donc l'image du cercle de centre O et de rayon OA est le cercle de centre O' et de rayon $|k| \, OA = O'A'$, c'est-à-dire le cercle de centre O passant par A'. On en conclut que l'image du cercle de centre O passant par A est le cercle O' passant par A'.

□

2 Solutions aux exercices

Solution de l'exercice 35.21. Soit ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

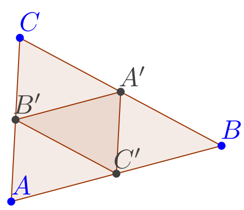


FIGURE 35.10 – Figure de l'exercice

1. A' étant le milieu de $[BC]$, on a

$$\overrightarrow{CA'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CB},$$

B' étant le milieu de $[AC]$, on a

$$\overrightarrow{CB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.$$

En considérant l'homothétie h de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$, on a donc :

$$A' = h(A) \quad \text{et} \quad B' = h(A).$$

L'homothétie h de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$ transforme B en A' et A en B'. On a de plus $C' = h(C) = C$ car C est le centre de l'homothétie. Le triangle $A'B'C$ est donc l'image par h du triangle BAC. On sait qu'une homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2.

2. De même le triangle $AB'C'$ est l'image du triangle ACB par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. Donc l'aire du triangle $AB'C'$ est égale au quart de l'aire du triangle ABC.
   Et le triangle $A'BC'$ est l'image du triangle CBA par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$. Donc l'aire du triangle $A'BC'$ est égale au quart de l'aire du triangle ABC.
3. L'aire du triangle ABC est la somme des aires des triangles $A'B'C$, $AB'C'$, $A'B'C$ et $A'B'C'$. Les aires des triangles $A'B'C$, $AB'C'$, $A'B'C$ représentant les trois quarts de l'aire du triangle ABC, on en déduit que l'aire de $A'B'C'$ est le quart de l'aire de ABC.
   Soit G le centre de gravité du triangle ABC. On sait que $\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$. Par conséquent, $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$. De la même façon, on a :

$$\overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}.$$

   Donc A', B' et C' sont les images de A, B et C par l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$. Sachant qu'une homothétie de rapport k multiple les aires par k^2, on en déduit que l'aire du triangle $A'B'C'$ est le quart de l'aire du triangle ABC.

□

Solution de l'exercice 35.22. 1. G étant le barycentre de $(A, -1)$, $(B, 2)$ et $(M, 1)$, on a : $-\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GM} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GM} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, d'où $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$. I étant le milieu de $[AM]$, on en déduit que $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AI}$.

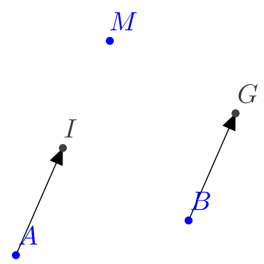


FIGURE 35.11 – Figure de la question 1

2. I étant le milieu de $[AM]$, on a $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$. Donc I est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. On a vu $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AI}$, donc $BGIA$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AB}$. Donc G est l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$, le point A est invariant et le point B a pour image le point K tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire le milieu de $[AB]$. I étant l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$, lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$, I décrit le cercle de diamètre $[AK]$.

Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, le point A a pour image B et le point K a pour image L tel que $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AB}$. G étant l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$, I décrit le cercle de diamètre $[AK]$ et G décrit le cercle de diamètre $[BL]$.

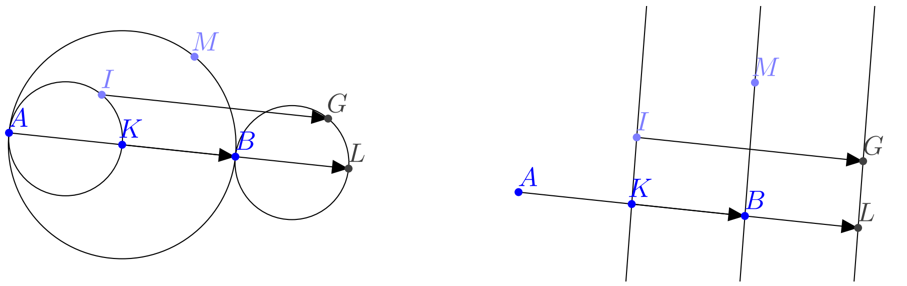


FIGURE 35.12 – Figure de la question 3

Lorsque M décrit la droite perpendiculaire à (AB) en B, I décrit la droite perpendiculaire à (AK) en K et G décrit la droite perpendiculaire à (BL) en L.

□

Solution de l'exercice 35.23. M' est le barycentre de $(A,-1)$ et $(M,2)$, on a donc :

$$-\overrightarrow{M'A} + 2\overrightarrow{M'M} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{M'A} + 2(\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM}) = \vec{0},$$

c'est-à-dire $\overrightarrow{M'A} + 2\overrightarrow{MA} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM}$. On en déduit que M' est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

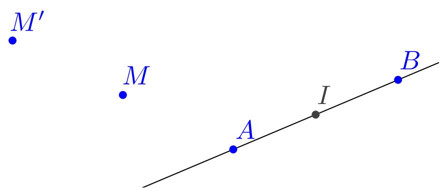


FIGURE 35.13 – Figure d'introduction pour l'exercice

1. A étant le centre de l'homothétie, on a $A' = h(A) = A$. De plus, l'image de B par h est $B' = h(B)$ avec $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AB}$. Si M décrit la droite (AB), M' décrit la droite $(A'B')$. Or A' et B' se trouvent sur la droite (AB), donc la droite $(A'B')$ est la droite (AB). Lorsque M décrit la droite (AB), M' décrit la droite (AB).

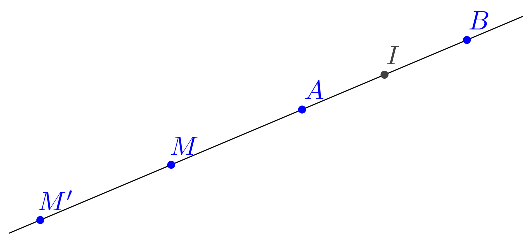


FIGURE 35.14 – Figure de la question 1

2. La droite (d), médiatrice de $[AB]$ est la droite passant par I et perpendiculaire à (AB). Comme I est le milieu de $[AB]$, on a $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$. Donc B est l'image de I par h. Si M décrit la droite (d) passant par I et perpendiculaire à (AB), alors M' décrit la droite (d') passant par $I' = B$ et perpendiculaire à $(A'B') = (AB)$. Lorsque M décrit la droite (d) médiatrice de $[AB]$, M' décrit la droite (d') passant par B et perpendiculaire à (AB).

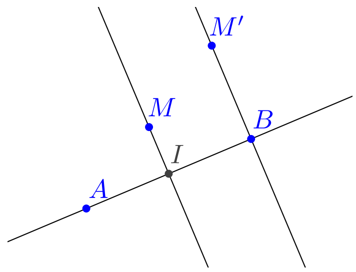


FIGURE 35.15 – Figure de la question 2

3. Si M décrit le cercle (C') de centre A et de rayon (AI), alors M' décrit le cercle de centre $A' = A$ et de rayon $2AI = AB$, c'est-à-dire le cercle de centre A et passant par B. Lorsque M décrit le cercle (C), M' décrit le cercle de centre A passant par B.

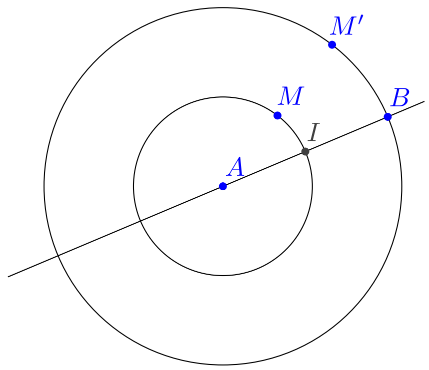


FIGURE 35.16 – Figure de la question 3

4. Si M décrit le cercle (C') de diamètre $[AB]$, alors M' décrit le cercle de diamètre $[A'B'] = [AB']$. Comme $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AB}$, B est le milieu de $[AB']$, donc le cercle de diamètre $[AB']$ est le cercle de centre B passant par A. Lorsque M décrit le cercle (C') de diamètre $[AB]$, M' décrit le cercle de entre B passant par A.

□

Solution de l'exercice 35.24. A tout point M, on associe le point $f(M) = M'$ défini par :

$$\overrightarrow{MM'} = k\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}.$$

1. Si $k = \frac{1}{2}$, on a
$$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$$
Soit G le centre de gravité du triangle ABC, on sait que G est l'isobarycentre de A, B et C. Donc, pour tout point M, on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$. Par conséquent, $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}3\overrightarrow{MG}$.

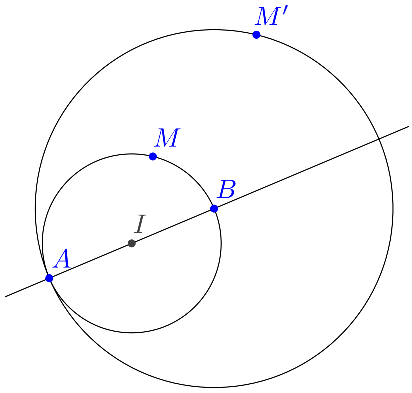


FIGURE 35.17 – Figure de la question 4

Donc $\overrightarrow{GM'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$. On en déduit que M' est l'image de M par l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$. Si $k = \frac{1}{2}$, f est l'homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ et de centre G, centre de gravité de ABC. D'après les propriétés de centre de gravité, A' étant le milieu de $[BC]$, on a :

$$\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$$

donc

$$\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}.$$

Donc A' est l'image de A par l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ donc $A' = f(A)$. De même, on a $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$. L'image du triangle ABC par l'homothétie f est donc le triangle $A'B'C'$.

2. Si $k = 1$, on a :

$$\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).$$

A' étant le milieu de $[BC]$, on a $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA'}$. Donc

$$\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{AA'}.$$

On en déduit que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$. Si $k = -1$, f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

3. Si $k \neq 1$, on a :

$$\overrightarrow{MM'} = k\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}.$$

Considérons le point Ω barycentre de (A, k), $(B, \frac{1}{2})$, $(C, \frac{1}{2})$. Ω existe puisque $k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq 0$. Pour tout point M, on a :

$$k\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} = \left(k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{M\Omega}.$$

On a donc $\overrightarrow{MM'} = (k+1)\overrightarrow{M\Omega}$, donc $M\Omega + \Omega M' = (k+1)\overrightarrow{M\Omega}$ donc $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{M\Omega}$. On obtient donc $\overrightarrow{\Omega M'} = -k\overrightarrow{\Omega M}$. Lorsque $k \neq 1$, l'application f est l'homothétie de rapport $-k$ et de centre Ω, barycentre (A, k), $(B, \frac{1}{2})$, $(C, \frac{1}{2})$.

□

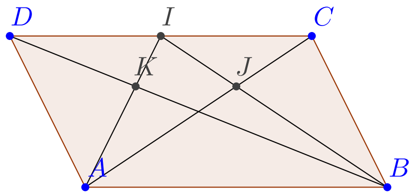


FIGURE 35.18 – Figure de l'exercice

Solution de l'exercice 35.25.

1. On sait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. La droite (AC) passe donc par le milieu de $[BD]$. Donc (AC) est une médiane du triangle BCD. I est le milieu de $[CD]$, donc la droite (BI) est une médiane du triangle BCD. Donc : le point J, intersection de (AC) et (BI) est le centre de gravité du triangle BCD.
2. J étant le centre de gravité du triangle BCD, on a $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$. On en déduit que $\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{IJ}$, donc B est l'image de J par l'homothétie de centre I et de rapport 3. Le point K est le point d'intersection des droites (AI) et (BD) qui sont deux médianes du triangle ACD. Donc K est le centre de gravité du triangle ACD. Par conséquent, on a $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$. On en déduit que $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IK}$, donc A est l'image de K par l'homothétie de centre I et de rapport 3. On peut conclure que l'homothétie de centre I et de rapport 3 transforme (JK) en (AB).
3. On sait qu'une homothétie transforme une droite en une droite parallèle. L'homothétie de centre I et de rapport 3 transforme (JK) en (AB). Donc (JK) est parallèle à (AB).
4. Par l'homothétie de centre I et de rapport 3, le triangle IJK a pour image le triangle IAB. On sait qu'une homothétie multiplie les aires par k^2. Donc l'aire de IAB est égale à 9 fois l'aire de IJK. De plus, l'aire de IAB est la moitié de l'aire du parallélogramme $ABCD$ (on peut le justifier en considérant le point H milieu de $[AB]$). Donc : l'aire du triangle IJK est égale au $\frac{1}{18}$ème de l'aire du parallélogramme $ABCD$.

□

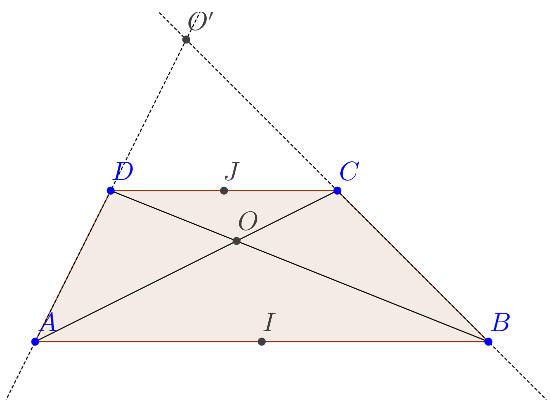


FIGURE 35.19 – Figure de l'exercice

Solution de l'exercice 35.26.

1. O appartient à (AC), donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont colinéaires. $ABCD$ étant un trapèze le point O est distinct de A et de C. Donc il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$.
2. On a $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$. Donc C est l'image de A par l'homothétie h de centre O et de rapport k. On a donc $A' = C$.

3. Soit $B' = h(B)$. Le point B appartient à la droite (AB), donc $B' = h(B)$ appartient à l'image de la droite (AB) par h. L'image de la droite (AB) par h est la droite passant par $A' = h(A)$ et parallèle à (AB). Or on sait que $A' = C$. L'image de la droite (AB) par h est donc la droite passant par C et parallèle à (AB), c'est-à-dire (CD). Donc $B' \in (CD)$. O étant le centre de l'homothétie, le point B', image de B par h se trouve sur la droite (OB). Donc B' est le point d'intersection de la droite (OB) et de la droite (CD). Donc $B' = D$.
4. L'homothétie h transforme A en C et B en D. Une homothétie conserve les milieux, donc le milieu I de $[AB]$ a pour image le milieu J de $[CD]$. O étant le centre de l'homothétie, les points O, I et J sont alignés.
5. Si $ABCD$ n'est pas un parallélogramme, les droites (AD) et (BC) ne sont pas parallèles. Soit O' leur point d'intersection.
   (a) Il existe un réel k' non nul tel que $\overrightarrow{O'D} = k'\overrightarrow{O'A}$. Donc D est l'image de A par l'homothétie h' de centre O' et de rapport k'. Soit B'' l'image de B par cette homothétie h'. Comme B appartient à (AB) et que $h'(A) = D$, B'' appartient à la droite passant par D et parallèle à (AB), c'est-à-dire B'' appartient à (CD). D'autre part, B'' appartient à la droite $(O'B)$. Donc B'' est le point d'intersection de $(O'B)$ et de (CD), donc $B'' = C$. L'homothétie h' transforme A en D et B en C. Une homothétie conserve les milieux, donc le milieu I de $[AB]$ a pour image le milieu J de $[CD]$. O' étant le centre de l'homothétie, les points O', I et J sont alignés.
   (b) On a donc démontré que O, I et J sont alignés et que O', I et J sont alignés, c'est-à-dire que O et O' sont sur la droite (IJ). On en déduit que I, J, O et O' sont alignés. Dans un trapèze qui n'est pas un parallélogramme, les milieux des côtés parallèles, le point de concours de diagonales et le point de concours des côtés non parallèles sont alignés.

□

3 Groupes des homothéties et translations (niveau Licence)

On se place dans un plan affine $\mathcal{E}$ dirigé par un espace vectoriel E.

Définition 35.27. *Une application affine h de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est appelée* homothétie*, s'il existe $A \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que pour tout vecteur $v \in E$, on ait :*

$$h(A + v) = A + \lambda v.$$

C'est l'application qui à un point M associe N tel que $\overrightarrow{AN} = \lambda\overrightarrow{AM}$. L'application linéaire associée à h est l'homothétie vectorielle $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}_E$, l'homothétie h admet un unique point fixe A appelé *centre*, le scalaire λ est appelé *rapport* de h.

Si A, B, C sont trois points alignés de $\mathcal{E}$ alors il existe une unique homothétie h telle que $h(A) = A$ et $h(B) = C$.

Proposition 35.28. *Soient $A \neq A'$, $B \neq B'$ des points de $\mathcal{E}$ tels que les droites $\mathcal{D} = (AB)$ et $\mathcal{D}' = (A'B')$ soient distincts et parallèles, alors*
1. *si $(AA')//(BB')$, on a $B' = t_{\overrightarrow{AA'}}(B)$,*
2. *si $(AA') \cap (BB') = \{O\}$, on a $B' = h_{(O,\lambda)}(B)$ où $h_{(O,\lambda)}$ est l'homothétie de centre O et de rapport λ tel que $\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}$.*

Démonstration. 1. On a $(AB)//(A'B')$ et $(AA')//(BB')$, d'où l'existence de deux scalaires α et β tels que $\overrightarrow{A'B'} = \alpha\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BB'} = \beta\overrightarrow{AA'}$, c'est-à-dire :

$$B' = A' + \alpha B - \alpha A = \beta A' + B - \beta A,$$

d'où $\alpha = \beta$ et donc $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'}$.

2. Notons λ le scalaire tel que $\overrightarrow{OA'} = \lambda \overrightarrow{OA}$. Il existe λ tel que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, d'où $B' = A' + kb - kA$ donc
$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = (\lambda - k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB},$$
ce qui prouve que $k = \lambda$ (car O, B et B' sont alignés).

□

Proposition 35.29. *Les bijections de $\mathcal{E}$ qui transforment toute droite en une droite parallèle forment un groupe dont les éléments sont exactement les homothéties et les translations. Ce groupe est appelé* groupe des homothéties-translations, *noté $HT(\mathcal{E})$.*

Démonstration. Il est clair que l'ensemble des ces bijections est un groupe qui contient les homothéties et les translations. On montre la réciproque : soit f une telle bijection, nous allons examiner trois cas

1. f n'a pas de point fixe : soit M un point de $\mathcal{E}$, on considère $N \notin (Mf(M))$, si $(Mf(M)) \cap (Nf(N)) = \{O\}$ alors O est un point fixe de f, en effet, par hypothèse,
$$(f(O)f(M))//(OM) = (Of(M)) \text{ donc } f(O) \in (Of(M)),$$
mais on a aussi
$$(f(O)f(N))//(ON) = (Of(N)) \text{ donc } f(O) \in (Of(N))$$
ce qui prouve que
$$\{f(O)\} = (Mf(M)) \cap (Nf(N)) = \{O\}.$$
L'application f étant supposée sans point fixe, les droites $(Mf(M))$ et $(Nf(N))$ sont donc parallèles, on est donc dans la situation 1 de la proposition précédente, f est une translation.
2. f admet un unique point fixe O : soient M et N tels que O, M, N ne soient pas alignés. On a :
$$(Of(M)) = (f(O)f(M))//(OM) \Rightarrow f(M) \in (OM)$$
et de même
$$(Of(N)) = (f(O)f(N))//(ON) \Rightarrow f(N) \in (ON).$$
De plus, par hypothèse, $(MN)//(f(M)f(N))$, on est ainsi dans la situation 2 de la proposition précédente et f est une homothétie.
3. f admet au moins deux points fixes O et O', soit $M \notin (OO')$ alors la droite $(f(O)f(M))$ est une droite parallèle à (OM) qui contient O. C'est donc la droite (OM). De même, $(O'f(M')) = (O'M)$, ainsi $f(M) \in (OM) \cap (O'M)$ donc $f(M) = M$, les points de $\mathcal{E}$ qui ne sont pas sur (OO') sont fixes. Si $N \in (OO')$, le point $N \notin (OM)$ avec O et M fixes, on a donc pour les mêmes raisons $f(N) = N$, ainsi f est l'identité.

□

Proposition 35.30. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E, soit $\varphi\colon GA(\mathcal{E}) \to GL(E)$ qui à une application affine f associe son application linéaire $\overrightarrow{f}$. Le sous groupe $\varphi^{-1}(\mathbb{K}\,\mathrm{id}_E)$ est égal au groupe des homothéties-translations et il est distingué dans $GA(\mathcal{E})$. On a*
$$f \in HT(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^*,\ f(M+v) = f(M) + \lambda v, \quad \forall M \in \mathcal{E},\ \forall v \in E.$$

1. *Si $\lambda = 1$, f est la translation de vecteur $\overrightarrow{Af(A)}$ pour tout $A \in \mathcal{E}$.*
2. *Si $\lambda \neq 1$, f est une homothétie de rapport λ et de centre (pour tout $A \in \mathcal{E}$)*
$$C = \frac{-\lambda}{1-\lambda}A + \frac{1}{1-\lambda}f(A).$$

On laisse la démonstration en exercice.

LEÇON

36 Isométries planes

Niveau, prérequis, références

Niveau Première S, Terminale S.

Prérequis Notion d'application, bijection.

Références [93, 94]

Contenu de la leçon

1 Transformations du plan

1 1 Définitions

Définition 36.1 (Transformation du plan)**.** *Une* transformation *du plan est une bijection du plan dans le plan, c'est-à-dire que tout point du plan possède une image et antécédent unique.*

Exemple 36.2.
1. La symétrie de centre A transforme tout point M du plan en un point M' du plan. Le point M possède une image unique par la symétrie. Tout point du plan est l'image d'un unique point par cette symétrie. La symétrie de centre A est donc une bijection du plan. C'est une transformation du plan.
2. La projection orthogonale du plan sur une droite Δ transforme tout point M du plan en un point M'. L'image de M est unique. Si N' n'est pas un point de Δ, il n'a pas d'antécédent et si P' est un point de Δ, il a une infinité d'antécédents. La projection orthogonale n'est pas une transformation du plan.

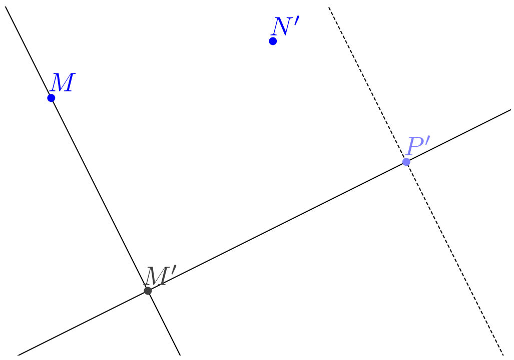


FIGURE 36.1 – La projection orthogonale n'est pas une transformation du plan

Définition 36.3 (Point fixe)**.** *On dit que M est* fixe *(ou* invariant*) par la transformation f si $f(M) = M$.*

Définition 36.4 (Image)**.** *Si F est une figure du plan (un ensemble de points quelconque), on appelle* image de F *par f et on note $f(F)$ l'ensemble des points de la forme $f(M)$ lorsque M décrit F. Si $f(F) = F$, on dit que F est* globalement invariante *par f*

Remarque 36.5. Dire que F est globalement invariante par f ne signifie pas que tous les points de F sont fixes par f.
- Un segment $[AB]$ est globalement invariant par la symétrie centrale dont le centre est le milieu de $[AB]$, mais seul le milieu de $[AB]$ est un point fixe par cette transformation.

– Une droite (AB) est globalement invariante par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors que cette transformation n'a aucun point fixe.

Définition 36.6 (Transformation identique)**.** *La transformation qui, à tout point M du plan associe le point M lui-même s'appelle la* transformation identique *ou l'*identité *et se note* id.

Remarque 36.7. Pour cette transformation, tous les points sont invariants.

1 2 Composition

Définition 36.8 (Transformation composée)**.** *La* transformation composée *de f et de g, notée $f \circ g$ est la transformation qui à tout point M du plan associe le point*

$$(f \circ g)(M) = f(g(M)).$$

Remarques 36.9.
1. Si f, g, h sont trois transformations :

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

2. En général, $g \circ f \neq f \circ g$. Lorsque $g \circ f = f \circ g$, on dit que les transformations f et g *commutent*.

1 3 Transformation réciproque

Définition 36.10 (Réciproque)**.** *La* réciproque *f^{-1} d'une transformation f est la transformation qui, à tout point N associe son unique antécédent par f.*

$$f^{-1}(M) = N \Leftrightarrow M = f(N).$$

f^{-1} est une transformation et $(f^{-1})^{-1} = f$,

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}\,.$$

Théorème 36.11. *Si f et g sont deux transformations, $f \circ g$ est une transformation et*

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Remarques 36.12.
1. Si $f \circ g = h$ alors $f = h \circ g^{-1}$ t $g = f^{-1} \circ h$.
2. Si $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$ alors $g = f^{-1}$.

2 Isométries du plan

2 1 Définitions

Définition 36.13 (Isométrie)**.** *Une isométrie du plan est une transformation du plan qui conserve les distances. Précisément, pour tous points A et B d'images respectives A' et B' : $A'B' = AB$.*

Exemple 36.14.
1. La translation de vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ est une isométrie du plan. En effet, si M (resp. P) appartient au plan et M' (resp. P') l'image de M (resp. P) par la translation de vecteur $\vec{v}$ alors on a : $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{M'P'}$. Or si deux vecteurs sont égaux alors ils ont même norme donc $MP = M'P'$.
2. L'homothétie de centre Ω et de rapport k est une isométrie si et seulement si $k = 1$ (c'est-à-dire si l'homothétie est une translation).

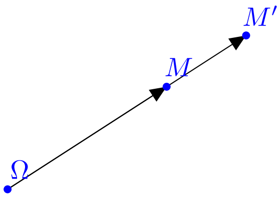


FIGURE 36.2 – L'homothétie de centre Ω et de rapport k n'est généralement pas une isométrie

Théorème 36.15. *Si f est une isométrie du plan :*

1. *l'image du segment $[AB]$ est le segment $[f(A)f(B)]$*
2. *l'image de la droite (AB) est la droite $(f(A)f(B))$*
3. *l'image du cercle de centre Ω et de rayon R est le cercle de centre $f(\Omega)$ et de rayon R.*
4. *f conserve le parallélisme : deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles.*
5. *f conserve l'orthogonalité : deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires.*
6. *f conserve les milieux : si I est le milieu de $[AB]$ alors $f(I)$ est le milieu de $[f(A)f(B)]$.*
7. *f conserve les barycentres : si G est le barycentre de (A_1, α_1), (A_2, α_2), $\dots$, (A_n, α_n) alors $f(G)$ est le barycentre de $(f(A_1), \alpha_1)$, $(f(A_2), \alpha_2)$, $\dots$, $(f(A_n), \alpha_n)$.*
8. *f conserve les angles géométriques : si $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$ alors $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.*

Définition 36.16 (Déplacement)**.** *Une isométrie qui conserve l'orientation des angles est un* déplacement.

Définition 36.17 (Antidéplacement)**.** *Une isométrie qui inverse l'orientation des angles est un* antidéplacement.

Théorème 36.18. *La composée de* deux *déplacements ou de* deux *antidéplacements est un déplacement.*

Théorème 36.19. *La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement (peu importe l'ordre) est un antidéplacement.*

2 2 Isométries usuelles

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. la translation du vecteur $\vec{u}$ est la transformée notée $t_{\vec{u}}$ définie par

$$M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$

Remarques 36.20.

1. $t_{\vec{0}} = \mathrm{id}$.
2. Si $M' = t_{\vec{u}}(M)$ et $N' = t_{\vec{u}}(N)$ alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

Théorème 36.21. $(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}$.

Théorème 36.22. *Une translation est un déplacement qui n'a aucun point fixe.*

Soit Δ une droite du plan. La réflexion d'axe Δ est la transformation notée s_Δ définie par

$$M' = s_\Delta(M) \Leftrightarrow \begin{cases} M' = M, & \text{si } M \in \Delta \\ \Delta \text{ médiatrice de } [MM'] & \text{si } M \notin \Delta \end{cases}$$

Théorème 36.23. $s_\Delta \circ s_\Delta = \mathrm{id}$ *et* ${s_\Delta}^{-1} = s_\Delta$.

Théorème 36.24. *Une réflexion est un antidéplacement qui a pour point fixe tout point de* Δ.

Soit ω un point du plan et soit $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre ω et d'angle θ est la transformation notée $r_{\omega,\theta}$ définie par :

$$r_{\omega,\theta}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \omega M' = \omega M \\ (\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}) = \theta \end{cases}$$

Remarques 36.25.
1. $r_{\omega,\pi} = s_\omega$ symétrie de centre ω.
2. Si $M' = r_{\omega,\pi}(M)$ et $N' = r_{\omega,\theta}(N)$ alors $(\overrightarrow{\omega M'}, \overrightarrow{\omega N'}) = (\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega N})$.

Théorème 36.26. $(r_{\omega,\theta})^{-1} = r_{\omega,-\theta}$.

Théorème 36.27. *Une rotation est un déplacement qui a pour seul point fixe le centre de la rotation.*

3 Composée de deux réflexions d'axes Δ_1 et Δ_2

3 1 Cas où les axes Δ_1 et Δ_2 sont parallèles

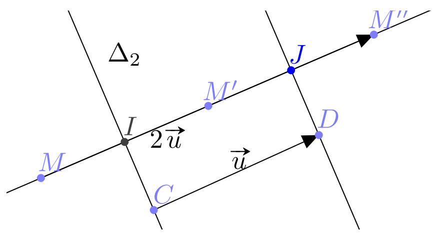


FIGURE 36.3 – Composée de deux réflexions d'axes parallèles

Théorème 36.28. *Si s_{Δ_1} et s_{Δ_2} sont deux réflexions d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2 tels que $\Delta_1 // \Delta_2$, la composée $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{u}$ tel que $\Delta_1 = t_{\overrightarrow{u}}(\Delta_2)$.*

Remarques 36.29.
1. $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1} = t_{-2\overrightarrow{u}}$ et donc, sauf dans le cas où $\Delta_1 = \Delta_2$, $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2} \neq s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$.
2. Toute transformation de vecteur $\overrightarrow{v}$ peut être décomposée d'une infinité de façons comme composée de deux réflexions dont les axes sont normaux à $\overrightarrow{v}$, l'un d'eux pouvant être choisi arbitrairement.

3 2 Cas où les axes Δ_1 et Δ_2 sont sécants en Ω

Théorème 36.30. *Soient s_{Δ_1} et s_{Δ_2} deux réflexions d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2 sécants en Ω et de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. La composée $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}$ est la rotation de centre Ω et d'angle* $2(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1})$.

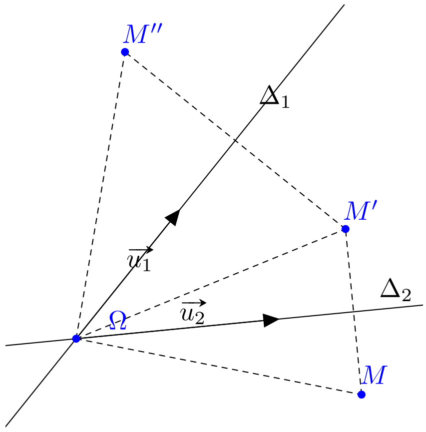


FIGURE 36.4 – Composée de deux réflexions d'axes sécants

Remarques 36.31.

1. L'angle $2(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1})$ dépend des droites Δ_1 et Δ_2 mais pas des vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ choisis sur ces droites. Si, par exemple, on remplace $\overrightarrow{u_1}$ par $-\overrightarrow{u_1}$, on a :
$$2(-\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = 2(-\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}) + 2(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = 2(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \pmod{2\pi}$$
car $(-\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}) = \pi \pmod{2\pi}$.
2. Sauf dans le as où $\Delta_1 \perp \Delta_2$ et où $s_{Delta_1} \circ s_{\Delta_2} = s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1} = s_\Omega$ (symétrie centrale de centre Ω), s_{Δ_1} et s_{Δ_2} ne commutent pas : $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$ est une rotation d'angle $2(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1})$ et $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}$ est une rotation d'angle $2(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$.
3. Toute rotation peut donc être décomposée, d'une infinité de manières différentes possibles, comme la composée de deux symétries axiales d'axes sécants au centre de cette rotation.

Exemple 36.32. Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre de gravité G. On note A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Soit $C'' = t_{\overrightarrow{A'A}}(C)$.

1. $$r_{A,\pi/3} \circ r_{B,\pi/3} = s_{(AA')} \circ s_{(AB)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(BB')} = s_{(AA')} \circ s_{(BB')} = r_{G,-4\pi/3}$$
car $(AA') = r_{G,-2\pi/3}(BB')$.
2. $$r_{C,-\pi/3} \circ r_{A,\pi/3} = s_{(CC'')} \circ s_{(AC)} \circ s_{(AA')} = s_{(CC'')} \circ s_{(AA')} = t_{\overrightarrow{BC}}$$
car $(CC'') = t_{1/2\overrightarrow{BC}}(AA')$.
3. $$t_{\overrightarrow{BC}} \circ r_{A',\pi} = s_{(CC'')} \circ s_{(AA')} \circ s_{(BC)} = s_{(CC'')} \circ s_{(BC)} = r_{C,\pi} = s_C.$$

4 Isométries du plan fixant un point

Théorème 36.33. *Soit f une isométrie et Ω un point du plan. L'isométrie f se décomposé d'une manière unique sous la forme $f = t \circ g$, où t désigne une translation et g désigne une isométrie laissant Ω fixe.*

Remarque 36.34. Le théorème montre qu'une isométrie quelconque peut toujours être obtenue, et ce d'une infinité de manières (le choix de Ω est libre), comme composée d'une isométrie laissant un point fixe et d'une translation.

Théorème 36.35.

1. *Une isométrie fixant trois points A, B et C non alignés est l'identité.*
2. *Une isométrie distincte de l'identité fixant au moins deux points distincts A et B est la symétrie axiale d'axe (AB).*
3. *Une isométrie ne fixant que le point A est une rotation de centre A et d'angle non nul.*

5 Déplacements du plan

Soit f un déplacement du plan.

1. Si f fixe un point, ce ne peut être que l'identité ou une rotation.
2. Si f ne fixe aucun point, alors $f = t \circ g$ avec g fixant un point. $g = t^{-1} \circ f$ est un déplacement fixant un point. C'est donc l'identité ou une rotation.
   (a) Si g est l'identité, $f = t \circ \mathrm{id} = t$.
   (b) Si g est une rotation r alors $f = t \circ r$. On va décomposer t et r en produit de réflexions bien choisies. $t = s_1 \circ s_2$ et $r = s_2 \circ s_3$. Alors
   $$t \circ r = s_1 \circ s_2 \circ s_2 \circ s_3 = s_1 \circ s_3$$
   est donc une translation ou une rotation.

Théorème 36.36. *Les déplacements du plan sont les translations et les rotations.*

6 Antidéplacements du plan

Soit f un antidéplacement du plan.

1. Si f fixe un point, ce ne peut être qu'une réflexion.
2. Si f ne fixe aucun point, alors $f = t \circ g$ avec g fixant un point. $g = t^{-1} \circ f$ est un antidéplacement fixant un point. C'est donc une réflexion s. Alors $f = t \circ s$.

Théorème 36.37. *Les antidéplacements du plan sont les réflexions et les composées $t \circ s$ où t est une translation et s une réflexion.*

Définition 36.38. *Une* symétrie glissée *est la composition d'une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'une réflexion d'axe Δ dont $\vec{u}$ est un vecteur directeur. On note $s_{\Delta,\vec{u}}$.*

Théorème 36.39. *La composée d'une translation et d'une réflexion est une réflexion ou une symétrie glissée.*

Théorème 36.40.
$$s_{\Delta,\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta = s_\Delta \circ t_{\vec{u}}.$$

Remarques 36.41.
1. Si f est une réflexion, $f \circ f = \mathrm{id}$.
2. Si f est la symétrie glissée $s_{\Delta,\vec{u}}$: $f \circ f = t_{2\vec{u}}$. De plus
   $$f = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta \Rightarrow t_{-\vec{u}} \circ f = s_\Delta$$
   permet de déterminer Δ.

Théorème 36.42. *Les antidéplacements du plan sont les réflexions et les symétries glissées.*

7 Ecriture complexe des déplacements

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

7 1 Ecriture complexe des translations

Théorème 36.43. *La translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}}$ associe, à tout point M d'affixe z, le point M' d'affixe*
$$z' = z + z_{\vec{u}}.$$

7.2 Ecriture complexe des rotations

Théorème 36.44. *La rotation $r_{\Omega,\theta}$ de centre Ω et d'angle θ associe, à tout point M d'affixe z, le point M' d'affixe*

$$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$$

7.3 Synthèse

Théorème 36.45. *L'écriture complexe d'un déplacement est*

$$z' = az + b \quad \text{avec } |a| = 1.$$

Réciproquement, si une transformation f du plan a une écriture complexe de la forme $z' = az+b$, a et b étant des complexes avec $|a| = 1$, alors f est une translation ou une rotation. En effet, si $a = 1$, $z' = z + b$, il s'agit de la transformation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b. Si $a \neq 1$, le point Ω d'affixe z_Ω est point fixe de f si et seulement si $z_\Omega = az_\Omega + b$. En soustrayant membre à membre les égalités

$$\begin{cases} z' = az + b \\ z_\Omega = az_\Omega + b \end{cases}$$

on obtient $z' - z_\Omega = a(z - z_\Omega)$. a étant de module 1, on peut écrire $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Donc $z' - z_\Omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - z_\Omega)$, d'où $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$. On reconnaît la rotation de centre Ω et d'angle θ.

Théorème 36.46. *$z' = az + b$ avec $|a| = 1$ est l'écriture complexe d'un déplacement.*

1. *Si $a = 1$ ce déplacement est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.*
2. *Si $a \neq 1$, ce déplacement est une rotation de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ et d'angle $\arg(a) \pmod{2\pi}$.*

7.4 Applications

Exemples 36.47.

1. Soient f et g deux rotations d'écritures complexes respectives $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}z + b_1$ et $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}z + b_2$, la transformation $f \circ g$ associe, à tout point M d'affixe z le point M'' d'affixe
$$z'' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}z + b_2) + b_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}z + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}b_2 + b_1).$$
C'est une transformation dont l'expression complexe est bien de la forme $z'' = Az + B$ avec $|A| = 1$.
   - Si $\alpha + \beta = 0 \pmod{2\pi}$, $A = 1$ et $f \circ g$ est une translation.
   - Si $\alpha + \beta \neq 0 \pmod{2\pi}$, $A \neq 1$ et $f \circ g$ est une rotation d'angle $\alpha + \beta$.
2. Soit f la rotation d'écriture complexe $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z + b_1$. Soit g la translation d'écriture complexe $z' = z + b_2$. La transformation $f \circ g$ associe, à tout point M d'affixe z le point M'' d'affixe
$$z'' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z + b_2) + b_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}b_2 + b_1).$$
Donc $f \circ g$ est une rotation d'angle θ.
3. Soit f la translation d'écriture complexe $z' = z + b_1$ et soit g la rotation d'écriture complexe $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z + b_2$. La transformation $f \circ g$ associe, à tout point M d'affixe z le point M'' d'affixe
$$z'' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z + b_2 + b_1.$$
$f \circ g$ est donc une rotation d'angle θ.

8 Ecriture complexe des antidéplacements

8.1 Ecriture complexe des réflexions d'axe "Ox"

Théorème 36.48. *$\Delta_0 = (O, \overrightarrow{e_1})$ étant l'axe des abscisses, la réflexion d'axe Δ_0 a pour écriture complexe*

$$z' = \overline{z}.$$

8.2 Ecriture complexe des réflexions d'axe horizontal

Théorème 36.49. *Δ étant la droite d'équation $y = b$, la réflexion d'axe Δ a pour écriture complexe*

$$z' = \overline{z} + 2b.$$

8.3 Ecriture complexe d'une réflexion d'axe non "horizontal"

Théorème 36.50. *Si la droite Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et coupe l'axe des abscisses au point Ω, l'écriture complexe de la réflexion s_Δ d'axe Δ est, en notant $\theta = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{v})$:*

$$z' = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}(\overline{z} - \overline{z}_\Omega) + z_\Omega.$$

8.4 Ecriture complexe des symétries glissées

Théorème 36.51. *Si la droite Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et coupe l'axe des abscisses au point Ω, l'écriture complexe de la* symétrie glissée *$s_{\Delta,\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_\Delta$ est, en notant $\theta = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{v})$:*

$$z' = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}(\overline{z} - \overline{z_\Omega}) + z_\Omega + z_{\overrightarrow{u}}.$$

8.5 Synthèse

Théorème 36.52. *L'écriture complexe des antidéplacements est*

$$z' = a\overline{z} + b \quad \text{avec } |a| = 1.$$

Réciproquement, soit f la transformation d'écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$ avec $|a| = 1$. Soit s la réflexion d'écriture complexe $z' = \overline{z}$ (c'est la réflexion par rapport à l'axe des abscisses) et g le déplacement d'écriture complexe $z' = az + b$. Alors $f = g \circ s$ et donc f est un antidéplacement (composée d'un déplacement et d'un antidéplacement).

Théorème 36.53. *$z' = a\overline{z} + b$ avec $|a| = 1$ est l'écriture complexe d'un antidéplacement.*

8.6 Applications

On peut utiliser les écritures complexes pour déterminer les composées de deux réflexions ou d'un antidéplacement et d'une translation par exemple.

Compléments

Démonstration du théorème 36.11. Si on pose $g(M) = M'$ et $f(M') = M''$: $M = g^{-1}(M')$ et $M' = f^{-1}(M'')$. D'où :

$$g^{-1} \circ f^{-1}(M'') = g^{-1}(f^{-1}(M'')) = g^{-1}(M') = M$$

et

$$f \circ g(m) = f(g(M)) = f(M') = M'' \Rightarrow M = (f \circ g)^{-1}(M'').$$

□

Démonstration du théorème 36.28. Soient $M' = s_{\Delta_2}(M)$ et $M'' = s_{\Delta_1}(M')$, I et J les milieux respectifs de $[MM']$ et $[M'M'']$. Comme $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{IM'}$ et $\overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'J}$ alors $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{IJ}$ et ainsi $M'' = t_{2\overrightarrow{u}}(M)$ en notant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{IJ}$. □

Démonstration du théorème 36.30. Soit $M' = s_{\Delta_2}(M)$, $M'' = s_{\Delta_1}(M')$.

$$s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}(\Omega) = s_{\Delta_1}(\Omega) = \Omega.$$

s_{Δ_1} et s_{Δ_2} étant des isométries :

$$\Omega M' = \Omega M \quad \text{et} \quad \Omega M'' = \Omega M'.$$

Donc $\Omega M'' = \Omega M$. Soient $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ des vecteurs directeurs respectifs de Δ_1 et Δ_2.

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}) = (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{u_2}) + (\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1}) + (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{\Omega M''}).$$

Une réflexion étant un antidéplacement

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{u_2}) = -(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{u_2}) \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{\Omega M''}) = -(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{\Omega M'}).$$

Donc

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}) = -(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{u_2}) + (\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1}) - (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{\Omega M'}) = 2(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1})$$

d'après la relation de Chasles sur les angles orientés. Donc $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}$ est la rotation de centre Ω et d'angle $2(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1})$. □

Démonstration du théorème 36.33. Soit $f = t \circ g$ une telle décomposition (en supposant qu'elle existe). On doit avoir

$$\Omega' = f(\Omega) = (t \circ g)(\Omega) = t(\Omega).$$

La translation t ne peut donc être que la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega\Omega'}$. De plus $f = t \circ g$ d'où $g = t^{-1} \circ f$. Donc la décomposition $f = t \circ g$ est, si elle existe, unique.

On pose maintenant $t = t_{\overrightarrow{\Omega\Omega'}}$ et $g = t^{-1} \circ f$. g est bien une isométrie comme la composée de deux isométries. De plus

$$g(\Omega) = (t^{-1} \circ f)(\Omega) = t^{-1}(f(\Omega)) = \Omega$$

donc Ω est bien un point fixe de g. Finalement,

$$t \circ g = t \circ (t^{-1} \circ f) = t \circ t^{-1} \circ f = f.$$

Ceci montre l'existence de la décomposition citée dans le théorème. □

Démonstration du théorème 36.35. Soit f une isométrie.

1. Supposons que f fixe trois points A, B et C non alignés. Soit M un point quelconque du plan et soit $M' = f(M)$. f conserve les distances donc :

$$AM = AM', \; BM = BM', \; CM = CM'.$$

   Si $M \neq M'$, les trois points A, B et C devraient être tous les trois sur la médiatrice de $[MM']$, ce qui est impossible puisqu'ils ne sont pas alignés. On a donc $M = M'$ et tous les points sont donc fixes : $f = \mathrm{id}$.
2. Supposons que f fixe deux points A et B distincts. Soit C un point qui n'est pas sur la droite (AB). D'après 1, $f(C) = C' \neq C$ sinon on aurait $f = \mathrm{id}$. Comme f conserve les distances,

$$AC = AC' \quad \text{et} \quad BC = BC'.$$

   Donc la droite (AB) est la médiatrice $[CC']$. Soit $g = s_{(AB)} \circ f$. On a :

$$g(A) = A, \; g(B) = B, \; g(C) = s_{(AB)}(f(C)) = s_{(AB)}(C') = C.$$

   D'après 1, $g = s_{(AB)} \circ f = \mathrm{id}$, d'où $f = s_{(AB)} \circ \mathrm{id} = s_{(AB)}$.

3. Supposons que f ne fixe que le point A. Soit B un point distinct de A, $B' = f(B)$. Comme f conserve les distances, $AB = AB'$, donc $A \in \Delta$ où Δ est la médiatrice de $[BB']$. Soit $g = s_\Delta \circ f$. On a :
$$g(A) = s_\Delta(f(A)) = s_\Delta(A) = A \quad \text{et} \quad g(B) = s_\Delta(f(B)) = s_\Delta(B') = B.$$
On peut donc appliquer à g ce que l'on a montré en 1 et 2. Si g était l'identité, on aurait $f = s_\Delta$, ce qui est impossible puisque f n'a qu'un seul point fixe. Donc $g = s_\Delta \circ f = s_{(AB)}$ d'où $f = s_\Delta \circ s_{(AB)}$. Les droites Δ et (AB) étant sécantes en A, f est une rotation de centre A.

□

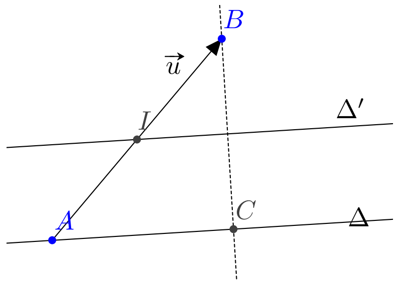


FIGURE 36.5 – Figure de la démonstration

Démonstration du théorème 36.39. Soit $f = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$. Soit $A \in \Delta$, B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, soit C la projection orthogonale de B sur Δ et soit Δ' la parallèle à Δ passant par le milieu I de $[AB]$. Comme
$$t_{\vec{u}} = t_{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}} = t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{CB}}$$
et $t_{\overrightarrow{CB}} = s_{\Delta'} \circ s_\Delta$:
$$f = t_{\overrightarrow{AC}} \circ s_{\Delta'} \circ s_\Delta \circ s_\Delta = t_{\overrightarrow{AC}} \circ s_{\Delta'}.$$

1. $\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow f = s_{\Delta'}$
2. $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0} \Rightarrow f = t_{\overrightarrow{AC}} \circ s_{\Delta'}$ avec $\overrightarrow{AC}$ directeur de Δ'. Donc f est la symétrie glissée $s_{\Delta',\overrightarrow{AC}}$.

□

Démonstration du théorème 36.40. $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta \circ t_{-\vec{u}}$ est un antidéplacement. Si $M \in \Delta$, posons $M_1 = t_{-\vec{u}}(M)$. On a donc $\overrightarrow{MM_1} = -\vec{u}$. $\vec{u}$ étant directeur de Δ, $M_1 \in \Delta$. D'où :
$$t_{\vec{u}} \circ s_\Delta \circ t_{-\vec{u}}(M) = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta(M_1) = t_{\vec{u}}(M_1) = M$$
car $\overrightarrow{M_1M} = \vec{u}$. $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta \circ t_{-\vec{u}}$ est donc un antidéplacement fixant tout point de Δ. Donc $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta \circ t_{-\vec{u}} = s_\Delta$ d'où $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta = s_\Delta \circ t_{\vec{u}}$. □

Démonstration du théorème 36.43. En effet,
$$M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z' - z = z_{\vec{u}}.$$

□

Démonstration du théorème 36.48. Si $z = z_\Omega$, la formule proposée donne bien $z' = z_\Omega$.

Si $z \neq z_\Omega$,
$$\Omega M' = \Omega M \Leftrightarrow \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \Rightarrow \frac{|z' - z_\Omega|}{|z - z_\Omega|} = 1 \Rightarrow \left|\frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}\right| = 1$$
et
$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \Rightarrow \arg \frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = \theta$$
$\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}$ a pour module 1 et pour argument θ. Donc $\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ d'où le résultat. □

Démonstration du théorème 36.48. Soit M d'affixe z, $M' = s_{\Delta_0}(M)$ d'affixe z'. Si $M \notin \Delta_0$, $OM' = OM$ et $(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM'}) = -(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM})$. D'où $|z'| = |z|$ et $\arg(z') - \arg(z) = \arg(\overline{z})$. On en déduit

$$\left|\frac{z'}{\overline{z}}\right| = \frac{|z'|}{|z|} = \frac{|z'|}{|\overline{z}|} = 1$$

et $\arg(\frac{z'}{\overline{z}}) = 0$ d'où $\frac{z'}{\overline{z}} = 1$ puis $z' = \overline{z}$. Si $M \in \Delta_0$, $M' = M$ et donc $z' = z = \overline{z}$ puisque $z \in \mathbb{R}$ (M est sur l'axe des abscisses). □

Démonstration du théorème 36.49. Soit s_Δ la réflexion d'axe Δ d'équation $y = b$. Soit B le point d'affixe $\mathrm{i}b$ et soit $\vec{u} = \overrightarrow{OB}$. $\Delta = t_{\vec{u}}(\Delta_0)$ (où Δ_0 désigne l'axe des abscisses).

$$s_\Delta \circ s_{\Delta_0} = t_{2\vec{u}} \Rightarrow s_\Delta = t_{2\vec{u}} \circ s_{\Delta_0}.$$

L'écriture complexe de s_{Δ_0} est $z' = \overline{z}$, celle de $t_{2\vec{u}}$ est $z' = z + z_{2\vec{u}} = z + 2z_{\vec{u}} = z + 2\mathrm{i}b$. D'où l'écriture complexe de $s_\Delta = z' = \overline{z} + 2\mathrm{i}b$. □

Démonstration du théorème 36.50. Soit s_{Δ_0} la réflexion d'axe $\Delta_0 = (0, \vec{e_1})$.

$$s_\Delta \circ s_{\Delta_0} = r_{\Omega,2\theta} \Rightarrow s_\Delta = r_{\Omega,2\theta} \circ s_{\Delta_0}.$$

L'écriture complexe de $r_{\Omega,2\theta}$ est

$$z' = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$$

et celle de s_{Δ_0} est $z' = \overline{z}$. Donc l'écriture complexe de s_Δ est

$$z' = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}(\overline{z} - \overline{z}_\Omega) + z_\Omega.$$

□

Démonstration du théorème 36.51. L'écriture complexe de $t_{\vec{u}}$ est $z' = z + z_{\vec{u}}$ et celle de s_Δ est $z' = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}(\overline{z} - \overline{z}_\Omega) + z_\Omega$. □

LEÇON

37 Similitudes planes

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S

Prérequis Bijection, notion de fonction. Nombres complexes.

Références [95, 96, 97]

Contenu de la leçon

1 Transformations du plan

Définition 37.1. *On dit qu'une application f du plan dans lui-même est une transformation si f est une bijection du plan dans lui-même, c'est-à-dire si pour tout point N du plan, il existe un et un seul point M du plan tel que $f(M) = N$.*

Exemple 37.2. Une translation, une homothétie, une rotation et une réflexion sont des transformations du plan. L'application identique ou identité, noté id (c'est-à-dire l'application qui à un point M associe M lui-même) est une transformation du plan.

Propriété 37.3.
- *Soit f une transformation du plan. L'application du plan dans lui-même qui à tout point N associe l'unique point M tel que $f(M) = N$ est aussi une transformation du plan. Elle est appelée transformation de f et notée f^{-1}. On a alors $f(M) = N \Leftrightarrow M = f^{-1}(N)$.*
- *Soient f et f' des transformations du plan, la composée $f' \circ f$ est une transformation du plan (il en est de même pour la composée $f \circ f'$).*

Exemple 37.4. Une translation de vecteur $\vec{u}$ est une transformation et sa réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

Une rotation de centre Ω et d'angle α est une transformation et sa réciproque est la rotation de centre Ω et d'angle $-\alpha$.

Une homothétie de centre Ω et de rapport k est une transformation et sa réciproque est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{k}$.

2 Définition et propriétés d'une similitude plane

Exercice 37.5. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = (1+\mathrm{i})\overline{z} + \mathrm{i}$.

1. Soient A, B et C les points d'affixes respectives
$$a = 1 + \mathrm{i},\ b = 2 - \mathrm{i},\ c = -1 - 2\mathrm{i}.$$
Déterminer les affixes des points A', B' et C', images de A, B et C par f. Démontrer que $A'B'C'$ est un triangle semblable au triangle ABC.
2. On considère quatre points M, N, P, Q ($M \neq N$ et $P \neq Q$) dont les images par f sont notées M', N', P', Q'. Démontrer que $\frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ}$. On dit que f conserve les rapports de distance.

Définition 37.6 (Similitude du plan)**.** *On appelle* similitude du plan*, toute transformation f du plan conservant les rapports de distances, c'est-à-dire une transformation du plan pour laquelle pour tous points M, N, P, Q ($M \neq N$ et $P \neq Q$) dont les images par f sont notées M', N', P', Q', on a :*
$$\frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ}.$$

Propriété 37.7. *Soit f une transformation du plan. f est une similitude si et seulement si il existe un réel k strictement positif tel que f multiplie les distances par k, c'est-à-dire : pour tous points M et N dont les images par f sont notées M' et N', on a :*

$$M'N' = kMN.$$

On dit que k est le rapport de la similitude f.

Exercice 37.8. On considère une homothétie de rapport k. Démontrer que h est une similitude. Quel est le rapport de la similitude h ?

Propriété 37.9. *Si f est une similitude de rapport k, alors sa réciproque est une similitude de rapport $k^{-1} = \frac{1}{k}$.*

Si f est une similitude de rapport k et f' une similitude de rapport k', alors les composées $f \circ f'$ et $f' \circ f$ sont des similitudes de rapport kk' (en général on a $f \circ f' \neq f' \circ f$).

Remarque 37.10. Une similitude de rapport 1 est une transformation du plan qui conserve les distances.

Définition 37.11. *Une similitude de rapport 1, c'est-à-dire une transformation qui conserve les distances, est appelée isométrie.*

Exemples 37.12.
1. Les translations, les rotations, les symétriques et leurs composées sont des isométries.
2. L'identité est une isométrie.
3. Une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$, ce n'est pas en général une isométrie.

Propriété 37.13.
1. *Une application du plan dans lui-même ayant pour écriture complexe*
$$z' = az + b \text{ ou } z' = a\overline{z} + b$$
avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ est une similitude de rapport $k = |a|$.
2. *Réciproquement, toute similitude a une écriture complexe de la forme*
$$z' = az + b \text{ ou } z' = a\overline{z} + b$$
avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.

Propriété 37.14. *Une similitude conserve les angles géométriques. Une similitude transforme un triangle en un triangle semblable. C'est-à-dire que si A, B et C sont trois points distincts et A', B' et C' leurs images par une similitude :*

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}, \ \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}, \ \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$$

les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.

Propriété 37.15.
- *Soient A, B et C trois points non alignés. Si f est une similitude telle que $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = C$ alors f est l'application identique (Une similitude qui admet trois points fixes non alignés est l'application identique).*
- *Soient A et B deux points distincts. Si f est une similitude telle que $f(A) = A$ et $f(B) = B$ alors f est l'application identique ou f est la symétrie axiale d'axe (AB).*

3 Similitudes directes

Remarque 37.16. On sait qu'une similitude conserve les angles géométriques. Elle peut conserver les angles orientés ou les transformer en leur opposé.

Définition 37.17 (Similitude directe)**.** *On appelle* similitude directe *toute similitude conservant les angles orientés.*

Propriété 37.18. *Une application du plan dans lui-même est une similitude directe si et seulement si son écriture complexe est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Le rapport de la similitude est alors $k = |a|$.*

Exemples 37.19.
1. L'identité, les translations, les rotations, les homothéties sont des similitudes directes.
2. Les symétries axiales sont des similitudes indirectes.

Propriété 37.20. *Soit f une similitude directe. Il existe un réel θ tel que pour tous points distincts M et N du plan,*
$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{f(M)f(N)}) = \theta \pmod{2\pi}.$$
On dit que l'angle θ est l'angle de la similitude directe f. Si f a pour écriture complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ alors $\theta = \arg(a) \pmod{2\pi}$.

Remarques 37.21.
1. Les translations et les homothéties de rapport positif ont pour angle $\theta = 0 \pmod{2\pi}$.
2. Les homothéties de rapport négatif ont pour angle $\theta = \pi \pmod{2\pi}$.
3. Une rotation d'angle θ a pour angle $\theta \pmod{2\pi}$.

Propriété 37.22.
1. *Si f est une similitude directe de rapport k et d'angle θ alors f^{-1} est une similitude directe de rapport $k^{-1} = \frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.*
2. *Si f et f' sont deux similitudes directes de rapports respectifs k et k' et d'angles respectifs θ et θ', alors la composée $f' \circ f$ est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\theta + \theta'$ (il en est de même pour la composée $f \circ f'$).*

Remarques 37.23.
1. La conservation des angles orientés par une similitude directe et la transformation d'un angle orienté en son opposé par une similitude indirecte font que :
   - la composée d'une similitude directe et d'une similitude indirect est une similitude indirect ;
   - la composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.

Propriété 37.24. *Une similitude directe qui n'est pas une translation a un point invariant (point fixe) unique. Ce point est appelé* centre de la similitude.

Propriété 37.25. *Soit f une similitude directe qui n'est pas une translation. Soit Ω l'unique point invariant de f, k le rapport de f et θ l'angle de f. f est la composée de l'homothétie $h_{\Omega,k}$ de centre Ω et de rapport k et de la rotation $r_{\Omega,\theta}$ de centre Ω et d'angle θ. Ces deux applications commutent, on peut écrire :*
$$f = h_{\Omega,k} \circ r_{\Omega,\theta} = r_{\Omega,\theta} \circ h_{\Omega,k}.$$
Cette décomposition est appelée forme réduite *de la similitude directe f.*

Définition 37.26. *Une similitude directe f qui n'est pas une translation est déterminée par la donnée de son centre Ω, son rapport k et son angle θ. On dit que f est la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ. On notera $f = S_{\Omega,k,\theta}$ (k est un réel strictement positif et θ un réel).*

Cas particuliers Soit $f = S_{\Omega,k,\theta}$

1. Si $k = 1$, la similitude f est une rotation. $f = S_{\Omega,1,\theta} = r_{\Omega,\theta}$.
2. Si $\theta = 0 \pmod{2\pi}$, la similitude f est une homothétie de rapport k. $f = S_{\Omega,k,0} = h_{\Omega,k}$.
3. Si $\theta = \pi \pmod{2\pi}$, la similitude f est une homothétie de rapport $-k$. $f = S_{\Omega,k,\pi} = h_{\Omega,-k}$.

Propriété 37.27. *Soit f une similitude directe ayant pour écriture complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.*
- *Si $a = 1$ et $b = 0$ alors $f = \mathrm{id}$. Tous les points sont invariants par f.*
- *Si $a = 1$ et $b \neq 0$ alors f est une translation de vecteur non nul $\vec{v}$ d'affixe b. f n'a aucun point invariant.*

Remarque 37.28. Une similitude directe ayant au moins deux points invariants est nécessairement l'application identique.

Propriété 37.29. *Soient A, B, A', B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Il existe une et une seule similitude directe f transformant A en A' et B en B'.*

Cas particulier Etant données trois points distincts O, A et B, il existe une et une seule similitude directe de centre O transformant A en B.

Remarque 37.30. Lorsqu'un triangle $A'B'C'$ est l'image par une similitude directe d'un triangle ABC, on dit que ABC et $A'B'C'$ sont directement semblables.

Définition 37.31 (Déplacement)**.** *Une similitude directe de rapport 1 est appelé un* déplacement. *(Un déplacement est une isométrie)*

Remarques 37.32.
1. La réciproque d'un déplacement est un déplacement.
2. La composée de deux déplacements est un déplacement.

Propriété 37.33.
- *Tout déplacement du plan est soit une translation, soit une rotation.*
- *La composée d'une translation et d'une rotation d'angle $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$ est une rotation d'angle π.*
- *La composée de deux rotations d'angles respectifs θ et θ' est :*
  1. *une translation si $\theta + \theta' = 0 \pmod{2\pi}$,*
  2. *une rotation d'angle $\theta + \theta'$ si $\theta + \theta' \neq 0 \pmod{2\pi}$.*

Propriété 37.34. *Soit f une similitude indirecte.*
- *On peut écrire f sous la forme $f = g \circ s$, où s est une symétrie axiale et g une similitude directe.*
- *On peut écrire f sous la forme $f = s' \circ g'$ où s' est une symétrie axiale et g' une similitude directe.*

4 Propriétés géométriques des similitudes planes

Propriétés 37.35. *Soit f une similitude plane. A, B, C, D sont quatre points et on note $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ et $D' = f(D)$.*

1. *f conserve les rapports de distances : c'est-à-dire que si $A \neq B$ et $C \neq D$, on a $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$.*
2. *f conserve les angles géométriques : si A, B et C sont deux à deux distincts, on a $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.*
3. *f conserve l'alignement : si A, B et C sont alignés alors A', B' et C' sont alignés.*
4. *f transforme une droite en droite : si A et B sont distincts, A' et B' sont distincts et la droite $(A'B')$ est l'image par f de la droite (AB).*
5. *f transforme un segment en un segment : si A et B sont distincts, A' et B' sont distincts et le segment $[A'B']$ est l'image par f du segment $[AB]$.*
6. *f conserve le parallélisme et l'orthogonalité :*
   (a) *si (AB) et (CD) sont deux droites parallèles alors $(A'B')$ et $(C'D')$ sont deux droites parallèles,*
   (b) *si (AB) et (CD) sont deux droites perpendiculaires alors $(A'B')$ et $(C'D')$ sont deux droites perpendiculaires.*
7. *f conserve les barycentres : si G est le barycentre de (M_1, α_1), (M_2, α_2), …, (M_n, α_n) (avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$) alors son image G' est le barycentre des images affectées des mêmes coefficients : (M_1', α_1), (M_2', α_2), …, (M_n', α_n).*
8. *f conserve le milieu : si C est le milieu de $[AB]$ alors C' est le milieu de $[A'B']$.*
9. *f transforme un triangle en un triangle semblable : si A, B et C sont deux à deux distincts, alors A', B' et C' sont deux à deux distincts et les triangles $A'B'C'$ et ABC sont semblables (si f est une similitude directe, on dira que les triangles sont directement semblables, si f est une similitude indirecte, on dira que les triangles indirectement semblables).*
10. *f transforme un cercle en un cercle : l'image par f du cercle de centre A et de rayon R est le cercle de centre A' et de rayon kR (où k est le rapport de la similitude f).*

Compléments

1 Démonstrations

Démonstration de la propriété 37.3. – Soit f une transformation du plan. Par définition, pour tout point N du plan, il existe un unique point M du plan tel que $f(M) = N$. Considérons l'application f^{-1} du plan dans lui-même qui à N associe l'unique point M tel que $f(M) = N$. Démontrons que f^{-1} est une transformation du plan. On considère un point P du plan et on pose $Q = f(P)$. On a alors $f^{-1}(Q) = P$. Pour tout point P, il existe donc un point Q tel que $f^{-1}(Q) = P$. Ce point Q est unique. En effet, supposons que Q' soit un point vérifiant $f^{-1}(Q') = P$, on aurait alors $Q' = f(P)$ et par conséquent $Q = Q'$. Pour tout point P du plan, il existe donc un unique point Q du plan tel que $f^{-1}(Q) = P$. Donc f^{-1} est une transformation du plan.

– Soient f et f' deux transformations du plan, considérons l'application $g = f' \circ f$. On démontre que g est une transformation du plan. On considère un point N du plan et on pose $M = f^{-1} \circ {f'}^{-1}(N)$. On a alors :

$$f(M) = f \circ f^{-1} \circ {f'}^{-1}(N) = {f'}^{-1}(N).$$

Donc $f' \circ f(M) = f' \circ {f'}^{-1}(N) = N$, c'est-à-dire $g(M) = N$. Pour tout point N, il existe donc un point M tel que $g(M) = N$. Ce point M est unique : en effet, supposons que M' soit un point vérifiant $g(M') = N$, on aurait alors

$$f' \circ f(M') = N \Leftrightarrow f'^{-1} \circ f' \circ f(M) = f'^{-1}(N) \Leftrightarrow f(M') = f'^{-1}(N) \Leftrightarrow f^{-1} \circ f(M') = f^{-1} \circ f'^{-1}(N)$$

donc $M' = f^{-1} \circ f'^{-1}(N)$, c'est-à-dire $M' = M$. Pour tout point N du plan, il existe donc un unique point M du plan tel que $f' \circ f(M) = N$. Donc $f' \circ f$ est une transformation du plan.
– On peut de plus remarquer que $(f' \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ f'^{-1}$.

□

Démonstration de la propriété 37.7. – Soit f une similitude. On considère deux points distincts P et Q du plan et soient P' et Q' leurs images par f. On pose $k = \frac{P'Q'}{PQ}$. k étant le rapport de deux distances, k est un réel réel positif. Comme f est une transformation, deux points distincts ont nécessairement deux images distinctes, on a donc $k \neq 0$.
– On considère deux points distincts M et N. f étant une similitude, f conserve les rapports de distances. On a donc

$$\frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ} \Leftrightarrow \frac{M'N'}{MN} = \frac{P'Q'}{PQ} \Leftrightarrow \frac{M'N'}{MN} = k \Leftrightarrow M'N' = kMN.$$

D'autre part, si M et N sont confondus, on a aussi $M'N' = kMN$. On a donc démontré que pour toute similitude f, il existe un réel k positif, tel que f multiplie les distances par k.
– Réciproquement supposons que f est une transformation pour laquelle il existe un réel k strictement positif tel que f multiplie les distances par k. Alors soient M, N, P, Q ($M \neq N$ et $P \neq Q$) dont les images par f sont notées M', N', P', Q'. On a :

$$M'N' = kMN \quad \text{et} \quad P'Q' = kPQ \Leftrightarrow \frac{M'N'}{MN} = k \quad \text{et} \quad \frac{P'Q'}{PQ} = k \Leftrightarrow \frac{M'N'}{MN} = \frac{P'Q'}{PQ} \Leftrightarrow \frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ}.$$

On a donc démontré que toute transformation multipliant les distances par un réel $k > 0$ est une similitude.

□

Démonstration de la propriété 37.9. – Soit f une similitude de rapport k et f^{-1} sa réciproque. f^{-1} est la réciproque d'une transformation du plan. Notons $M' = f^{-1}(M)$ et $N' = f^{-1}(N)$. Alors, par définition de f^{-1}, on sait que $f(M') = M$ et $f(N') = N$. f étant une similitude de rapport k, on a $MN = kM'N'$ donc $M'N' = \frac{1}{k}MN$. La transformation f^{-1} multiplie donc les distances par $\frac{1}{k}$. Donc f^{-1} est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.
– Soit f une similitude de rapport k et f' une similitude de rapport k'. $f \circ f'$ est la composée de deux transformations du plan, donc $f \circ f'$ est une transformation du plan. Soient M et N deux points distincts du plan. Notons $M' = f'(M)$, $N' = f'(N)$, $M'' = f(M')$ et $N'' = f(N')$. f' étant une similitude de rapport k', on a $M'N' = k'MN$. f étant une similitude de rapport k, on a $M''N'' = kM'N'$. On en déduit

$$M''N'' = kM'N' = k(k'MN) = kk'MN.$$

Aux points M et N, la composée $f \circ f'$ associe M'' et N''. Sachant que l'on a $M''N'' = kk'MN$, on en déduit que $f \circ f'$ est une similitude de rapport kk'.
– Le résultat précédent appliqué à f' et f montre aussi que $f' \circ f$ est une similitude de rapport $k'k = kk'$.

□

Démonstration de la propriété 37.13. – Soit f une application du plan dans lui-même ayant pour écriture complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. f est une transformation du plan car pour tout point N d'affixe z', il existe un et un seul point M ayant pour image N. C'est le point d'affixe z avec $z = \frac{z'-b}{a}$. Considérons deux points distincts M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2, leurs images M_1' et M_2' ont pour affixes

$$z_1' = az_1 + b \quad \text{et} \quad z_2' = az_2 + b$$

Alors

$$z_1' - z_2' = a(z_1 - z_2) \Rightarrow |z_1' - z_2'| = |a|\,|z_1 - z_2|\,, \quad \text{c'est-à-dire } M_1'M_2' = |a|\,M_1M_2.$$

Donc f est une transformation multipliant les distances par $k = |a|$. On a $k > 0$ puisque $a \in \mathbb{C}^*$. Donc f est une similitude de rapport k.

– De la même façon soit f une application du plan dans lui-même ayant pour écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$. f est une transformation du plan car tout point N d'affixe z', il existe un et un seul point M ayant pour image N. C'est le point d'affixe z avec $\overline{z} = \frac{z'-b}{a}$, c'est-à-dire :

$$z = \overline{\left(\frac{z'-b}{a}\right)} = \frac{\overline{z'} - \overline{b}}{\overline{a}}.$$

Considérons deux points distincts M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2, leurs images M_1' et M_2' ont pour affixes

$$z_1' = a\overline{z_1} + b \quad \text{et} \quad z_2' + a\overline{z_2} + b.$$

Alors $z_1' - z_2' = a(\overline{z_1} - \overline{z_2})$ donc

$$|z_1' - z_2'| = |a|\,|\overline{z_1} - \overline{z_2}| = |a|\,|\overline{z_1 - z_2}| = |a|\,|z_1 - z_2|\,,$$

c'est-à-dire $M_1'M_2' = |a|\,M_1M_2$. Donc f est une transformation multipliant les distances par $k = |a|$. On a $k > 0$ puisque $a \in \mathbb{C}^*$. Donc f est une similitude de rapport k.

– Réciproquement, on se place dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Considérons une similitude s. Soit I le point d'affixe 1 et J le point d'affixe i. On note O', I', J' les images par s de O, I et J. Le triangle OIJ est un triangle rectangle isocèle. Notons k le rapport de la similitude s. Comme s multiplie les distances par k, on a :

$$I'J' = kIJ,\ O'I' = kOI,\ O'J' = kOJ.$$

On sait que $OI = OJ$ donc $O'I' = O'J'$ donc le triangle $O'I'J'$ est isocèle en O'. De plus $IJ^2 = OI^2 + OJ^2$ donc $I'J'^2 = O'I'^2 + O'J'^2$ donc $O'I'J'$ est rectangle en O". Le triangle $O'I'J'$ est donc rectangle isocèle en O'. J' est l'image de I' par une rotation de centre O' et d'angle θ avec $\theta = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

1. Supposons que $\theta = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ On note b l'affixe de O' et α l'affixe de I'. On considère la similitude S dont l'écriture complexe est $z = (\alpha - b)z + b$. On démontre que $s = S$. Le point O a pour affixe 0. Donc O a pour image par S le point d'affixe $z' = b$ donc $S(O) = O'$. Le point I a pour affixe 1. Donc I a pour image par S le point d'affixe $z' = \alpha - b + b = \alpha$ donc $S(I) = I'$. Le rapport de la similitude S est $\frac{O'I'}{OI}$, il est donc égal au rapport k de la similitude s. Le point J a pour affixe i. Donc J a pour image par S le point d'affixe $z' = (\alpha - b)\mathrm{i} + b$. On peut écrire $z' - b = \mathrm{i}(\alpha - b)$, donc $S(J)$ est l'image de I' par la rotation de centre O' et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Donc $S(J) = J'$. Les trois points O, I et J ont donc les mêmes images par la similitude s et par la similitude S.

   Montrons qu'il en est de même pour tout point M. Considérons un point M quelconque et on note m' son image par la similitude s et M' son image par S. O' et m' étant les images de O et de M par s, on a $O'm' = kOM$. O' et M' étant les images de O et de M par S, on a $O'M' = kOM$. Donc $O'M' = O'm'$. De même on peut démontrer que

   $$I'M' = I'm' \quad \text{et} \quad J'M' = J'm'.$$

   Supposons que M' et m' sont distincts, alors les points O', I' et J' sont tous trois équidistants de M' et m', ils sont donc tous les trois sur la médiatrice de $[M'm']$. Or les points O', I' et J' ne sont pas alignés (puisque $O'I'J'$ est un triangle isocèle rectangle). On a donc une contradiction. Donc M' et m' sont confondus. Tout point M a donc la même image par s et par S.

   Donc les applications S et s sont égales.

s a donc pour écriture complexe $z' = (\alpha - b)z + b$. Cette écriture complexe est de la forme $z' = az + b$ avec $a = \alpha - b$. On a $\alpha \neq b$ car $I' \neq O'$ (puisque $I \neq O$) c'est-à-dire que $a \neq 0$. On a donc $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, s a donc pour écriture complexe

$$z' = az + b, \quad a \in \mathbb{C}^*, \; b \in \mathbb{C}.$$

2. Supposons que $\theta = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. Notons b l'affixe de O' et α l'affixe de I'. On considère la similitude S dont l'écriture complexe est

$$z' = (\alpha - b)\overline{z} + b.$$

On montre que $s = S$. Le point O a pour affixe. Donc O a pour image par S le point d'affixe $z' = b$, donc $S(O) = O'$. Le point I a pour affixe 1. Donc I a pour image par S le point d'affixe $z' = \alpha - b + b = \alpha$ donc $S(I) = I'$. Le rapport de la similitude S est $\frac{O'I'}{OI}$, il est donc égal au rapport k de la similitude s. Le point J a pour affixe i. Donc J a pour image par S le point d'affixe $z' = (\alpha - b)\overline{\mathrm{i}} + b$. On peut écrire $z' - b = -\mathrm{i}(\alpha - b)$, donc $S(J)$ est l'image par I' par la rotation de centre O' et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Donc $J' = S(J)$. Les trois points O, I et J ont donc les mêmes images par la similitude s et par la similitude S.

Montrons qu'il en est de même pour tout point M. Considérons un point M quelconque. Notons m' son image par la similitude s et M' son image par S. O' et m' étant les images de O et de M par s, on a $O'm' = kOM$. O' et M' étant les images de O et de M par S, on a $O'M' = kOM$. Donc $O'M' = O'm'$. De même, on peut démontrer que

$$I'M' = I'm' \quad \text{et} \quad J'M' = J'm'.$$

Supposons que M' et m' sont distincts, alors les points O', I' et J' sont tous trois équidistants de M' et m', ils sont donc tous les trois sur la médiatrice de $[M'm']$. Or les points O', I' et J' ne sont pas alignés (puisque $O'I'J'$ est un triangle isocèle rectangle). On a donc une contradiction. Donc M' et m' sont confondus. Tout point M a donc la même image par s et par S.

Donc les applications S et s sont égales.

s a donc une écriture complexe $z' = (\alpha - b)\overline{z} + b$. Cette écriture complexe est de la forme $z' = a\overline{z} + b$ avec $a = \alpha - b$. On a $\alpha \neq b$ car $I' \neq O'$ (puisque $I \neq O$) c'est-à-dire que $a \neq 0$. On a donc $z' = (\alpha - b)\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$. s a donc pour écriture complexe

$$z' = a\overline{z} + b, \quad a \in \mathbb{C}^*, \; b \in \mathbb{C}.$$

□

Démonstration de la propriété 37.14. On considère une similitude f de rapport k. Soient A, B et C trois points distincts. On note z_A, z_B et z_C leurs affixes dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct. On sait que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \pmod{2\pi}$.

1. Si f a pour écriture $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ alors les images A', B' et C' des points A, B et C ont pour affixes :

$$z_{A'} = az_A + b, \; z_{B'} = az_B + b, \; z_{C'} = az_C + b.$$

Alors

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) &= \arg \frac{z_{C'} - z_{A'}}{z_{B'} - z_{A'}} = \arg \frac{az_C + b - az_A - b}{az_B + b - az_A + b} \\ &= \arg \frac{az_C - az_A}{az_B - az_A} = \arg \frac{a(z_C - z_A)}{a(z_B - z_A)} = \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}.\end{aligned}$$

On a donc $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. f conserve donc les angles orientés et par conséquent f conserve les angles géométriques.

2. Si f a pour écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, alors les images A', B' et C' des points A, B et C ont pour affixes :

$$z_{A'} = a\overline{z_A} + b,\ z_{B'} = a\overline{z_B} + b,\ z_{C'} = a\overline{z_C} + b.$$

Alors

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) &= \arg \frac{z_{C'} - z_{A'}}{z_{B'} - z_{A'}} = \arg \frac{a\overline{z_C} + b - a\overline{z_A} - b}{a\overline{z_B} + b - a\overline{z_A} - b} \\ &= \arg \frac{a\overline{z_C} - a\overline{z_A}}{a\overline{z_B} - a\overline{z_A}} = \arg \frac{a(\overline{z_C} - \overline{z_A})}{a(\overline{z_B} - \overline{z_A})} \\ &= \arg \frac{\overline{z_C} - \overline{z_A}}{\overline{z_B} - \overline{z_A}} = \arg \overline{\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)} = -\arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}.\end{aligned}$$

On a donc $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et par conséquent $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$. f transforme un angle orienté en son opposé et f conserve les angles géométriques.

Soit ABC un triangle et soient A', B' et C' les images des points A, B et C par une similitude f de rapport k. On a

$$A'B' = kAB,\ A'C' = kAC \quad \text{et} \quad B'C' = kBC.$$

Puisque ABC est un triangle, les points A, B et C sont donc deux à deux distincts. Les égalités précédentes montrent alors que les points A', B' et C' sont aussi deux à deux distincts ($k > 0$). Comme la similitude f conserve les angles géométriques, les trois points A', B' et C' forment un triangle dont les angles sont respectivement égaux aux angles du triangle ABC. Donc $A'B'C'$ est un triangle semblable au triangle ABC. L'image par une similitude f d'un triangle ABC est donc un triangle $A'B'C'$ semblable au triangle ABC. □

Démonstration de la propriété 37.15.

– Soient A, B et C trois points non alignés. Soit f une similitude telle que

$$f(A) = A, \quad f(B) = B, \quad f(C) = C.$$

Le rapport de la similitude f est

$$k = \frac{f(A)f(B)}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1.$$

Donc f est une isométrie.

– Soit M un point du plan et soit $M' = f(M)$. Supposons que $M' \neq M$. Comme f est une isométrie on a $f(A)f(M) = AM$. Sachant que $f(A) = A$ et $f(M) = M'$, on obtient $AM' = AM$. Par conséquent, A se trouve sur la médiatrice de $[MM']$. On démontrerait de même que B et C sont sur la médiatrice de $[MM']$. On a alors une contradiction puisque les points A, B et C non alignés seraient tous les trois sur la médiatrice de $[MM']$. On ne peut donc pas supposer que $M' \neq M$. Pour tout point M du plan, on a donc $M' = M$ c'est-à-dire $f(M) = M$. Par conséquent f est l'application identique.
– Soit A et B deux points distincts. Soit f est une similitude telle que

$$f(A) = A \quad \text{et} \quad f(B) = B$$

On a $f(A)f(B) = AB$, on peut en déduire que le rapport de la similitude f est 1. Donc f est une isométrie.
– Considérons un point M n'appartenant à la droite (AB). Soit $M' = f(M)$.

   1. Si $M' = M$ alors f admet trois points fixes non alignés, donc f est l'identité.

2. Si $M' \neq M$, alors comme f est une isométrie, on a $f(A)f(M) = AM$ donc $AM' = AM$. De même $BM' = BM$. On en déduit que A et B sont sur la médiatrice de $[MM']$, donc (AB) est la médiatrice de $[MM']$. Considérons s la symétrie d'axe (AB). On a

$$s \circ f(A) = s(A), \quad s \circ f(B) = s(B) = B$$

et de plus

$$s \circ f(M) = s(M') \quad \text{et} \quad s(M') = M$$

puisque (AB) est la médiatrice de $[MM']$. Donc $s \circ f$ est une similitude admettant trois points fixes non alignés, donc $s \circ f = \mathrm{id}$. Donc $s \circ s \circ f = s$ et $\mathrm{id} \circ f = s$ donc $f = s$. Donc f est la symétrie axiale d'axe (AB).

□

Démonstration de la propriété 37.18.
- Soit f une application du plan dans lui-même ayant pour écriture complexe

$$z' = az + b \quad \text{avec } a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}.$$

On a vu que f est une similitude de rapport $k = |a|$ et que f conserve les angles orientés. Donc f est une similitude de rapport $k = |a|$.
- Soit f une similitude directe. Alors f est une similitude. On a vu que f a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. De plus, on a vu que si f a pour écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$, alors f ne conserve pas les angles orientés. Donc f a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

□

Démonstration de la propriété 37.20. Soit f une similitude directe. f a pour écriture complexe

$$z' = az + b, \quad \text{avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}.$$

Soient M et N deux points distincts du plan d'affixes respectives z_1 et z_2. Leurs images $f(M)$ et $f(N)$ ont pour affixes $z_1' = az_1 + b$ et $z_2' = az_2 + b$. On sait alors que

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{f(M)f(N)}) = \arg \frac{z_2' - z_1'}{z_2 - z_2} = \arg \frac{az_2 + b - az_1 - b}{z_2 - z_1} = \arg \frac{az_2 - az_1}{z_2 - z_1} = \arg(a) \pmod{2\pi}.$$

En posant $\theta = \arg(a)$, on obtient

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{f(M)f(N)}) = \theta \pmod{2\pi}.$$

Il existe donc un réel θ tel que pour tous points distincts M et N du plan,

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{f(M)f(N)}) = \theta \pmod{2\pi}.$$

□

Démonstration de la propriété 37.22.
- Soit f une similitude directe de rapport k et d'angle θ. f a pour écriture complexe

$$z' = az + b, \quad \text{avec } a = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, b \in \mathbb{C}.$$

On peut alors écrire $z = \frac{1}{a}z' - \frac{b}{a}$. L'écriture complexe de f^{-1} est donc

$$z' = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}, \quad \text{avec } \tfrac{1}{a} = \tfrac{1}{k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \tfrac{1}{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$

Donc f^{-1} est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.

– Soient f et f' sont des similitudes directes de rapports respectifs k et k' et d'angles respectifs θ et θ'. f et f' ont pour écritures complexes respectives :

$$z' = az + b \quad \text{et} \quad z' = a'z + b', \quad \text{avec } a = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ a' = k'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'},\ b, b' \in \mathbb{C}.$$

Alors l'image du point M d'affixe z par la composée $f' \circ f$ est le point M'' d'affixe :

$$z'' = a'z' + b' = a'(az + b) + b' = a'az + a'b + b'.$$

Cette écriture est bien l'écriture complexe d'une similitude directe puisque $aa' \in \mathbb{C}^*$ et $a'b + b' \in \mathbb{C}$. De plus, on a

$$aa' = (k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(k'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}) = kk'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}.$$

Donc $f' \circ f$ est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\theta + \theta'$.

– Géométriquement, il est immédiat que :
  1. Si f conserve les angles orientés, alors sa réciproque f^{-1} les conserve aussi.
  2. Si f et f' conservent les angles orientés, alors la composée $f' \circ f$ les conserve aussi.

  Et en considérant la définition du rapport et de l'angle d'une similitude directe :
  1. Si f a pour rapport k, alors sa réciproque f^{-1} a pour rapport $\frac{1}{k}$.
  2. Si f et f' ont pour rapports k et k', alors la composée $f' \circ f$ a pour rapport kk'.
  3. Si f a pour angle θ, alors sa réciproque f^{-1} a pour angle $-\theta$.
  4. Si f et f' ont pour angles θ et θ', alors la composée $f' \circ f$ a pour angle $\theta + \theta'$.

□

Démonstration de la propriété 37.24. Soit f une similitude directe. f a pour écriture complexe

$$z' = az + b, \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}.$$

1. Si $a = 1$ alors $z' = z + b$, donc f est la translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe b.
   (a) Si $b \neq 0$, f n'a pas de point invariant.
   (b) Si $b = 0$, $f = \mathrm{id}$ donc tous les points sont invariants par f.
2. Si a $\neq 1$ alors un point M d'affixe z est invariant par f si et seulement si :

$$z = az + b \Leftrightarrow z(1 - a) = b \Leftrightarrow z = \frac{b}{1 - a}.$$

   Donc f a un point invariant unique d'affixe $\frac{b}{1-a}$.

Si f n'est pas une translation, alors $a \neq 1$ et f a un point invariant unique. □

Démonstration de la propriété 37.25. Soit f une similitude directe qui n'est pas une translation. On sait que f a une écriture complexe de la forme

$$z' = az + b, \quad \text{avec } a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}.$$

On a vu que le rapport de f est $k = |a|$ et que l'angle de f est $\theta = \arg(a) \pmod{2\pi}$. On sait que f a un point invariant unique. Notons le Ω.

Alors pour tout M d'affixe z, le point $M' = f(M)$ a pour affixe $z' = az + b$. Ω étant invariant par f, en notant ω son affixe, on peut écrire $\omega = a\omega + b$. Donc

$$z' - \omega = az + b - a\omega - b \Leftrightarrow z' - \omega = a(z - \omega) \Leftrightarrow z' - \omega = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega).$$

L'écriture complexe de f peut donc s'écrire sous la forme :

$$z' - \omega = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega).$$

On sait que l'homothétie $h_{\Omega,k}$ de centre Ω et de rapport k a pour écriture complexe

$$z' - \omega = k(z - \omega).$$

On sait que la rotation $r_{\Omega,\theta}$ de centre Ω et d'angle θ a pour écriture complexe

$$z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega).$$

Alors la composée $h_{\Omega,k} \circ r_{\Omega,\theta}$ a pour écriture complexe

$$z' - \omega = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega).$$

De même la composée $r_{\Omega,\theta} \circ h_{\Omega,k}$ a aussi pour écriture complexe

$$z' - \omega = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega).$$

Cette écriture complexe est aussi l'écriture complexe de f.

On a donc $f = h_{\Omega,k} \circ r_{\Omega,\theta} = r_{\Omega,\theta} \circ k_{\Omega,k}$. □

Démonstration de la propriété 37.27. Soit f une similitude directe ayant pour écriture complexe

$$z' = az + b\text{avec } a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}.$$

1. Si $a = 1$ et $b = 0$ alors f a pour écriture complexe $z' = z$ donc $f = \mathrm{id}$. Tous les points sont invariant par f.
2. Soit $a = 1$ et $b \neq 0$ alors f a pour écriture complexe $z' = z + b$ donc f est une translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe b. $b \neq 0$ donc $\vec{v} \neq \vec{0}$ donc f n'a aucun point invariant.
3. Si $a \neq 1$ alors f n'est pas une translation et on a vu précédemment que f est une similitude directe de centre Ω de rapport k et d'angle θ où Ω est l'unique point invariant de f, $k = |a|$ et $\theta = \arg(a) \pmod{2\pi}$.

□

Démonstration de la propriété 37.29. Soient A, B, A', B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Notons $z_A, z_B, z_{A'}, z_{B'}$ leurs affixes respectives. Rechercher une similitude directe transformant A en A' et B en B' revient à chercher deux nombres complexes a et b, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ tels que

$$z_{A'} = az_A + b \quad \text{et} \quad z_{B'} = az_B + b.$$

On peut écrire

$$\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} - z_{A'} = az_B + b - az_A - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} - z_{A'} = a(z_B - z_A) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = z_{A'} - az_A \\ a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = z_{A'} - \left(\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}\right) z_A \\ a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} \end{cases}.$$

On a suppose $A \neq B$ et $A' \neq B'$ donc on a trouvé un et un seul couple (a, b) avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b \end{cases}.$$

Il existe donc une et une seule similitude directe transformant A en A' et B en B'. □

Démonstration de la propriété 37.33. 1. Soit f un déplacement du plan. Supposons que f n'est pas une translation. Alors f est une similitude de centre Ω, de rapport k et d'angle θ : $f = S_{\Omega,k,\theta}$. Comme f est un déplacement, on a $k = 1$. Donc $f = S_{\Omega,1,\theta} = r_{\Omega,\theta}$. Un déplacement est donc, soit une translation, soit une rotation.

2. Soient t une translation et r une rotation d'angle $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$. t et r sont des déplacements. Leur composée est donc un déplacement (similitude directe de rapport 1). Donc $r \circ t$ est un déplacement, c'est-à-dire une similitude directe de rapport 1. L'angle de cette similitude directe est la somme des angles des similitudes directes t et r. Donc $r \circ t$ est une similitude directe d'angle $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$ et de rapport 1, c'est-à-dire que $r \circ t$ une rotation d'angle θ.

   On pourrait faire un raisonnement identique avec $t \circ r$.

3. Soient r et r' deux rotations d'angles respectifs θ et θ'. r et r' sont des similitudes directes de rapport 1 et d'angles respectifs θ et θ'. Donc $r \circ r'$ est une similitude directe de rapport 1 et d'angle $\theta + \theta'$. $r \circ r'$ est un déplacement, donc $r \circ r'$ est une translation ou une rotation.

   (a) Si $\theta + \theta' = 0 \pmod{2\pi}$ alors $r \circ r'$ est une translation. (Une rotation d'angle nul est l'application identique, donc c'est la translation de vecteur nul)

   (b) Si $\theta + \theta' \neq 0 \pmod{2\pi}$ alors $r \circ r'$ ne peut pas être une translation, donc $r \circ r'$ est une rotation d'angle $\theta + \theta'$.

□

Démonstration de la propriété 37.34. Soit f une similitude indirecte. On considère une symétrie axiale s et on pose $g = f \circ s$. Alors f et s étant des similitudes indirectes, $g = f \circ s$ est une similitude directe. En composant $g$avec s, on obtient $g \circ s = f \circ s \circ s$. s étant une symétrie axiale, on sait que $s \circ s = \mathrm{id}$, on en déduit alors $g \circ s = f \circ \mathrm{id} = f$. On a donc $f = g \circ s$, où s est une symétrie axiale et g une similitude directe.

De la même façon, en considérant une symétrie axiale s' on peut poser $g' = s' \circ f$. Alors f et s' étant des similitudes indirectes, $g' = s' \circ f$ est une similitude directe. En composant s' avec g', on obtient

$$s' \circ g' = s' \circ s' \circ f.$$

s' étant une symétrie axiale, on sait que $s' \circ s' = \mathrm{id}$, on en déduit alors

$$s' \circ g' = \mathrm{id} \circ f = f.$$

On a donc $f = s' \circ g'$ où s' est une symétrie axiale et g' est une similitude directe. □

Démonstration de la propriété 37.35. Soit f une similitude plane. Si f est une similitude directe, on sait que f est une translation ou la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre. Si f n'est pas une similitude directe, on sait que f est la composée d'une similitude directe et d'une symétrie par rapport à une droite.

1. f conserve les rapports de distances : c'est la définition même d'une similitude.
2. f conserve les angles géométriques : on peut voir la démonstration de la propriété 37.14.
3. f transforme une droite en une droite. On sait qu'une homothétie, une rotation, une symétrie transforme une droite en une droite. Par composition de ces applications, on obtient le résultat pour les similitudes.
4. f transforme un segment en un segment. On sait qu'une homothétie, une rotation, une symétrie transforme un segment en un segment. Par composition de ces applications, on obtient le résultat pour les similitudes.
5. f conserve le parallélisme et l'orthogonalité. Comme f conserve les angles géométriques, elle conserve le parallélisme et l'orthogonalité.
6. f conserve le barycentre. Soit G est le barycentre de (M_1, α_1), (M_2, α_2), ..., (M_n, α_n) (avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$). En notant $z_1, z_2, \dots, z_n$ les affixes de $M_1, M_2, \dots, M_n$, on sait que

$$z_G = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}.$$

Si f a pour écriture complexe $z' = az + b$, alors

$$\begin{aligned}
z_{G'} &= az_G + b = a\left(\frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}\right) + b \\
&= \frac{\alpha_1 az_1 + \alpha_2 az_2 + \cdots + \alpha_n az_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} + \frac{b(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \\
&= \frac{\alpha_1(az_1 + b) + \alpha_2(az_2 + b) + \cdots + \alpha_n(az_n + b)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} = \frac{\alpha_1 z_1' + \alpha_2 z_2' + \cdots + \alpha_n z_n'}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}.
\end{aligned}$$

On en déduit que G' est le barycentre de (M_1', α_1), (M_2', α_2), …, (M_n', α_n).
Si f a pour écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$ alors

$$\begin{aligned}
z_{G'} &= a\overline{z_G} + b = a\overline{\left(\frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}\right)} = \left(\frac{\alpha_1 \overline{z_1} + \alpha_2 \overline{z_2} + \cdots + \alpha_n \overline{z_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}\right) + b \\
&= \frac{\alpha_1 a\overline{z_1} + \alpha_2 a\overline{z_2} + \cdots + \alpha_n a\overline{z_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} + \frac{b(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \\
&= \frac{\alpha_1(a\overline{z_1} + b) + \alpha_2(a\overline{z_2} + b) + \cdots + \alpha_n(a\overline{z_n} + b)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} = \frac{\alpha_1 z_1' + \alpha_2 z_2' + \cdots + \alpha_n z_n'}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}.
\end{aligned}$$

7. f conserve le milieu. Le milieu étant l'isobarycentre de deux points, la propriété se déduit de la propriété sur les barycentres.
8. f transforme un triangle en un triangle isocèle (voir la démonstration de la propriété 37.14).
9. f transforme un cercle en un cercle. On considère un cercle de centre A et de rayon R. Soit M un point de ce cercle. On a $AM = R$. Si k est le rapport de la similitude f, on sait que f multiplie les distances par k. On a alors $A'M' = kAM$ donc $A'M' = kR$ donc M' est sur le cercle de centre A' et de rayon kR. Inversement, en utilisant la réciproque de f, on peut démontrer de même que pour tout point M' du cercle de centre A' et de rayon kR est l'image par f d'un point M du cercle de centre A et de rayon R. L'image par f du cercle de centre A et de rayon R est le cercle de centre A' et de rayon kR.

□

LEÇON

38 Problèmes de constructions géométriques

Niveau, prérequis, références

Niveau Tous niveaux

Prérequis Propriétés géométriques des quadrilatères particuliers

Références [98, 99]

Contenu de la leçon

1 Programme de construction

Définition 38.1. *Un* programme de construction *est un texte qui permet d'établir une figure géométrique. On retrouve ce programme de construction au début d'un exercice de géométrie de collège ou de de lycée.*

Dans cette leçon, on présente quelques programmes de construction pouvant être vus au collège. On donnera, en plus de la démonstration, une construction détaillée sur le logiciel Geogebra. Tout ce qui est dans un cadre bleu est à taper sur la barre de saisie.

2 Un quadrilatère particulier

Exercice 38.2. Tracer un triangle dont les côtés ont pour longueurs $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 5$. Tracer les symétriques B' et C' de B et C par rapport à A. Que peut-on dire du quadrilatère $BCB'C'$?

Construction sur Geogebra. On trace un point A quelconque. Par exemple :

```
A = (0,0)
```

On veut tracer B tel que $AB = 3$. Pour faciliter les choses, on peut écrire :

```
B = (3,0)
```

et on vérifie en traçant

```
a = Segment[A,B]
```

et en regardant la longueur du segment a en haut à gauche. Ensuite pour tracer le point C tel que $AC = 4$ et $BC = 5$. On trace deux cercles :

```
c = Cercle[A,4]
d = Cercle[B,5]
```

puis, pour obtenir le point C, on tape :

```
Intersection[c,d]
```

Deux points C et D apparaissent. On peut masquer le point D en cliquant droit sur la point et en décochant l'option « *Afficher l'objet* ». On obtient le triangle ABC tel que $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 5$ en tapant :

```
Polygone[A,B,C]
```

Ensuite, on trace les symétriques B' et C' de B et C par rapport à A.

```
Symetrie[B,A]
Symetrie[C,A]
```

On obtient ainsi un quadrilatère $BCB'C'$

```
Polygone[B,C,B',C']
```

qui est un losange. Encore faut-il le démontrer !

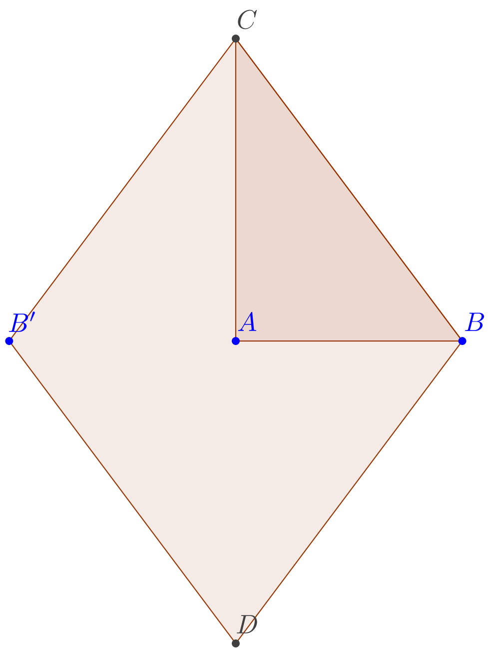


FIGURE 38.1 – Figure obtenue par Geogebra

□

Solution à la question. Le quadrilatère $BCB'C'$ admet A comme centre de symétrie, c'est un parallélogramme. Par la réciproque de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A. Les diagonales $BCB'C'$ sont perpendiculaires donc ce parallélogramme est un losange. □

3 L'œuf

Cette activité peut être réalisée en classe de troisième.

Exercice 38.3. 1. Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 3.

2. Soit I un point du cercle $\mathcal{C}$, tracer un cercle $\mathcal{C}'$ de rayon $6-3\sqrt{2}$.
3. Placer A et B tels que $[AB]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ perpendiculaire à (OI).
4. Tracer les droites (AI) et (BI).
5. Soit A' l'intersection de (BI) et du cercle $\mathcal{C}'$ tel que A' n'appartient pas au segment $[BI]$.
6. Soit B' l'intersection de (AI) au cercle $\mathcal{C}'$ tel que B' n'appartient pas au segment $[AI]$.
7. Tracer les arcs de cercle suivants :
   – l'arc de cercle de centre : A passant par B, B' ;

– l'arc de cercle de centre : B passant par A, A' ;
– l'arc de cercle de centre : I passant par A', B' ;
– l'arc de cercle de centre : O passant par A, B ;

Etape de construction sur Geogebra.

```
O = (0,0)
Cercle[O,3]
I = Point(c)
Cercle[I,6-3*sqrt(2)]
Droite[O,I]
Perpendiculaire[O,a]
Droite[A,I]
Droite[B,I]
Intersection[d,e]
Intersection[d,f]
# Effacer les points qui sont sur le segment [AI] et [BI]
# Renommer les points restants C et D en A' et B'
ArcCercle[A,B',B]
ArcCercle[B,A,A']
ArcCercle[I,B',A']
ArcCercle[O,B,A]
```

□

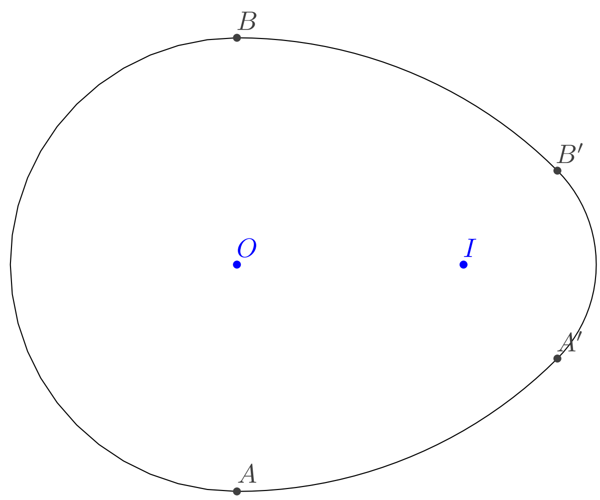


FIGURE 38.2 – Un oeuf

4 Le décagone

L'exercice suivant permet de construire le décagone.

Exercice 38.4 (Construction du décagone).

1. Tracer un cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O et un diamètre $[IA]$.
2. Tracer un cercle $\mathcal{C}_2$ de centre I et de rayon IA.
3. Construire B tel que $[IB]$ soit un rayon perpendiculaire à $[IA]$.

4. Construire K et J tels que la droite (BO) rencontre le petit cercle en J et K $(BJ < BK)$.
5. Tracer le cercle $\mathcal{C}_3$ de centre B passant par J.
6. Construire B_1 (et B_9), intersection entre $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.
7. Tracer le cercle $\mathcal{C}_4$ de rayon $[B_1B]$.
8. Construire B_2 l'intersection entre $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_4$.

ainsi de suite... et on obtient dix points $B, B_1, B_2, \dots, B_9$ qui si on les relie par des lignes, forment un décagone.

Construction sur Geogebra.

```
O = (0,0)
I = (-2,0)
A = (2,0)
Cercle(O,I)
Cercle(I,A)
Droite(I,A)
Perpendiculaire(I,A)
Intersection(a,d)
# Renommer le point C en B_5
Intersection(c,e)
# Renommer le point C en J
# Renommer le point D en K
Cercle[B,J]
Intersection[d,f]
# Renommer le point C en B_1
# Renommer le point D en B_9
Cercle[B_1,B]
Intersection[d,g]
# Ne pas afficher le point C
# Renommer le point D en B_2
Cercle[B_2,B_1]
Intersection[d,h]
# Ne pas afficher le point C
# Renommer le point D en B_3
...
```

□

5 Dodécagone

Exercice 38.5. Le but de cet exercice est de tracer un dodécagone avec une règle et un compas.

1. Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $OA = 1$.
2. Tracer le triangle équilatéral OIA.
3. Tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{IAO}$, elle coupe le cercle $\mathcal{C}$ en un point B.
4. Tracer la perpendiculaire de (OI) passant par O. Elle coupe le cercle $\mathcal{C}$ en un point J.
5. Tracer A', B', I' les points symétriques de A, B et I (respectivement) par rapport à la droite (OJ).
6. Tracer A'', B'', J' les points symétriques de A, B et J par rapport à O.
7. Tracer A''', B''' les points symétriques de A et B par rapport à (OI).

En reliant par des lignes droites, les points $I, B, A, J, A', B', I', B'', A'', J', A''', B'''$, on obtient un dodécagone.

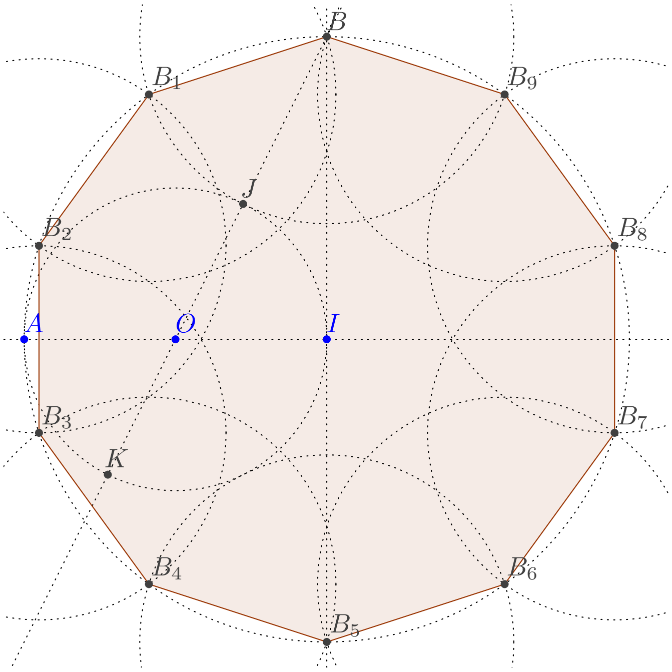


FIGURE 38.3 – Décagone sur Geogebra

Construction sur Geogebra.

```
O = (0,0)
I = (2,0)
Cercle[O,I]
```

Les trois instructions suivantes permettent de construire un triangle équilatéral OIA.

```
Cercle[I,O]
Intersection[c,d]
# Ne pas afficher le point B
Segment[O,I]
Segment[O,A]
Segment[I,A]
Bissectrice[a,b]
```

A cette étape là, deux bissectrices s'affichent. Il faut conserver celle qui coupe le segment $[IA]$ (on peut donc ne pas afficher l'autre bissectrice (droite g)).

```
Intersection[f,c]
# Ne pas afficher le point C
# Renommer le point D en B
Perpendiculaire[O,b]
Intersection[h,c]
# Renommer le point E en J
# Ne pas afficher le point D
Symetrie[A,h]
Symetrie[B,h]
Symetrie[I,h]
Symetrie[A,O]
```

```
Symetrie[B,O]
Symetrie[J,O]
Symetrie[A,b]
Symetrie[B,b]
Polygone[I,B,A,J,A',B',I',B'',A'',J',A''',B''']
```

Et pour finir, il faudra renommer correctement les points A_1', B_1', A_2' et B_2'. □

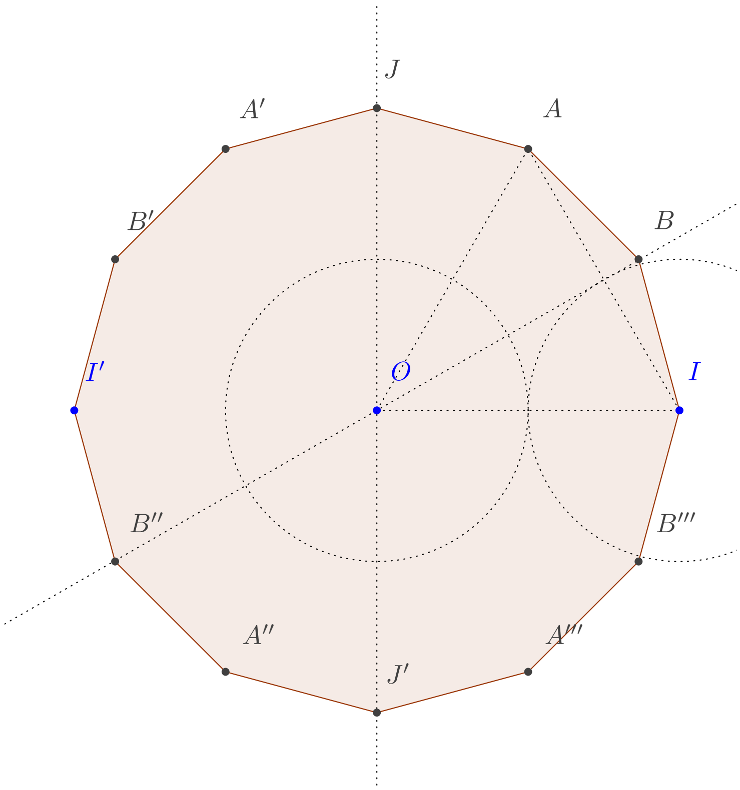


FIGURE 38.4 – Le dodécagone

Approximation de π avec l'aire du dodécagone. On remarque que le triangle OBB''' est un triangle équilatéral car $OB = OB'''$ et $\widehat{BOB'''} = 60°$. Ainsi, $BB''' = 1$. La hauteur BK du triangle OAB est égale à $\frac{1}{2}$ et l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{4}$. Le dodécagone a donc une aire égale à 3. Elle est inférieure à l'aire du cercle $\mathcal{C}$ d'où $3 < \pi$. On admettra que

$$OH = \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1).$$

En choisissant $OP = \frac{1}{\cos \pi/12} = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$, on construit un dodécagone tangent extérieurement au cercle $\mathcal{C}$ d'aire 3, d'où $OI^2 \simeq 3,22$.

Ainsi $3 < \pi < 3,22$. □

6 Carré dont les côtés passent par quatre points

Le problème est le suivant : « Soient quatre points A, B, C, D (qu'on suppose deux à deux distincts). Tracer quatre droites passant par chacun des points de telle sorte quelles déterminent un carré ».

Pour cela,

1. Construire le point D_1 tel que (DD_1) soit perpendiculaire à (BC) et tel que $BC = DD_1$.
2. Tracer la droite (AD_1).
3. Tracer la droite perpendiculaire à (AD_1) passant par B. On note M l'intersection de (AD_1) et de la perpendiculaire tracée.
4. Tracer la droite perpendiculaire à (BM) passant par D. On note Q l'intersection de (BM) et de la perpendiculaire tracée.
5. Tracer la droite perpendiculaire à (DQ) passant par C. On note P l'intersection de (DQ) et de la perpendiculaire tracée et N l'intersection de (AM) et de la perpendiculaire tracée.

Construction sur Geogebra. Tout d'abord, placer quatre points A, B, C et D distincts deux à deux avec l'outil « Nouveau point ».

```
Segment[B,C]
Perpendiculaire[D,a]
Cercle[D,a]
Intersection[b,c]
```

On obtient donc deux nouveaux points. On choisit un de ces deux points (qu'on renommera D_1) et on n'affiche pas l'autre point.

```
Droite[A,D_1]
Perpendiculaire[B,d]
M = Intersection[d,e]
Perpendiculaire[D,e]
Q = Intersection[e,f]
Perpendiculaire[C,f]
P = Intersection[f,g]
N = Intersection[g,d]
Polygone[M,N,P,Q]
```

□

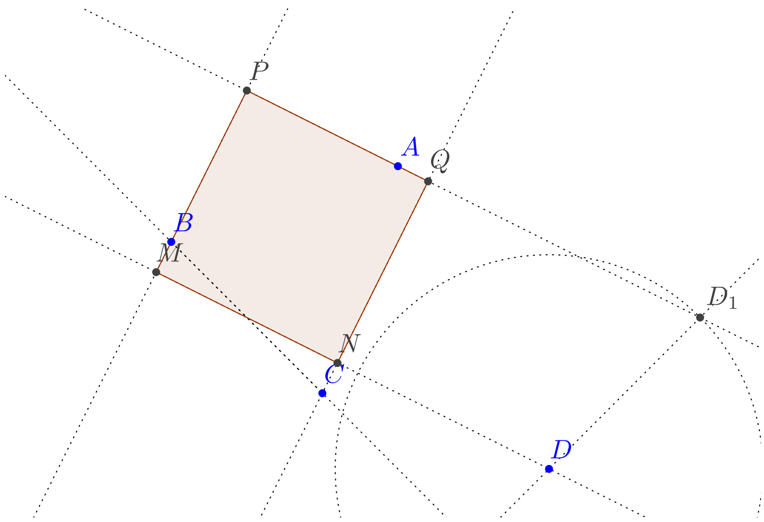


FIGURE 38.5 – Problème du carré passant par quatre points quelconques

Démonstration. Par construction, $MNPQ$ est un rectangle (trois angles droits). On montre que le rectangle $MNPQ$ a deux côtés consécutifs de même longueur. Soit B' le projeté orthogonal de B sur (NP) et D' le projeté orthogonal de D sur (MN).

Les triangles $B'BC$ et $D'DD_1$ ont leurs côtés deux à deux perpendiculaires. L'hypoténuse $[BC]$ est perpendiculaire à $[DD_1]$ avec $BC = DD_1$. Les triangles sont semblables et $BB' = DD'$. Ce qui prouve que deux côtés consécutifs ont même longueur : $MNPQ$ est un carré. □

7 Quelques quadratures du carré

Le but de ces constructions est de tracer un carré dont l'aire est égale à une figure rectiligne donné.

7 1 Une construction dite de Sulbastra

Soit $ABCD$ un rectangle.

1. Tracer le carré $ADFE$.
2. Tracer la médiatrice de $[CF]$. Elle coupe $[CF]$ en H et $[EB]$ en G.
3. Tracer le rectangle $DFIJ$ tel que $DF = HG$ et $FI = HC$.
4. Tracer le carré $AGKJ$.
5. Tracer le cercle de centre J passant par A et coupe $[DH]$ en L.

DL est le côté de même aire que le rectangle $ABCD$.

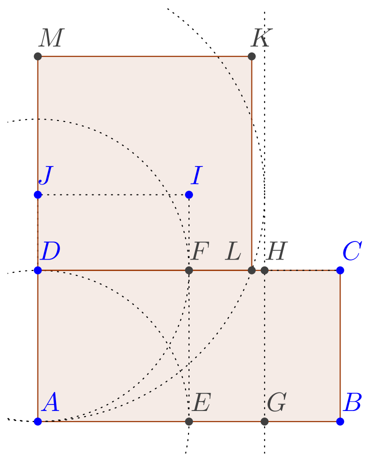


FIGURE 38.6 – Quadrature du carré de Sulbastra

Construction sur Geogebra.

```
A = (0,0)
B = (4,0)
C = (4,2)
D = (0,2)
Polygone[A,B,C,D]
Cercle[A,D]
Intersection[e,a]
Cercle[D,A]
Intersection[f,c]
Segment[E,F]
Mediatrice[C,F]
G = Intersection[a,h]
```

```
H = Intersection[c,h]
J = (0,3)
I = (2,3)
Segment[I,J]
Segment[J,D]
Segment[F,I]
Cercle[J,A]
L = Intersection[p,c]
Polygone[D,L,4]
```

□

7 2 La construction d'Euclide

On donne une interprétation moderne de la construction d'Euclide pour la quadrature d'un carré. On se donne $ABCD$ un rectangle.

1. Tracer la droite (AB).
2. Tracer un cercle $\mathcal{C}_1$ de centre B et de rayon $[BC]$. Il intersecte la droite (AB) en E et F tel que E n'est pas sur le segment $[AB]$.
3. Tracer un cercle $\mathcal{C}_2$ de diamètre $[AE]$.
4. Tracer la droite (BC). Elle intersecte le cercle $\mathcal{C}_2$ en T.

Ainsi BT est le côté du carré qui a même aire que le rectangle $ABCD$.

Construction sur Geogebra.

```
A = (0,0)
B = (4,0)
C = (4,2)
D = (0,2)
Polygone[A,B,C,D]
Droite[A,B]
Cercle[B,C]
Intersection[e,f]
```

Il faut peut-être inverser les points E et F puis on affichera seulement le point E.

```
Droite[B,C]
MilieuCentre[A,E]
Cercle[G,A]
T = Intersection[h,g]
```

Il faut renommer le point T_1 en T et ne pas afficher le point T_2.

```
Polygone[T,B,4]
```

□

7 3 La quadrature du carré de Wallis

Soit $ABCD$ un rectangle.

1. Tracer le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A et de rayon $[AD]$. Il intersecte $[AB]$ en D'.
2. Tracer la médiatrice de $[D'B]$. Soit O un point de cette médiatrice.

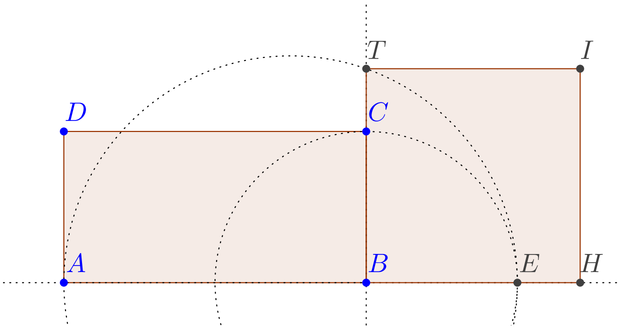


FIGURE 38.7 – Quadrature du carré selon Euclide

3. Tracer le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre O qui passe par D'. B appartient aussi au cercle tracé car $OD' = OB$ (O est sur la médiatrice de $[D'B]$.
4. Tracer la tangente au cercle $\mathcal{C}_2$ passant par A.

AT est le coté du carré qui a la même aire que le rectangle.

Démonstration. La puissance du point A par rapport au cercle est

$$AT^2 = AD' \times AB = AD \times AB.$$

D'où le carré $ATUV$ a même aire que le rectangle $ABCD$. □

Construction sur Geogebra.

```
A = (0,0)
B = (4,0)
C = (4,2)
D = (0,2)
Cercle[A,D]
D' = Intersection[e,a]
Mediatrice[D',B]
O = Point[f]
Cercle[O,D']
Tangente[A,g]
T = Intersection[g,h]
Polygone[A,T,4]
```

On renommera les points E et F en U et V. □

8 Transformer un triangle équilatéral en rectangle

Proposition 38.6 (Découpage de Dudeney (1902)). *On peut découper un triangle équilatéral en quatre morceaux pour qu'il puisse former un rectangle.*

On va expliciter la construction de Dudeney. On se donne un triangle ABC équilatéral de côté 2. On note E et D les milieux de $[AC]$ et de $[AB]$. On construit I sur $[BC]$ tel que $EI^4 = 3$. Pour cela,

- On construit M le symétrique de A par rapport à (BC). Ainsi $AM = 2\sqrt{3}$.
- On construit le cercle $(\mathcal{C}_2)$ de centre M passant par B, donc de rayon 2. On note P l'intersection de la droite (AM) et du cercle $(\mathcal{C}_2)$ différent de A.
- On note Q le milieu de $[AP]$ et on construit $(\mathcal{C}_1)$ le cercle de centre Q passant par A ($(\mathcal{C}_1)$ a pour rayon $1 + \sqrt{3}$).

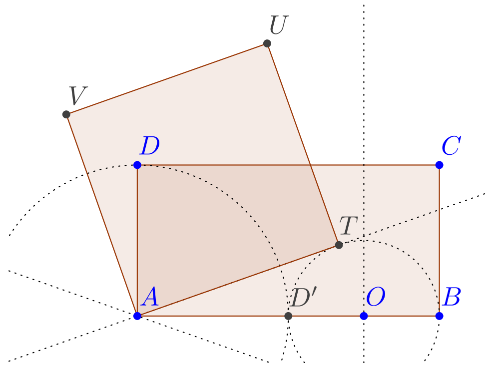


FIGURE 38.8 – Quadrature du cercle selon Wallis

- On note O l'intersection du cercle $(\mathcal{C}_1)$ et de la parallèle à (BC) passant par M. On a alors $OM = 2\sqrt[4]{3}$.
- Soit N le milieu de $[OM]$ alors MN est la longueur EI cherchée.

On note F le projeté orthogonal de D sur $[EI]$ et G le point de $[EI]$ tel que $EG = IF$. H est l'antécédent sur $[BC]$ de G par projection orthogonale sur (EI).

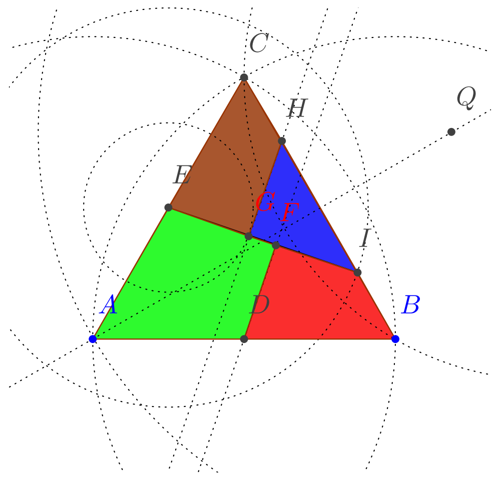


FIGURE 38.9 – Construction de Dudeney

On donne une suite d'instructions à faire sur Geogebra pour réaliser la construction précédente :

```
A = (0,0)
B = (2,0)
Cercle[A,2]
Cercle[B,2]
# On selectionne un des deux points
d'intersection des deux cercles
construits et on le nomme C
Polygone[A,B,C]
D = MilieuCentre[A,B]
E = MilieuCentre[A,C]
# Construction du point I
M = Symetrie[A,a]
C_2 = Cercle(M,B)
Droite[A,M]
```

```
# On selectionne le point
d'intersection de (AM) et du cercle
C_2 different de A et on le nomme P
Q = MilieuCentre[A,P]
C_1 = Cercle[Q,A]
Droite[M,a]
# On selectionne un des deux points
d'intersection de la droite
parallele a (BC) passant par M et du
cercle C_1 et on le nomme O
N = MilieuCentre[O,M]
Segment[M,N]
Cercle(E,g)
I = Intersection(a,k)
# Fin de la construction du point I
Segment[E,I]
Perpendiculaire[D,h]
F = Intersection[i,h]
Segment[I,F]
Cercle(E,j)
G = Intersection[h,p]
Perpendiculaire[G,h]
H = Intersection[a,l]
Segment[G,H]
Segment[D,F]
```

Compléments

LEÇON

39 Problèmes de lieux géométriques

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S
Prérequis Nombres complexes, barycentres, produit scalaire.
Références Leçons 29-30-35

Contenu de la leçon

Définition 39.1 (Lieu géométrique)**.** *Un* lieu géométrique *est un ensemble de points satisfaisant certaines conditions, données par un problème de construction géométrique.*

Dans cette leçon, on donne des problèmes de lieux géométriques.

1 Médiatrice

Définition 39.2 (Médiatrice)**.** *Une médiatrice $\mathcal{M}$ d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points M tel que $AM = BM$:*

$$\mathcal{M} = \{M,\ AM = BM\}$$

Exemple 39.3. Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan, $A = (-2, 0)$ et $B = (2, 0)$. L'ensemble des points M équidistants de A et de B est la médiatrice $[AB]$, précisément l'axe $(O, \vec{\jmath})$.

2 Le cercle

Définition 39.4 (Cercle)**.** *Un cercle $\mathcal{C}$ de centre O de rayon r est l'ensemble des points M tel que $OM = r$.*

$$\mathcal{C} = \{M,\ OM = OR\}$$

Exemples 39.5.

1. Soit O et A deux points. L'ensemble
$$\mathcal{C} = \{M,\ OM = OA\}$$
est le cercle de centre O et de rayon $[OA]$.
2. Soit A et B deux points. On cherche à représenter géométriquement l'ensemble
$$\mathcal{C} = \left\{M,\ \frac{1}{2}AB = AM\right\}.$$
On introduit I le milieu de $[AB]$. On a ainsi $\frac{1}{2}AB = AI$. D'où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A et de rayon $[AI]$.

3 Utilisation des barycentres

Exemple 39.6. ABC est un triangle dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 1 cm.

1. On va déterminer l'ensemble E_1 des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = 6$ cm. Pour réduire la somme vectorielle, on pose G_1 le barycentre de $(B, 1)$, $(C, 2)$ (que l'on peut construire avec $\overrightarrow{BG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$). Alors, pour tout point M :
$$\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = (1 + 2)\overrightarrow{MG_1} = 3\overrightarrow{MG_1}.$$
E_1 est donc l'ensemble des points M tels que $\left\|3\overrightarrow{MG_1}\right\| = 6$ cm $\Leftrightarrow$ $\left\|\overrightarrow{MG_1}\right\| = 2$ cm. On en déduit que E_1 est le cercle de centre G_1 et de rayon 2 cm.

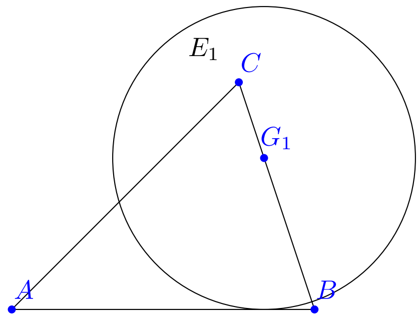


FIGURE 39.1 – Construction de l'ensemble E_1

2. Soit ABC un triangle. On va construire l'ensemble E_2 des points M tels que :

$$\left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|.$$

On note
– G_2 le barycentre de $(A,3)$ et $(B,1)$,
– G_3 le barycentre de $(A,1)$ et $(C,1)$.

Pour tout point M, on a alors :
– $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = (3+1)\overrightarrow{MG_2} = 4\overrightarrow{MG_2}$,
– $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC} = (1+1)\overrightarrow{MG_3} = 2\overrightarrow{MG_3}$.

E_2 est donc l'ensemble des points M tels que $\left\|4\overrightarrow{MG_2}\right\| = 2\left\|2\overrightarrow{MG_3}\right\| \Leftrightarrow \|MG_2\| = \|MG_3\|$.
On en déduit que E_2 est la médiatrice de $[G_2, G_3]$.

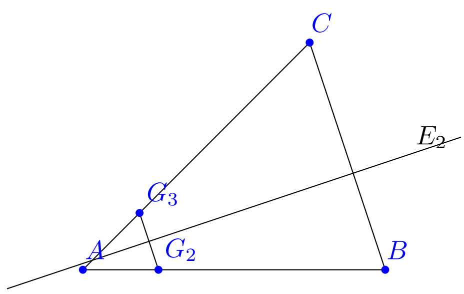


FIGURE 39.2 – Construction de l'ensemble E_2

4 Utilisation du produit scalaire

1. On cherche tout d'abord l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$.

Propriété 39.7. *Soit I le milieu du segment $[AB]$ (avec $A \neq B$). Pour tout point M, on a :*

$$MA^2 + MB^2 = 2IM^2 + \frac{AB^2}{2} \quad \textit{(Théorème de la médiane)}.$$

Etant donné un réel k, on en déduit que l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$ est un cercle, ou un point ou l'ensemble vide.

Exemple 39.8. Soit A et B deux points tels que $AB = 2$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 20$. On utilise le théorème de la médiane :

$$MA^2 + MB^2 = 20 \Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{AB^2}{2} = 20 \Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{4}{2} = 20 \Leftrightarrow IM^2 = 9 \Leftrightarrow IM = 3$$

(car $IM > 0$). L'ensemble E est donc le cercle de centre I et de rayon 3.

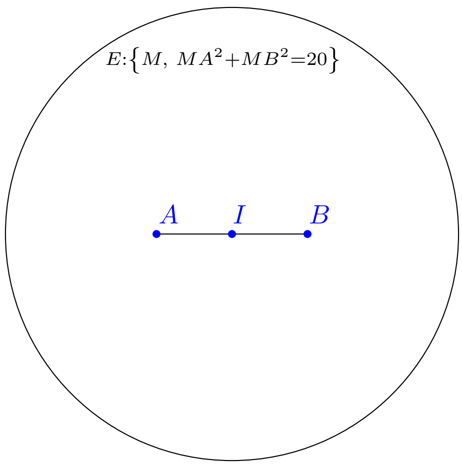


FIGURE 39.3 – Construction de l'ensemble E de l'exemple 39.8

2. On cherche à déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$. Pour cela, on décompose $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en passant par I le milieu de $[AB]$.

   Exemple 39.9. Soit A et B deux points tels que $AB = 4$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12$.

   $$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 12.$$

   Or, $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$. On a donc :

   $$(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = 12 \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 12 \Leftrightarrow MI^2 - 2^2 = 12.$$

   On en déduit que $M \in E \Leftrightarrow MI^2 = 16 \Leftrightarrow MI = 4$. E est donc le cercle de centre I et de rayon 4

3. On cherche à déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k$. Pour cela, on cherche un point particulier H appartenant à l'ensemble. On a alors $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = k$. Ainsi,

   $$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}) \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \perp \vec{u}.$$

   L'ensemble est alors la droite passant par H de vecteur normal $\vec{u}$.

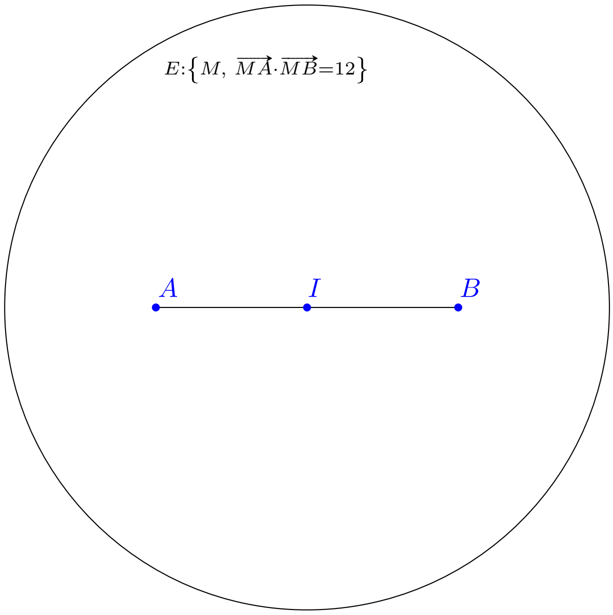


FIGURE 39.4 – Construction de E de l'exemple 39.9

Exemple 39.10. Soit A et B deux points tels que $AB = 3$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -6$. Soit H le point de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient de sens contraires et tel que $AH \times AB = 6 \Leftrightarrow AH = \frac{6}{3} = 2$. Ainsi, on a bien $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = -6$. Dès lors :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = -6 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \perp \overrightarrow{AB}.$$

L'ensemble E est alors la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.

5 Utilisation des homothéties et des translations

Exercice 39.11. On considère deux points distincts A et B. Pour tout point M du plan, soit I le milieu de $[AM]$ et G le barycentre de $(A, -1)$, $(B, 2)$ et $(M, 1)$

1. Faire une figure.
2. Démontrer que I est l'image de M par une transformation du plan à déterminer. Démontrer que G est l'image de I par une transformation du plan à déterminer.
3. En déduire
   – le lieu des points I lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$;
   – le lieu des points G lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$;
   – le lieu des points I lorsque M décrit la droite perpendiculaire à (AB) en B ;
   – le lieu des points G lorsque M décrit la droite perpendiculaire à (AB) en B.

Exercice 39.12. Soient A et B deux points distincts, I le milieu de $[AB]$. Soit (d) la médiatrice de $[AB]$. Soit (C) le cercle de centre A et de rayon AI et (C') le cercle de diamètre $[AB]$. A tout point M, on associe le point M' barycentre de $(A, -1)$ et $(M, 2)$. Déterminer le lieu géométrique de M' lorsque M décrit :

1. la droite (AB)

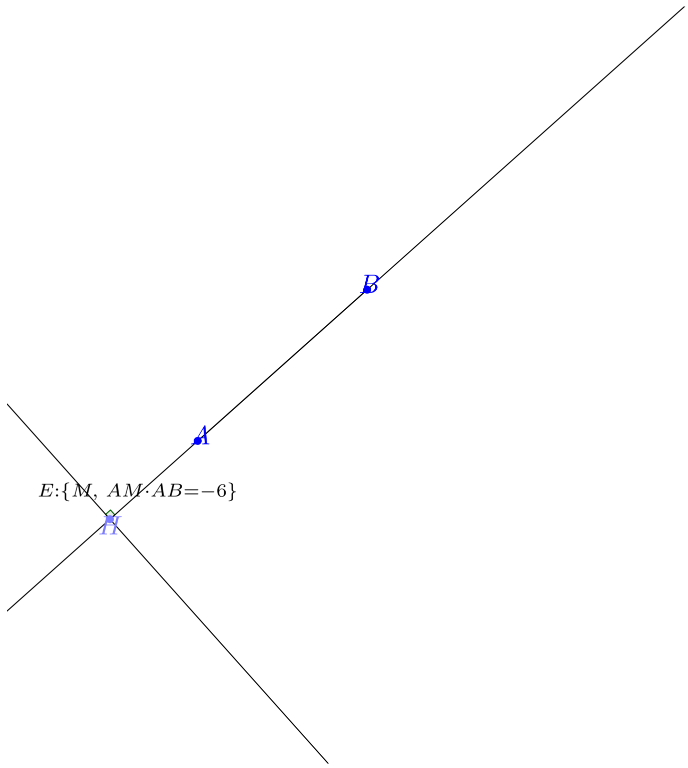


FIGURE 39.5 – Construction de E de l'exemple 39.10

2. la droite (d)
3. le cercle (C)
4. le cercle (C')

Compléments

Solution de l'exercice 39.11. 1. G étant le barycentre de $(A, -1)$, $(B, 2)$ et $(M, 1)$, on a : $-\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GM} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GM} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, d'où $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$. I étant le milieu de $[AM]$, on en déduit que $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AI}$.

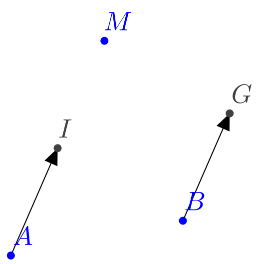


FIGURE 39.6 – Figure de la question 1

2. I étant le milieu de $[AM]$, on a $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$. Donc I est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. On a vu $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AI}$, donc $BGIA$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AB}$. Donc G est l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3. Par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$, le point A est invariant et le point B a pour image le point K tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire le milieu de $[AB]$. I étant l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$, lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$, I décrit le cercle de diamètre $[AK]$.

   Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, le point A a pour image B et le point K a pour image L tel que $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AB}$. G étant l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$, I décrit le cercle de diamètre $[AK]$ et G décrit le cercle de diamètre $[BL]$.

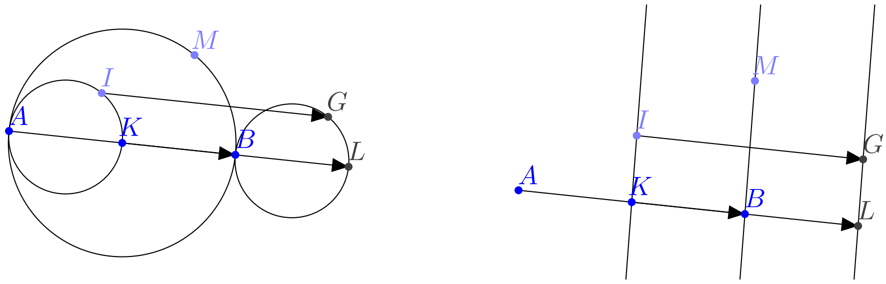


FIGURE 39.7 – Figure de la question 3

   Lorsque M décrit la droite perpendiculaire à (AB) en B, I décrit la droite perpendiculaire à (AK) en K et G décrit la droite perpendiculaire à (BL) en L.

□

Solution de l'exercice 39.12. M' est le barycentre de $(A, -1)$ et $(M, 2)$, on a donc :

$$-\overrightarrow{M(A} + 2\overrightarrow{M'M} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{M'A} + 2(\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM}) = \vec{0},$$

c'est-à-dire $\overrightarrow{M'A} + 2\overrightarrow{MA} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM}$. On en déduit que M' est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

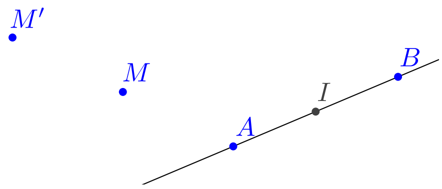


FIGURE 39.8 – Figure d'introduction pour l'exercice

1. A étant le centre de l'homothétie, on a $A' = h(A) = A$. De plus, l'image de B par h est $B' = h(B)$ avec $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AB}$. Si M décrit la droite (AB), M' décrit la droite $(A'B')$. Or A' et B' se trouvent sur la droite (AB), donc la droite $(A'B')$ est la droite (AB). Lorsque M décrit la droite (AB), M' décrit la droite (AB).
2. La droite (d), médiatrice de $[AB]$ est la droite passant par I et perpendiculaire à (AB). Comme I est le milieu de $[AB]$, on a $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$. Donc B est l'image de I par h. Si M décrit la droite (d) passant par (I) et perpendiculaire à (AB), alors M' décrit la droite (d') passant par $I' = B$ et perpendiculaire à $(A'B') = (AB)$. Lorsque M décrit la droite (d) médiatrice de $[AB]$, M' décrit la droite (d') passant par B et perpendiculaire à (AB).
3. Si M décrit le cercle (C') de centre A et de rayon (AI), alors M' décrit le cercle de centre $A' = A$ et de rayon $2AI = AB$, c'est-à-dire le cercle de centre A et passant par B. Lorsque M décrit le cercle (C), M' décrit le cercle de centre A passant par B.

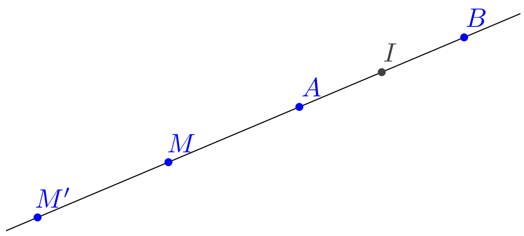


FIGURE 39.9 – Figure de la question 1

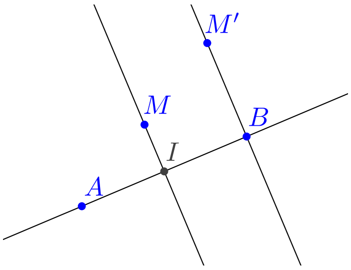


FIGURE 39.10 – Figure de la question 2

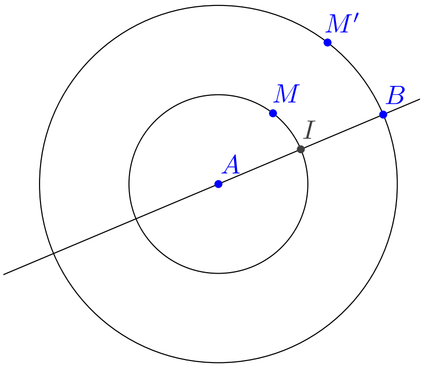


FIGURE 39.11 – Figure de la question 3

4. Si M décrit le cercle (C') de diamètre $[AB]$, alors M' décrit le cercle de diamètre $[A'B'] = [AB']$. Comme $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AB}$, B est le milieu de $[AB']$, donc le cercle de diamètre $[AB']$ est le cercle de centre B passant par A. Lorsque M décrit le cercle (C') de diamètre $[AB]$, M' décrit le cercle de entre B passant par A.

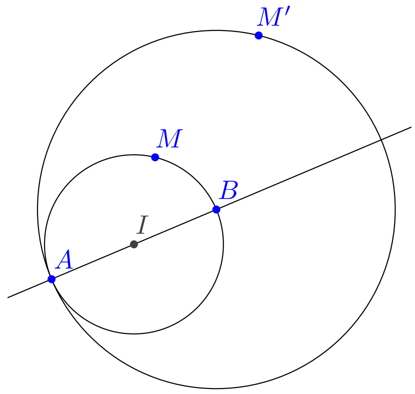


FIGURE 39.12 – Figure de la question 4

□

LEÇON

40 L'orthogonalité

Niveau, prérequis, références

Niveau Sixième (section 40.2.1), Seconde (section 40.2.2), Première S (section 40.2.3).

Prérequis Droites sécantes, droites parallèles

Références [100, 101, 102]

Contenu de la leçon

1 Droites orthogonales ou perpendiculaires

Définition 40.1. *On dit que deux droites sont* orthogonales *(ou* perpendiculaires*) si elles sont sécantes et forment un angle droit.*

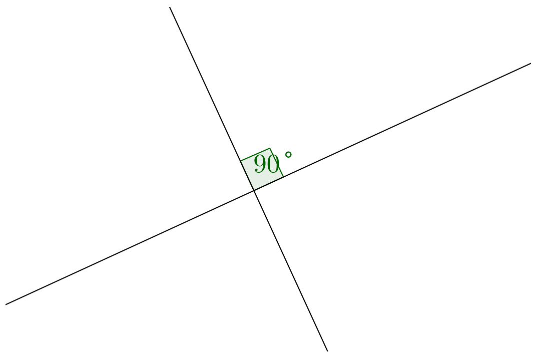


FIGURE 40.1 – Deux droites perpendiculaires

Notation. Soient (d_1) et (d_2) deux droites. Si (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires alors on note $(d_1) \perp (d_2)$.

Propriétés 40.2.
1. *Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.*
2. *Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

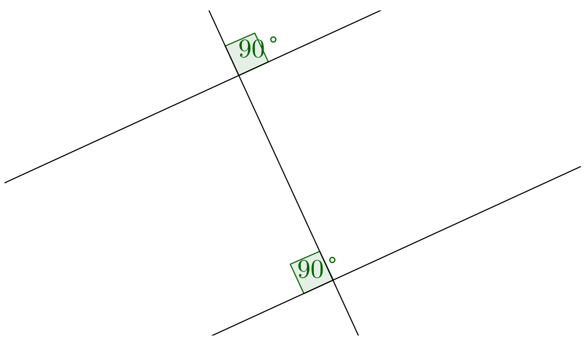


FIGURE 40.2 – Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

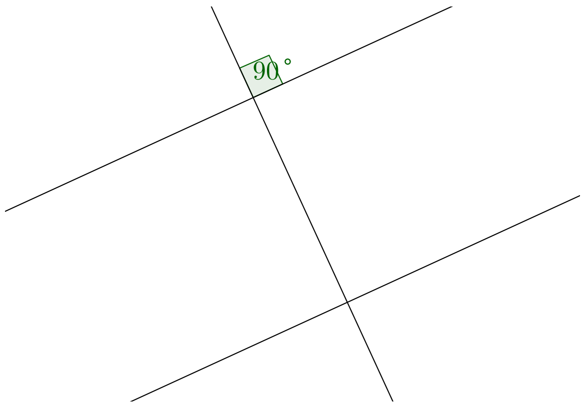


FIGURE 40.3 – Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.

2 Orthogonalité dans l'espace

2.1 Droites orthogonales

Soit d et d' deux droites de l'espace et A_1 et A_2 deux points de l'espace.

1. d_1 et d'_1 sont les parallèles à d et d' passant par A_1 et P_1 est le plan déterminé par ces deux droites.
2. d_2 et d'_2 sont les parallèles à d et d' passant par A_2 et P_2 est le plan déterminé par ces deux droites.

On admet que d_1 et d'_1 sont perpendiculaires dans P_1 si et seulement si d_2 et d'_2 sont perpendiculaires dans P_2.

En résumé : si en un point, les parallèles à d et d' sont perpendiculaires, alors en tout autre point de l'espace, les parallèles à d et d' seront perpendiculaires.

On peut donc définir :

Définition 40.3. *Deux droites de l'espace sont* orthogonales *si leurs parallèles menées par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires. On note $d \perp d'$.*

Remarque 40.4. L'adjectif « perpendiculaire » ne s'utilise que pour les droites orthogonales et sécantes (donc coplanaires). Dans la suite de la section, on parlera, pour simplifier, de droites orthogonales qu'elles soient sécantes ou non.

Propriétés 40.5.
1. *Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.*
2. *Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.*

Remarque 40.6. **Attention !** Certaines règles vraies dans le plan ne sont pas vraies dans l'espace. Par exemple, dans le plan, deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles ; ce qui n'est pas vrai dans l'espace.

2.2 Droites orthogonales à un plan

Définition 40.7. *Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. On note $d \perp P$.*

Propriété 40.8. *Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.*

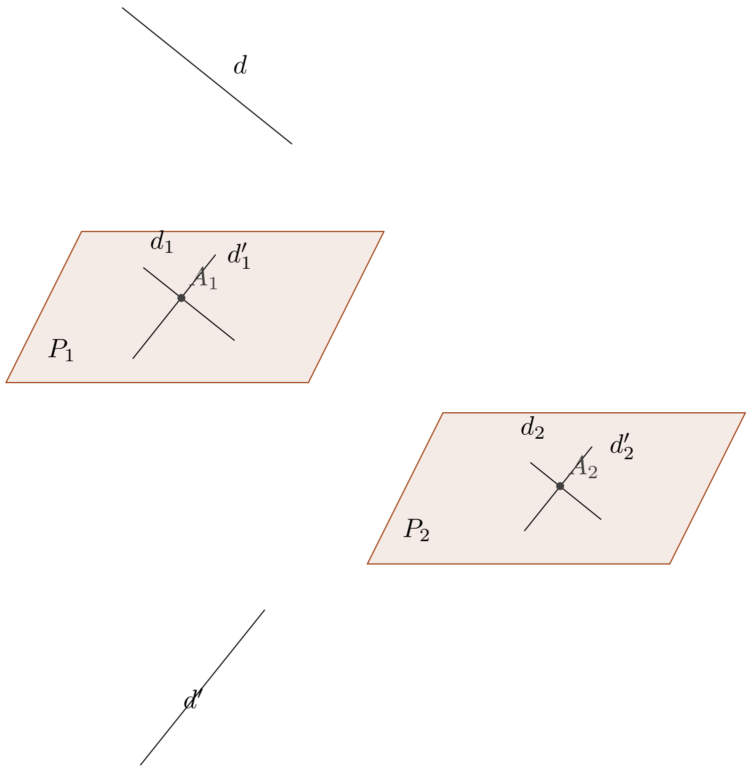


FIGURE 40.4 – $d_1 \perp d'_1$ et $d_2 \perp d'_2$

Propriétés 40.9.
1. *Il existe une unique droite passant par un point donné et orthogonale à un plan donné.*
2. *Il existe un unique plan passant par un point donné et orthogonal à une droite donnée.*

Propriétés 40.10.
1. *Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonale à l'autre.*
2. *Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.*

Propriétés 40.11.
1. *Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.*
2. *Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.*

Remarque 40.12. La relation d'orthogonalité ne lie pas seulement une droite et un plan mais une famille de plan tous parallèles entre eux à une famille de droites toutes parallèles entre elles.

2 3 Plans médiateurs

Définition 40.13. *On appelle* plan médiateur *d'un segment* $[AB]$*, le plan orthogonal à* (AB) *passant par le milieu* I *de* $[AB]$.

Propriété 40.14. *L'ensemble des points équidistants de deux points* A *et* B *(*$A \neq B$*) est le plan médiateur du segment* $[AB]$.

Remarque 40.15. Dans l'espace, le plan médiateur joue un rôle analogue à celui de la médiatrice dans le plan.

2 4 Projections orthogonales

Définition 40.16 (Projection orthogonale)**.** *Soit* P *un plan. La* projection orthogonale *sur* P *est la projection sur* P *parallèlement à une droite* d *orthogonale à* P.

L'image M' *d'un point* M *par la projection orthogonale sur* P *est appelée* projection orthogonal de M.

Remarques 40.17.
1. Pour tout point M et N de projetés orthogonaux M' et N' sur un plan P, on a $M'N' \leq MN$.
2. Si trois points M, N et P sont alignés alors leurs projetés orthogonaux M', N' et P' sur un plan P sont alignés.

3 Produit scalaire (en lien avec l'orthogonalité)

3 1 Produit scalaire de deux vecteurs

On munit l'espace d'un repère *orthonormé* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Définition 40.18 (Produit scalaire)**.** *Soient* $\vec{u} = (x, y, z)$ *et* $\vec{u'} = (x', y', z')$ *deux vecteurs de l'espace. Le* produit scalaire *de* $\vec{u}$ *et* $\vec{u'}$ *vaut :*

$$\vec{u} \cdot \vec{u'} = xx' + yy' + zz'.$$

Propriétés 40.19. *Quels que soient les vecteurs* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *et quel que soit le réel* k*, on a :*
1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Remarque 40.20. Le produit scalaire de tout vecteur $\vec{u}$ avec le vecteur nul est le réel nul. Il se peut que le produit scalaire de deux vecteurs soit nul sans qu'aucun le soit.

Définition 40.21 (Orthogonalité)**.** *Deux vecteurs sont dits* orthogonaux *si (et seulement si) leur produit scalaire est nul.*

3 2 Droites orthogonales

Une droite peut être définie par un de ses points et par un de ses vecteurs directeurs (un vecteur directeur est toujours non nul).

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$, si $\vec{u'}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$, et si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont orthogonaux, alors tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}'$.

Cela se justifie par la dernière propriété dans le paragraphe précédent. Si $\vec{v}$ est un autre vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$, il est colinéaire au vecteur $\vec{u}$: il existe donc un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. De même, si $\vec{v'}$ est un autre vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$, il est colinéaire au vecteur $\vec{u'}$: il existe donc un réel k' tel que $\vec{v'} = k'\vec{u'}$.

Donc :

$$\vec{v} \cdot \vec{v'} = (k\vec{u}) \cdot (k\vec{u'}) = kk'(\vec{u} \cdot \vec{u'}) = kk' \times 0 = 0$$

puisque les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont orthogonaux. Donc les deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ le sont aussi.

Définition 40.22. *Deux droites sont* orthogonales *si (et seulement si) un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre. Auquel cas tout vecteur directeur de l'une est orthogonal à tout vecteur directe de l'autre.*

Deux droites orthogonales n'ont aucune raison d'être coplanaires, mais si elle le sont, elles se coupent alors en formant des angles droites : elles sont *perpendiculaires.*

Le terme « orthogonales » est donc plus général que le terme « perpendiculaire ».

3 3 Droite orthogonale à un plan

Un plan $\mathcal{P}$ peut être défini par un point A et deux vecteurs indépendants (non colinéaires) $\vec{u}$ et $\vec{v}$. L'ensemble $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est alors un repère dans ce plan. Si le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il est orthogonal à tout vecteur du plan $\mathcal{P}$. En effet, un tel vecteur peut s'écrire :

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v},$$

donc :

$$\vec{n} \cdot \vec{w} = x(\vec{n} \cdot \vec{u}) + y(\vec{n} \cdot \vec{v}) = 0$$

puisque $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

Définition 40.23 (Vecteur normal)**.** *Un vecteur est* normal *ou orthogonal au plan s'il est orthogonal à deux vecteurs indépendants de ce plan. Il est alors orthogonal à tout vecteur de ce plan.*

Exemple 40.24 (Détermination de l'équation d'un plan)**.** Soit un point A de coordonnées (α, β, γ) relativement à un repère orthonormé de l'espace et soit $\vec{n}$ un vecteur de coordonnées (a, b, c) relativement à ce même repère. On cherche une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par A et dont le vecteur $\vec{n}$ soit un vecteur normal. Le point M de coordonnées (x, y, z) est un point du plan $\mathcal{P}$ si et seulement si les deux vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux. Ce qui équivaut à :

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) + c(z - \gamma) = 0$$

qui est de la forme :

$$ax + by + cz + k = 0.$$

Réciproquement, toute équation de cette forme est celle d'un plan orthogonal au vecteur de coordonnées (a, b, c).

Définition 40.25 (Droite orthogonale)**.** *On dit qu'une droite est* orthogonale *à un plan si un vecteur directeur de cette droite est normal à ce plan.*

Tout vecteur directeur $\vec{u}$ de cette droite est alors orthogonal à tout vecteur $\vec{t}$ du plan.

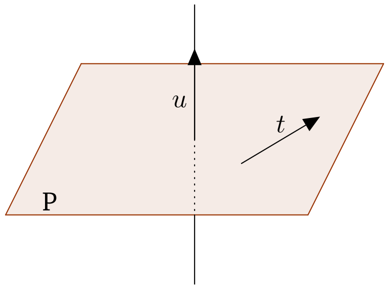


FIGURE 40.5 – Tout vecteur directeur u de cette droite est alors orthogonal à tout vecteur t du plan.

Il suffit pour cela qu'un vecteur directeur de la droite soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.

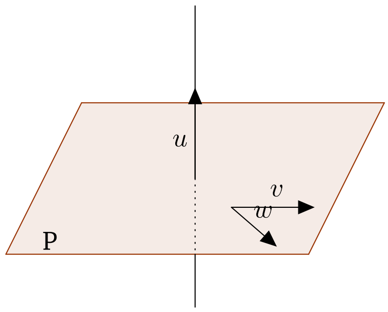


FIGURE 40.6 – Il suffit pour cela qu'un vecteur directeur de la droite soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.

Théorème 40.26. *Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à* deux droites sécantes *de ce plan. Elle est alors orthogonale à toutes les droites de ce plan.*

3 4 Théorème des trois perpendiculaires

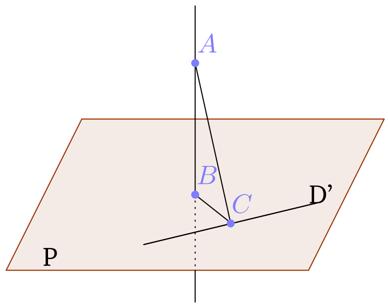


FIGURE 40.7 – Théorème des trois perpendiculaires

Théorème 40.27. *Soit une droite (AB) orthogonale en B à un plan $\mathcal{P}$ ($B \in \mathcal{P}$) et soit une droite $\mathcal{D}'$ du plan $\mathcal{P}$. La droite du plan $\mathcal{P}$ passant par B est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}'$ la coupe en C.*

3 5 Distance d'un point à un plan

On généralise un résultat connu concernant la distance d'un point à une droite (dans le plan) en dimension 3 (dans l'espace. On a vu précédemment que l'équation cartésienne d'un plan relativement à un repère orthonormé est de la forme

$$ax + by + cz + k = 0$$

où a, b et c sont les coordonnées d'un vecteur normal à ce plan.

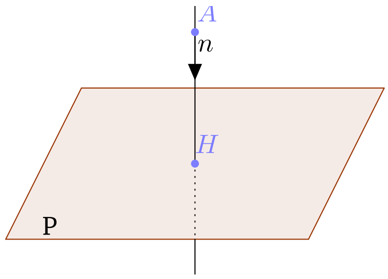


FIGURE 40.8 – Distance d'un point à un plan

Soit donc $\mathcal{P}$ un plan d'équation

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + k = 0$$

A de coordonnées (α, β, γ) un point quelconque de l'espace (situé ou non dans le plan P). La droite passant par A et orthogonale à P coupe P en H de coordonnées (x_H, y_H, z_H), et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$ de coordonnées a, b et c.

Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ lui aussi orthogonal à P a donc pour coordonnés $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$. La distance du point A au plan P est donc :

$$AH = |\lambda| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Il faut donc déterminer λ.

Puisque H appartient au plan $\mathcal{P}$, on a :

$$ax_H + by_H + cz_H + k = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées $(x_H - \alpha, y_H - \beta, z_H - \gamma)$ qui sont égales à $(\lambda a, \lambda b, \lambda c$. Donc :

$$x_H = \lambda a + \alpha, \quad y_H = \lambda b + \beta, \quad z_H = \lambda c + \gamma.$$

En remplaçant dans l'équation $ax_H + by_H + cz_H + k = 0$, on obtient :

$$a(\lambda a + \alpha) + b(\lambda b + \beta) + c(\lambda c + \gamma) + k = 0.$$

D'où :

$$\lambda(a^2 + b^2 + c^2) + (a\alpha + b\beta + c\gamma + k) = 0,$$

et donc

$$\lambda = -\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma + k}{a^2 + b^2 + c^2},$$

le dénominateur n'étant pas nul puisque $\vec{n}$ ne l'est pas. Donc :

$$AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + k|}{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + k|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Démonstration du théorème 40.27 en utilisant le théorème 40.26. La droite (AB) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$, donc elle est orthogonale à la droite $\mathcal{D}'$ contenue dans ce plan. La droite $\mathcal{D}'$ est donc orthogonale à la droite (AB), mais aussi à la droite (BC), elle est orthogonale à deux droites du plan (ABC), donc elle est orthogonale à ce plan. Par suite, elle est orthogonale à toutes les droites du plan (ABC), notamment à la droite (AC). Elle est également sécante à (AC), donc les deux droites $\mathcal{D}'$ et (AC) sont bien perpendiculaires. □

Démonstration du théorème 40.27 en utilisant les vecteurs. Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$. $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) qui est orthogonale au plan $\mathcal{P}$: donc ce vecteur est orthogonal à tout vecteur du plan $\mathcal{P}$, en particulier au vecteur $\vec{v}$. Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 0$.

La droite (BC) est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}'$, donc les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux : $\overrightarrow{BC} \cdot \vec{v} = 0$. Il en résulte que :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} + \overrightarrow{BC} \cdot \vec{v} = 0.$$

Donc la droite (AC) est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}'$. □

Démonstration du théorème 40.27 en utilisant le théorème de Pythagore. Soit M un point de la droite $\mathcal{D}'$ différent de C. Les triangles ABC, BCM et ABM sont des triangles rectangles.

- ABC est un triangle rectangle en B puisque la droite (AB) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ donc orthogonale à toutes les droites de ce plan. Donc selon le théorème de Pythagore :

  $$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

- BCM est un triangle rectangle en C puisque (BC) est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}'$ ou (CM). Donc, on a de même :

  $$\overrightarrow{BM}^2 = \overrightarrow{CM}^2 + \overrightarrow{BC}^2.$$

- ABM est un triangle rectangle en B puisque (AB) est perpendiculaire à (BM). Donc :

  $$AM^2 = AB^2 + BM^2.$$

  Il en résulte que :

  $$\begin{aligned} AM^2 &= AB^2 + BM^2 \\ &= AB^2 + BC^2 + CM^2 \\ &= AC^2 + CM^2 \end{aligned}$$

  Cette égalité prouve que le triangle ACM est rectangle en C, et donc que la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (CM) ou $\mathcal{D}'$.

□

LEÇON

41 Suites monotones

Niveau, prérequis, références

Niveau Première S

Prérequis Notion de fonctions

Références [103, 104, 105]

Contenu de la leçon

1 Définition et exemples de suites numériques

Définition 41.1 (Suite numérique)**.** *Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, définie à partir d'un certain rang n_0. L'image d'un entier naturel n est notée $u(n)$ ou u_n, n est appelé* l'indice *ou le* rang *du terme u_n. La suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq n_0}$.*

Exemples 41.2.

1. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par
$$u_n = \frac{1}{n}, \qquad \text{pour } n \geq 1.$$
Cette suite est définie en fonction du rang (elle est de type $u_n = f(n)$ où f est une fonction). On obtient :
$$u_1 = 1,\ u_2 = \frac{1}{2},\ u_3 = \frac{1}{3}, \dots$$
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n(1-u_n) \end{cases}$$
Cette suite est définie en fonction de terme(s) précédent(s) (on dit que c'est une suite récurrente). On obtient :
$$u_1 = u_0(1-u_0) = -2,\ u_2 = -6,\ u_3 = -42.$$

Remarque 41.3. Une suite comportant un nombre fini de termes peut aussi être définie par un tableau de valeurs. Par exemple :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	2	-5	6	7	10	-15	21

Définition 41.4. *On appelle représentation graphique d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des points du plan de coordonnées (n, u_n).*

Exemple 41.5. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2n - 3$. On donne une représentation graphique de la suite en figure 41.1.

2 Suites monotones

Définition 41.6. *Soit la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.*

- *On dit que (u_n) est* croissante *si : pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$.*
- *On dit que (u_n) est* décroissante *si : pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$.*
- *On dit que (u_n) est* stationnaire *si : pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.*

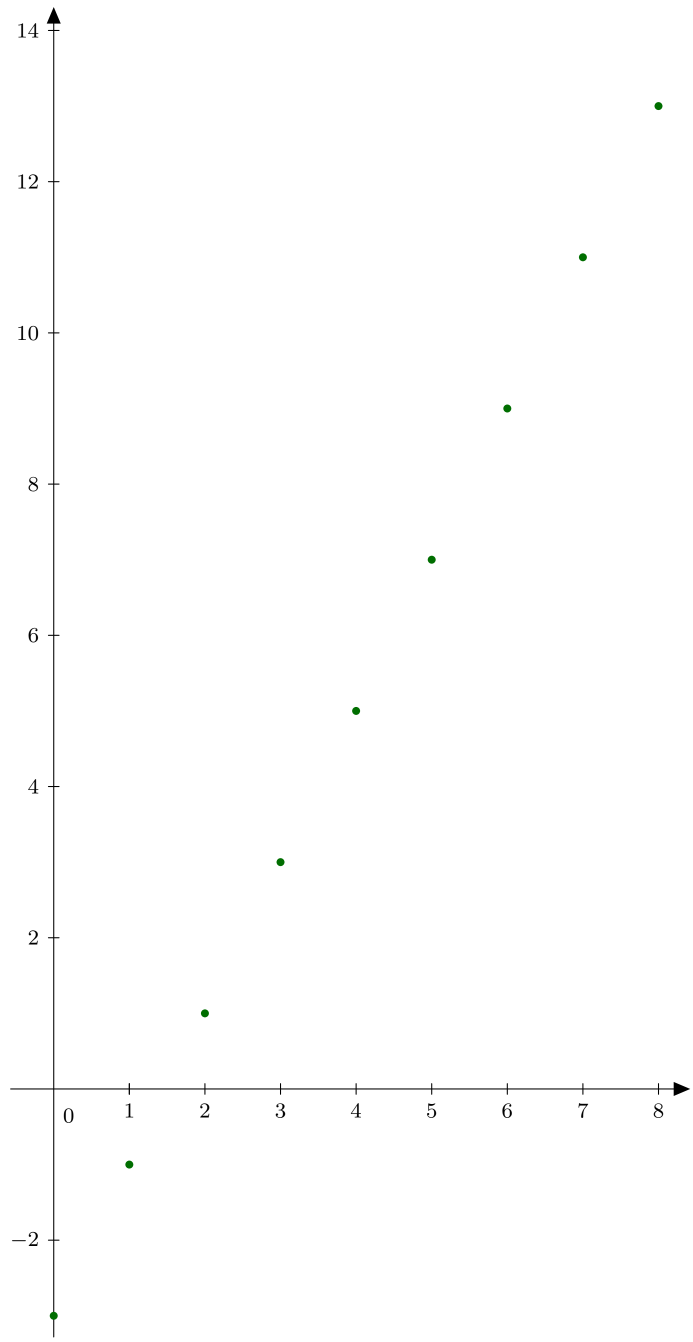


FIGURE 41.1 – Représentation graphique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2n - 3$

Remarques 41.7. 1. On définit de la même façon une suite strictement croissante ou strictement décroissante en utilisant des inégalités strictes.

2. Une suite croissante ou décroissante est appelée suite *monotone*.

3. Étudier le sens de variation d'une suite, c'est déterminer si une suite est croissante ou décroissante (ou ni l'un ni l'autre). Cette étude peut se faire en calculant la différence $u_{n+1} - u_n$ et en déterminant si cette différence a un signe constant.

4. La définition d'une suite croissante (ou d'une suite décroissante) n'est pas identique à la définition d'une fonction croissante. Dans le cas d'une suite, on compare deux termes consécutifs u_n et u_{n+1} dans le cas d'une fonction on compare les images de deux réels quelconques a et b.

Exemples 41.8. 1. La suite $\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante car, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 + n^2 = 2n + 1 > 0.$$

2. La suite $(-2n+3)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante car, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = -2(n+1) + 3 - (-2n+3) = -2n - 2 + 3 + 2n - 3 = -2 < 0.$$

3. La suite $(-1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni croissante, ni décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n+1} - u_{2n} = (-1)^{2n+1} - (-1)^{2n} = -1 - 1 = -2 < 0$$

$$u_{2n+2} - u_{2n+1} = (-1)^{2n+2} - (-1)^{2n+1} = 1 - (-1) = 2 > 0.$$

4. La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0.$$

Propriété 41.9. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. Si $n \geq p$ alors $u_n \geq u_p$.*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante. Si $n \geq p$ alors $u_n \leq u_p$.

Propriété 41.10. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction croissante sur $[n_0\,,+\infty[$, la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ définie par $u_n = f(n)$ est une suite croissante.*

Remarques 41.11. 1. On a une propriété identique avec une fonction décroissante.

2. La condition est suffisante, mais pas nécessaire, c'est-à-dire que la suite peut être croissante alors que la fonction ne l'est pas (voir la figure 41.2).

Exemple 41.12. On peut démontrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n}{n+1}$ est croissante en justifiant que la fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est une fonction croissante sur $[0\,,+\infty[$.

3 Suites minorés, majorés

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{2n+1}{n+2}, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

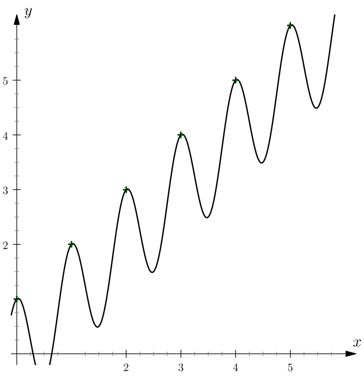


FIGURE 41.2 – La fonction $f(x) = \cos(2\pi x) + x$ n'est pas croissante et pourtant, la suite $u_n = f(n)$ est croissante

On a alors :

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{2\times 0+1}{0+2} = \frac{1}{2} \simeq 0{,}5 \\
u_1 &= \frac{2\times 1+1}{1+2} = \frac{3}{3} \simeq 1 \\
u_2 &= \frac{2\times 2+1}{2+2} = \frac{5}{4} \simeq 1{,}25 \\
u_3 &= \frac{2\times 3+1}{3+2} = \frac{7}{5} \simeq 1{,}4 \\
u_4 &= \frac{2\times 4+1}{4+2} = \frac{9}{6} \simeq 1{,}5 \\
u_5 &= \frac{2\times 5+1}{5+2} = \frac{11}{7} \simeq 1{,}57
\end{aligned}$$

On montre que $0 \leq u_n \leq 2$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2n+1 > 0$ et $n+2 > 0$ donc $\frac{2n+1}{n+2} > 0$ donc $u_n > 0$.
2. D'autre part, on peut écrire :

$$u_n - 2 = \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2n+1-2n-4}{n+2} = \frac{-3}{n+2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n+2 > 0$ donc $\frac{-3}{n+2} < 0$ donc $u_n - 2 < 0$ donc $u_n < 2$.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n \leq 2$. Ainsi, on peut penser que quand n est très grand, u_n est très proche de 2 (on dira que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $n \to +\infty$ est 2).

Définition 41.13. *Si pour tout entier n, on a $u_n \leq M$, on dit que la suite (u_n) est* majorée *par M. M est un* majorant *de la suite (u_n).*

Si pour tout entier n, on a $u_n \geq m$, on dit que la suite (u_n) est minorée *par m. m est un* minorant *de la suite $(u_n)_n$.*

On dit que la suite (u_n) est bornée *par m et M si elle est* minorée *par m et* majorée *par M.*

Exemple 41.14. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 18$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

1. On calcule u_1, u_2 et u_3 :

$$u_1 = \frac{1}{2} \times 18 + 3 = 9 + 3 = 12$$
$$u_2 = \frac{1}{2} \times 12 + 3 = 6 + 3 = 9$$
$$u_3 = \frac{1}{2} \times 9 + 3 = \frac{9}{2} + \frac{6}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5.$$

2. On peut calculer $u_4, u_5, \dots, u_{10}$ sur une calculatrice TI-82 en faisant :

```
18 -> A
A * 1/2 + 3 -> A
```

où -> peut être obtenu en tapant sur la touche STO¿ . Il suffit ensuite d'appuyer plusieurs fois sur la touche ENTER pour obtenir les valeurs approchées successives des termes de la suite :

```
6.75
6.375
6.1875
6.09375
6.046875
6.0234375
6.01171875
```

3. Supposons $u_n \geq 0$, alors $\frac{1}{2}u_n \geq 0$ donc $\frac{1}{2}u_n + 3 \geq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq 0$. Donc si u_n est positif alors u_{n+1} est positif. On sait que u_0 est positif. On peut en déduire que u_1 positif. Sachant que u_1 est positif, on en déduit que u_2 est positif. Sachant que u_2 est positif, on en déduit que u_3 est positif. En poursuivant le raisonnement, on peut conclure que u_n est positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On montre que (u_n) est décroissante. Supposons que $u_n \geq 6$ alors $\frac{1}{2}u_n \geq 3$ donc $\frac{1}{2}u_n + 3 \geq 6$ donc $u_{n+1} \geq 6$. Donc si $u_n \geq 6$ alors $u_{n+1} \geq 6$. On sait que $u_0 = 18$ donc $u_0 \geq 6$. On peut en déduit que $u_1 \geq 6$, etc. On conclut alors que $u_n \geq 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n = 3 - \frac{1}{2}u_n.$$

On sait que $u_n \geq 6$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\frac{1}{2}u_n \geq 3$ donc $-\frac{1}{2}u_n \leq -3$ donc $3 - \frac{1}{2}u_n \leq 0$. On a donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que la suite (u_n) est décroissante.
5. La suite (v_n) est définie par $v_n = 6 + \frac{12}{2^n}$. On a :

$$v_0 = 6 + \frac{12}{2^0} = 6 + \frac{12}{1} = 6 + 12 = 18$$
$$v_1 = 6 + \frac{12}{2^1} = 6 + \frac{12}{2} = 6 + 6 = 12$$
$$v_2 = 6 + \frac{12}{2^2} = 6 + \frac{12}{4} = 6 + 3 = 9$$
$$v_3 = 6 + \frac{12}{2^3} = 6 + \frac{12}{8} = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}.$$

6. On peut écrire $v_{n+1} = 6 + \frac{12}{2^{n+1}}$ et

$$\frac{1}{2}v_n + 3 = \frac{1}{2} \times \left(6 + \frac{12}{2^n}\right) + 3 = 3 + \frac{1}{2} \times \frac{12}{2^n} + 3$$

donc
$$\frac{1}{2}v_n + 3 = 6 + \frac{12}{2^{n+1}}.$$
Donc $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme on a d'autre part $v_0 = 18 = u_0$, les suites (u_n) et (v_n) sont définies par le même premier terme et la même relation de récurrence. Donc : la suite (v_n) est identique à la suite (v_n).

Compléments

Justification de la propriété 41.9.

– Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. Si $n \geq p$, on peut écrire $n = p + k$ avec k un entier naturel ($k = n - p$). La suite (u_n) étant croissante, on peut alors écrire :
$$u_p \leq u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq \cdots \leq u_{p+k}.$$
Donc $u_p \leq u_n$, c'est-à-dire $u_n \geq u_p$.

– Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. Si $n \geq p$, on peut écrire $n = p + k$ avec k un entier naturel ($k = n - p$). La suite (u_n) étant décroissante, on peut alors écrire :
$$u_p \geq u_{p+1} \geq u_{p+2} \geq \cdots \geq u_{p+k}.$$
Donc $u_p \geq u_n$, c'est-à-dire $u_n \leq u_p$.

□

Justification de la propriété 41.10. Soit f une fonction croissante sur $[n_0\,,+\infty[$ et la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ définie par $u_n = f(n)$. Soit $n \geq n_0$. On a de façon évidente, $n + 1 \geq n$. La fonction f étant croissante sur $[n_0\,,+\infty[$, on en déduit que $f(n+1) \geq f(n)$. Donc $u_{n+1} \geq u_n$. Pour tout $n \geq n_0$, on a donc $u_{n+1} \geq u_n$, c'est-à-dire que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante. □

LEÇON

42 Convergence de suites réelles

Niveau, prérequis, références

Niveau Première S

Prérequis Utilisation de la calculatrice, étude de certaines suites

Références [106]

Contenu de la leçon

1 Notion de limite infinie d'une suite

Définition 42.1 (Limite infinie d'une suite)**.** *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ *si, pour tout nombre* A *positif, l'intervalle* $[A\,,+\infty[$ *contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Autrement dit, pour tout nombre* A *positif, l'inégalité* $u_n \geq A$ *est vraie à partir d'un certain rang.*

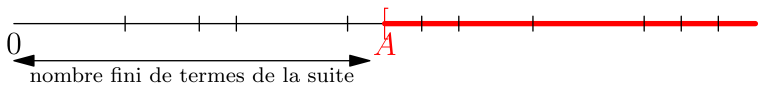


FIGURE 42.1 – Limite infinie d'une suite (en $+\infty$)

On dit que la limite de la suite (u_n) est $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Remarque 42.2. On définit de manière analogue une suite qui tend vers $-\infty$ et on note

$$\lim_{n\to-\infty} u_n = -\infty.$$

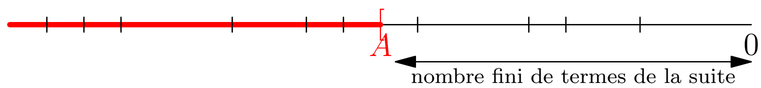


FIGURE 42.2 – Limite infinie d'une suite (en $-\infty$)

Propriétés 42.3 (Limite des suites de référence)**.**

1. $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$,
2. $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$,
3. $\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$,
4. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Propriété 42.4 (Limites et opposés)**.** $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ *équivaut à* $\lim_{n\to+\infty}(-u_n) = +\infty$.

2 Limites finies - Suites convergentes

Définition 42.5. *On dit que la suite* (u_n) tend vers un nombre ℓ *si tout intervalle du type* $]\ell - r\,,\ell + r[$ *(avec* $r > 0$*) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*

FIGURE 42.3 – Limite finie d'une suite

Remarque 42.6. Dire que la suite (u_n) tend vers un nombre ℓ, revient aussi à dire que :

1. L'inégalité $|u_n - \ell| < r$ est vraie à partir d'un certain rang ;
2. La double inégalité $\ell - r < u_n < \ell + r$ est vraie à partir d'un certain rang.

Exemple 42.7. Soit la suite définie par $u_n = \frac{3}{n}$. Pour $r > 0$, $0 < \frac{3}{n} < r$ est équivalent à $n > \frac{3}{r}$. Donc, pour n assez grand, $-r < u_n < r$. La suite (u_n) tend vers 0.

Propriété 42.8. *Si une suite (u_n) a une limite finie ℓ, alors la limite ℓ est unique.*

Si une suite (u_n) a une limite ℓ, on dit aussi que la suite est convergente ou qu'elle converge vers ℓ et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Propriété 42.9. *Dire qu'une suite (u_n) tend vers un nombre ℓ équivaut à dire que la suite $(u_n - \ell)$ tend vers 0.*

Exemple 42.10. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{4n+3}{n}$. L'observation de la courbe représentant la suite dans un repère orthogonal montre que les termes de la suite sont de plus en plus proches du nombre 4.

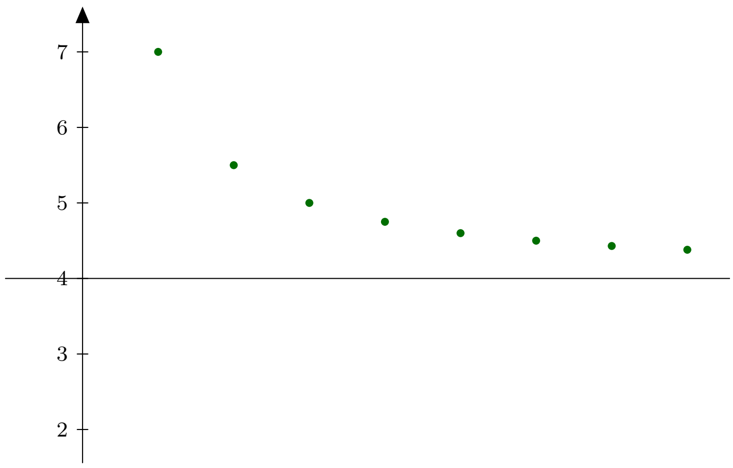


FIGURE 42.4 – Représentation graphique de la suite définie par $u_n = \frac{4n+3}{n}$ pour $n \geq 1$

On a :

$$|u_n - 4| = \frac{3}{n} \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$$

donc la suite (u_n) tend vers le nombre 4.

Propriété 42.11 (Limites de suites de référence).
1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
3. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$
4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Définition 42.12. *On appelle* suite divergente *une suite qui ne converge pas.*

Remarque 42.13. Si une suite diverge alors, soit la suite a une limite égale à $+\infty$, soit la suite a une limite égale à $-\infty$, soit la suite n'a pas de limite.

Exemple 42.14. La suite $(-1)^n$ est une suite divergente. La limite de cette suite ne peut être que 1 ou -1. Or, la suite admet presque tous ses termes dans l'intervalle $]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$ et également dans l'intervalle $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$. Il est donc impossible que 1 ou -1 soient limites de la suite.

3 Limites et opérations algébriques

Propriété 42.15 (Limite d'une somme de suites).

si $\lim_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
si $\lim_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n) =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*forme ind.*

Remarque 42.16. L'expression « forme ind. » (ou « forme indéterminée ») signifie que l'on ne peut pas conclure directement et une étude spécifique est nécessaire.

Propriété 42.17 (Limite d'un produit de suites).

si $\lim_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell<0$ *ou* $-\infty$	$\ell>0$ *ou* $+\infty$	$\ell<0$ *ou* $-\infty$	$\ell>0$ *ou* $+\infty$	0
si $\lim_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) =$	$\ell+\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*forme ind.*

Propriété 42.18 (Limite de l'inverse d'une suite).

si $\lim_{n\to+\infty} u_n =$	$\ell\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0 *avec* $u_n>0$	0 *avec* $u_n<0$	0
alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} =$	$\frac{1}{\ell}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	*forme ind.*

Exemples 42.19.

1. Soit la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \left(\frac{4n+3}{n}\right)\left(3+\frac{5}{n^3}\right).$$

On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n^3} = 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(3+\frac{5}{n^3}\right) = 3.$$

On a montré précédemment que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4n+3}{n} = 4.$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} v_n = 4\times 3 = 12$.

2. Soit la suite (w_n) définie par $w_n = n^3\sqrt{n}+\frac{1}{n^2}+3$. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} n^3\sqrt{n} = +\infty.$$

De plus $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2} = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}+3 = 3.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} n^3\sqrt{n}+\left(\frac{1}{n^2}+3\right) = +\infty.$$

3. Soit la suite (z_n) définie par $z_n = \frac{1}{n^5\sqrt{n}}$. On écrit $n^5 = n^3 n^2$ et on montre que $\lim_{n\to+\infty} n^5 = +\infty$, d'où $\lim_{n\to+\infty} n^5\sqrt{n} = +\infty$. On a, d'après la propriété précédente,

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^5\sqrt{n}} = 0.$$

4 Limites et comparaison de suites

Propriété 42.20. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$. Si (u_n) et (v_n) sont des suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ' alors $\ell \leq \ell'$.*

Propriété 42.21 (Théorème des gendarmes)**.** *Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant à partir d'un certain rang, $u_n \leq w_n \leq v_n$. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de même limite ℓ, alors la suite (w_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$.*

Propriétés 42.22. 1. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.*
   - *Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*
   - *Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

2. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant, à partir d'un certain rang, $|u_n| \leq v_n$. Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

Exemple 42.23. Soit la suite définie par $u_n = 7 + \frac{\sin n}{n}$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad 7 - \frac{1}{n} \leq 7 + \frac{\sin n}{n} \leq 7 + \frac{1}{n}.$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(7 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(7 - \frac{1}{n}\right) = 7.$$

Le théorème des gendarmes permet d'en déduire que la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 7$.

5 Limites des suites arithmétiques et géométriques

Voir la **Leçon nº 43 : Suites arithmétiques et géométriques** pour une définition des suites arithmétiques et géométriques.

Propriété 42.24. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.*
- *Si $r > 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*
- *Si $r < 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

Propriété 42.25. *Soit (u_n) la suite géométrique de raison q définie par $u_n = q^n$.*
- *Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*
- *Si $q > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*
- *Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante.*
- *Si $q \leq -1$, alors la suite (u_n) est divergente.*

Exemples 42.26. 1. $\lim_{n\to+\infty}(350 \times 0,95^n) = 0$. On a $0 < 0,95 < 1$ et $\lim_{n\to+\infty} 0,95^n = 0$. La propriété sur le produit des limites permet de conclure.

2. $\lim_{n\to+\infty}(-3 \times 1,01^n) = -\infty$. On a $1,01 > 1$, $\lim_{n\to+\infty} 1,01^n = +\infty$. La propriété sur le produit des limites permet de conclure.

6 Déterminer la limite d'une suite

6 1 Méthodes

Méthode 42.27 (Déterminer la limite d'une suite)**.** ***1.*** *Exprimer la suite en fonction de suites dont on connaît la limite et utiliser les propriétés sur les opérations algébriques.*

2. *Encadrer la suite par deux suites ayant même limite.*

3. *Majorer l'écart, entre le terme général de la suite et la limite, par le terme général d'une suite convergent vers* 0*.*

6 2 Exemples

Exemples 42.28.

1. On veut déterminer la limite de la suite (u_n) définie par
$$u_n = \frac{9n^2 - 5n + 2}{n^2}.$$
On a :
$$u_n = \frac{9n^2}{n^2} - \frac{5n}{n^2} + \frac{2}{n^2} = 9 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}.$$
Les suites $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ convergent vers 0. On a donc :
$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{5}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2} = 0.$$
On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 9$.
2. On veut déterminer la limite de la suite (u_n) définie par
$$u_n = \frac{4n^3 - 2n^2 + 1}{5n^3 - 4n + 6}.$$
Pour cela, on transforme l'expression de (u_n) comme pour la recherche de la limite en $+\infty$ d'une fraction rationnelle :
$$u_n = \frac{4n^3 - 2n^2 + 1}{5n^3 - 4n + 6} = \frac{n^3(4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3})}{n^3(5 - \frac{4}{n^2} + \frac{6}{n^3})} = \frac{4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{5 - \frac{4}{n^2} + \frac{6}{n^3}}.$$
En procédant comme dans l'exemple 1, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \left(4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}\right) = 4 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(5 - \frac{4}{n^2} + \frac{6}{n^3}\right) = 5.$$
Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{5}$.
3. On veut déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :
$$u_n = \frac{5n^2 + (-1)^n}{n^2 + 2}.$$
Comme $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, on a :
$$5n + 1 \leq 5n^2 + (-1)^n \leq 5n^2 + 1,$$
d'où par encadrement
$$\frac{5n^2 - 1}{n^2 + 2} \leq u_n \leq \frac{5n^2 + 1}{n^2 + 2}.$$

On a :

$$\frac{5n^2+1}{n^2+2} = \frac{n^2(5+\frac{1}{n^2})}{n^2(1+\frac{2}{n^2})} = \frac{5+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(5+\frac{1}{n^2}\right) = 5 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right) = 1.$$

En utilisant le quotient, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2+1}{n^2+2} = 5.$$

On montre de même que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2-1}{n^2+2} = 5.$$

La suite est donc encadrée par deux suites convergentes vers le même nombre 5. Le « théorème des gendarmes » implique alors que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 5.$$

4. On veut déterminer la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{n-\sin n}{n}.$$

On a, pour tout n,

$$|u_n - 1| = \left|-\frac{\sin n}{n}\right| = \left|\frac{\sin n}{n}\right|.$$

On en déduit que, pour tout n, $|u_n - 1| \leq \frac{1}{n}$ avec

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Compléments

Démonstration du théorème des gendarmes. Soit $r > 0$. A partir d'un certain rang, $\ell - r < u_n < \ell + r$. De même, pour la suite (v_n), à partir d'un certain, $\ell - r < v_n < \ell + r$. Donc, à partir d'un certain rang,

$$\ell - r < u_n \leq w_n \leq v_n < \ell + r.$$

Finalement, pour n assez grand,

$$\ell - r < w_n < \ell + r.$$

□

LEÇON

43 Suites arithmétiques, suites géométriques

Niveau, prérequis, références

Niveau Première S

Prérequis Suites

Références [107, 108]

Contenu de la leçon

1 Suites arithmétiques

Définition 43.1. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite* arithmétique *si, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$, où r est un nombre réel. Le nombre r s'appelle la* raison *de la suite arithmétique.*

Remarque 43.2. Une suite arithmétique est donc définie par son premier terme u_0 et sa raison r. On a alors :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r \\ u_2 &= u_1 + r = u_0 + 2r \\ u_3 &= u_2 + r = u_0 + 3r \\ &\dots \end{aligned}$$

Propriété 43.3. *Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout n, on a $u_n = u_0 + nr$.*

Exemple 43.4. Soit u la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 3. On a $u_n = 3n + 1$ et on obtient le tableau de valeurs suivant.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31

Propriété 43.5. *Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. S'il existe deux nombres réels r et b tels que, pour tout n, $u_n = b + nr$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r et de premier terme b.*

Exemple 43.6. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{152n+30}{6}$. On a, pour tout n, $u_n = \frac{76}{3}n + 5$ donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{76}{3}$ et de premier terme 5.

Remarques 43.7.

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Si $n > m > 0$ alors
$$u_n = u_m + (n-m)r.$$
2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r ($r \neq 0$) et de premier terme u_0. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = r$. On a :
   - si $r > 0$, $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est strictement croissante ;
   - si $r < 0$, $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est strictement décroissante.
3. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r ($r \neq 0$) et de premier terme u_0. Alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty.$$
(les suites arithmétiques ne convergent pas).

Propriété 43.8. *Soit S_n la somme $u_0+u_1+\cdots+u_n$ des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r. On a :*

$$S_n = (n+1)\frac{(u_0+u_n)}{2}.$$

Exemple 43.9. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 30n-6$. On a :

$$u_0+u_1+\cdots+u_n = (n+1)\frac{(u_0+u_n)}{2} = (n+1)(15n-6).$$

Remarque 43.10. La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique s'obtient par la formule :

$$(\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Conséquence 43.11. *La suite des entiers naturels non nuls est une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1 :*

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2 Suites géométriques

Définition 43.12. *La suite (u_n) est* géométrique *si, pour tout n, $u_{n+1} = qu_n$, où q est un nombre réel non nul. Le nombre q s'appelle la* raison de la suite géométrique*.*

Remarques 43.13.

1. Si les termes de la suite ne sont pas nuls, alors, pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.
2. Une suite géométrique est définie par son premier terme u_0 et sa raison q. On a :

$$u_1 = u_0 q,\ u_2 = u_1 q = u_0 q^2,\ u_3 = u_2 q = u_0 q^3,\ \ldots$$

Propriété 43.14. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q (q non nul) alors, pour tout n, on a $u_n = u_0 q^n$.*

Exemple 43.15. Soit u la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3. On a $u_n = 3^n$ et on obtient le tableau de valeurs suivant.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

Propriété 43.16. *Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = aq^n$ où a et q sont des nombres non nuls, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme a.*

Exemple 43.17. Soit la suite définie par $u_n = 5\frac{76^n}{3^n}$. On a $u_n = 5\left(\frac{76}{3}\right)^n$, donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{76}{3}$ et de raison 5.

Remarque 43.18. Soit la suite géométrique (u_n) définie par $u_n = q^n$ ($q>0$). Pour tout n, on a $u_{n+1}-u_n = q^{n+1}-q^n = q^n(q-1)$. Donc :

- si $q>1$, $u_{n+1}-u_n>0$ et la suite (u_n) est strictement croissante ;
- si $0<q<1$, $u_{n+1}-u_n<0$ et la suite (u_n) est strictement décroissante ;
- si $q=1$, $u_{n+1}-u_n=0$ et la suite (u_n) est constante.

Remarques 43.19 (Convergence et alternance).

1. Une suite géométrique est convergente vers 0 si et seulement si $-1<q<1$.
2. Si $q<0$, on dit que la suite géométrique est *alternée*.

Propriété 43.20. *Soit S_n la somme $u_0+u_1+\dots+u_n$ des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de raison q (q différent de 1). On a*

$$S_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q} = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Exemple 43.21. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{76}{3}$ et de premier terme 5. On veut calculer la somme $u_0+u_1+u_2+u_3$, notée S_3. On a :

$$S_3 = 5\frac{1-\left(\frac{76}{3}\right)^4}{1-\frac{76}{3}} = \frac{2285075}{27}.$$

Conséquence 43.22. *Pour tout nombre réel $x \neq 1$, on a :*

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Exemple 43.23.

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^9 = \frac{1-2^{10}}{1-2} = 2^{10} - 1 = 1023.$$

3 Montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique

Méthode 43.24.

1. ***Écrire le terme général sous la forme*** $u_n + nr = u_0$
   - *Montrer qu'il existe un nombre réel r tel que, pour tout n, $u_n = nr + u_0$.*
   - *Conclure que (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.*
2. ***Étudier la différence*** $u_{n+1} - u_n$
   - *Calculer la différence $u_{n+1} - u_n$ et montrer qu'elle est constante et égale à r*
   - *Conclure que (u_n) est une suite arithmétique de raison r.*
3. ***Écrire le terme général sous la forme*** $u_n = u_0 q^n$
   - *Montrer qu'il existe un nombre réel q, pour tout n, $u_n = u_0 q^n$.*
   - *Conclure que (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.*
4. ***Trouver une relation de la forme*** $u_{n+1} = q u_n$
   - *Montrer que l'on peut écrire $u_{n+1} = q u_n$ (avec $q \neq 0$).*
   - *Conclure que (u_n) est une suite géométrique de raison q.*

Remarque 43.25. Dans la méthode 4, on peut montrer aussi que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant.

Exemples 43.26.

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = -5n + 12$ et la suite (v_n) vérifiant pour tout n, $v_n = 2u_n + n + 5$. On montre que (v_n) est une suite arithmétique. Pour tout n :

   $$v_n = 2u_n + n + 5 = 2(-5n+12) + n + 5 = -9n + 29.$$

   (v_n) est donc une suite arithmétique de raison -9 et de premier terme 29.
2. Soit la suite (v_n) définie par $v_{n+1} = \frac{nv_n+4}{n+1}$ et de premier terme $v_1 = 1$. On montre que la suite (u_n) vérifiant $u_n = nv_n$ est une suite arithmétique. Pour tout $n \geq 1$,

   $$u_{n+1} - u_n = (n+1)v_{n+1} - nv_n = (n+1)\frac{nv_n+4}{n+1} - nv_n = 4.$$

   Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme u_1 tel que $u_1 = 1$. On a, pour tout $n \geq 1$, $u_n = 4(n-1) + u_1 = 4n - 3$.
3. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = 2(-5)^{n+1}\left(\frac{10}{3}\right)^n$ est une suite géométrique. On a, pour tout n,

   $$u_n = 2(-5)(-5)^n\left(\frac{10}{3}\right)^n = -10\left(-\frac{50}{3}\right)^n.$$

   Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{50}{3}$ et de premier terme -10.

4. Soit la suite (v_n) de premier terme v_0 avec $v_0 = 3$ et définie par $v_{n+1} = -7v_n + 8$. On montre que la suite (u_n) vérifiant, pour tout n, $u_n = v_n - 1$ est une suite géométrique. On a, pour tout n,
$$u_{n+1} = v_{n+1} - 1 = (-7v_n + 8) - 1 = -7(v_n - 1) = -7u_n.$$
Pour tout n, $u_{n+1} = -7u_n$. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison -7 et de premier terme 2. On a donc, pour tout n, $u_n = u_0 q^n = 2(-7)^n$ et $v_n = u_n + 1 = 2(-7)^n + 1$.

Compléments

1 Démonstrations

Démonstration de la propriété 43.8. Soit
$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n \tag{43.1}$$
$$S_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_1 + u_0 \tag{43.2}$$

On en déduit que :
$$2S_n = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + (u_2 + u_{n-2}) + \cdots + (u_{n-1} + u_1) + (u_n + u_0).$$

On a :
$$\begin{aligned} u_0 + u_n &= u_0 + (u_0 + nr) = 2u_0 + nr \\ u_1 + u_{n-1} &= (u_0 + r) + (u_0 + (n-1)r) = 2u_0 + nr \\ u_2 + u_{n-2} &= (u_0 + 2r) + (u_0 + (n-2)r) = 2u_0 + nr, \\ &\dots \end{aligned}$$

Toutes ces sommes sont égales à $u_0 + u_n$. On obtient :
$$2S_n = (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \cdots + (u_0 + u_n)$$

La somme précédente comporte $(n+1)$ termes égaux à $(u_0 + u_n)$, d'où
$$2S_n = (n+1)(u_0 + u_n).$$

□

Démonstration de la propriété 43.20. Soit S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite. On peut écrire :
$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n; \\ qS_n &= u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}. \end{aligned}$$

Alors $S_n - qS_n = u_0 - u_{n+1}$ soit $(1-q)S_n = u_0 - u_{n+1}$, d'où :
$$S_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q} = \frac{u_0 - u_0 q^{n+1}}{1-q} = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}, \quad \text{car } q \neq 1.$$

□

2 Suites arithmético-géométriques

Définition 43.27. *On dit qu'une suite (u_n) est arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b tels que $u_{n+1} = au_n + b$.*

Exemple 43.28. La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 2u_n + 1$ et de premier terme $u_0 = 1$ est arithmético-géométrique.

Remarque 43.29. Une suite arithmético-géométrique n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.

Exemple 43.30. Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique définie de premier terme $u_0 = 5$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$. On a alors :

$$u_1 = 2 \times 5 - 3 = 7, \ u_2 = 2 \times 7 - 3 = 11, \ u_3 = 2 \times 11 - 3 = 19.$$

On définit la suite (v_n) définie, pour tout $n \geq 0$, par : $v_n = u_n - 3$. On a alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 = 2u_n - 3 - 3 \\ &= 2u_n - 6 = 2(u_n - 3) = 2v_n. \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 5 - 3 = 2$. On peut donc en conclure que, pour tout n,

$$v_n = v_0 \times 2^n = 2 \times 2^n.$$

Ainsi, $u_n = v_n + 3$ et on peut en déduire que $u_n = 2 \times 2^n + 3$, pour tout n.

En résumé, le schéma de l'étude d'une suite arithmético-géométrique est toujours le même :

Méthode 43.31 (Étude d'une suite arithmético-géométrique).

1. *Introduction d'une suite auxiliaire (v_n) définie à l'aide de la suite (u_n).*
2. *Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.*
3. *En déduire une formule exprimant v_n en fonction de n.*
4. *A partir de la relation entre (v_n) et (u_n), en déduire une formule général exprimant u_n en fonction de n.*

Pour fabriquer cette suite auxiliaire, voici comment on procède. On suppose qu'on doit étudier la suite arithmético-géométrique (u_n) de premier terme u_0 donné et défini, pour tout $n \geq 0$, par : $u_{n+1} = au_n + b$ (on suppose que $a \neq 1$ et $b \neq 0$). On résout l'équation $x = ax + b$ et on note ℓ la solution de cette équation. On a alors $\ell = a\ell + b$. Ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ \ell = a\ell + b \end{cases}$$

et en soustrayant, $u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell)$. On pose alors $v_n = u_n - \ell$ et on obtient ainsi que (v_n) est une suite géométrique.

LEÇON

44 Suites de terme général a^n, n^p et $\ln n$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$)

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S - BTS (Croissance comparée)

Prérequis Fonctions exponentielles, fonctions logarithmes, suites numériques

Références [109, 110]

Contenu de la leçon

1 Etude de la suite a^n ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$)

Théorème 44.1. *Soit* (u_n) *la suite définie par* $u_n = a^n$ *avec* $a \in \mathbb{R}_+^*$.
Si $a \in]1, +\infty[$ *alors* (u_n) *est croissante.*
Si $a = 1$ *alors* (u_n) *est constante.*
Si $0 < a < 1$ *alors* (u_n) *est décroissante.*

Théorème 44.2. *Soit* (u_n) *la suite définie par* $u_n = a^n$ *avec* $a \in \mathbb{R}_+^*$. *Alors :*

1. *Si* $a \in]1, +\infty[$ *alors* (u_n) *est divergente (de limite* $+\infty$*).*
2. *Si* $a = 1$ *alors* (u_n) *est constante (donc convergente vers* 1*).*
3. *Si* $0 < a < 1$ *alors* (u_n) *est convergente vers* 0.

Pour démontrer le théorème 44.2, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 44.3 (Inégalité de Bernoulli)**.** *Pour tout réel* x *positif et tout entier naturel* n*, on a :*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

2 Étude de la suite n^p ($n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$)

Théorème 44.4. *Soit* (u_n) *la suite* $u_n = n^p$ *avec* $p \in \mathbb{N}$.

1. *Si* $p = 0$ *alors la suite* (u_n) *est stationnaire.*
2. *Si* $p > 0$ *alors la suite* (u_n) *est strictement croissante.*

Théorème 44.5. *Soit* (u_n) *la suite* $u_n = n^p$ *avec* $p \in \mathbb{N}$.

1. *Si* $p = 0$ *alors la suite* (u_n) *est stationnaire donc converge vers* 1.
2. *Si* $p > 0$ *alors la suite* (u_n) *diverge vers* $+\infty$.

3 Étude de la suite $\ln(n)$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)

Théorème 44.6. *Soit* (u_n) *la suite définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *par* $u_n = \ln(n)$. *La suite* (u_n) *est strictement croissante.*

Théorème 44.7. *Soit* (u_n) *la suite définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *par* $u_n = \ln(n)$. *La suite* (u_n) *diverge vers* $+\infty$.

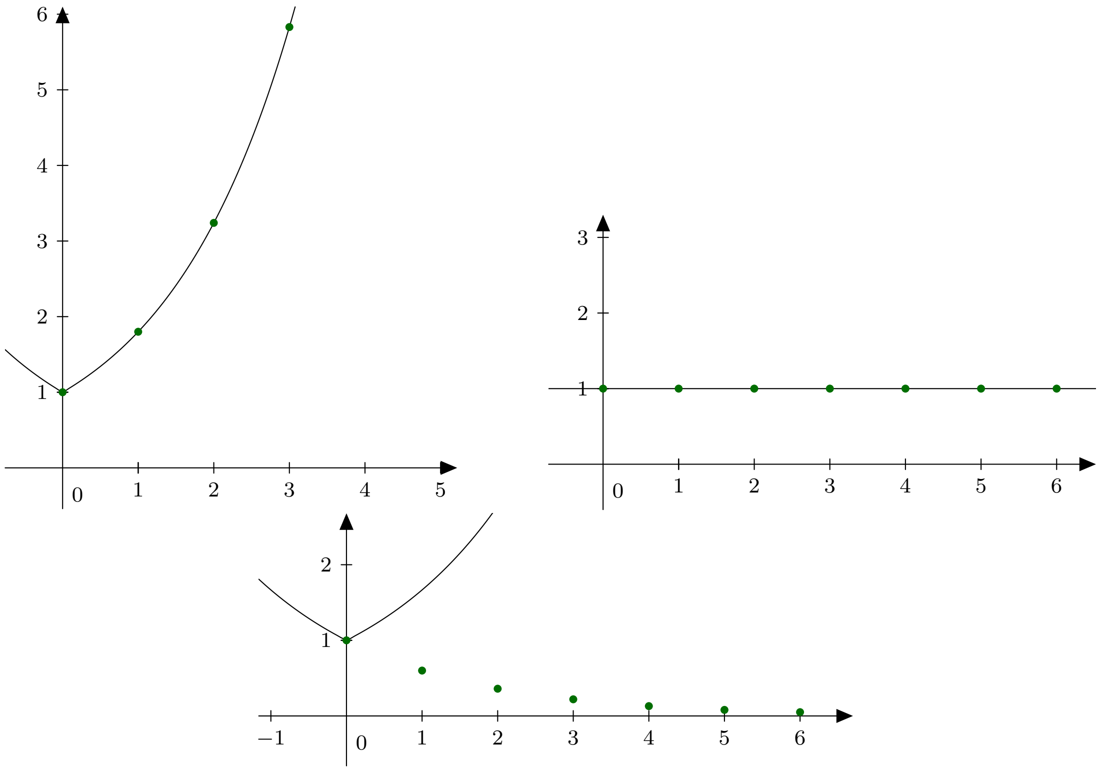


FIGURE 44.1 – Représentation graphique de la suite $u_n = a^n$ avec $a > 1$, $a = 1$ et $a < 1$

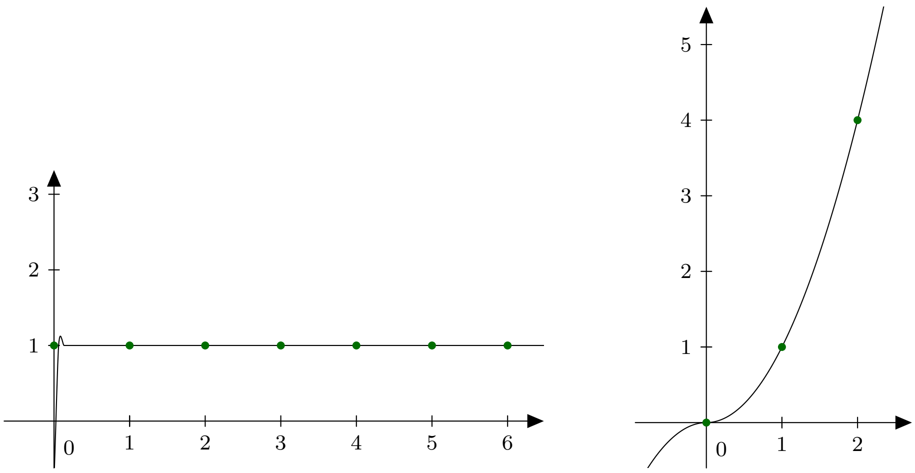


FIGURE 44.2 – Représentation graphique de la suite $u_n = n^p$ avec $p = 0$ et $p > 0$

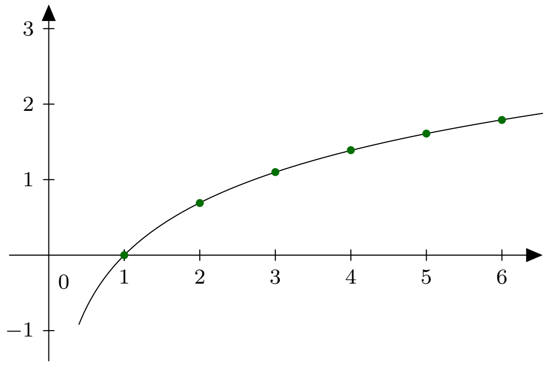


FIGURE 44.3 – Représentation graphique de la suite $u_n = \ln n$

4 Croissance comparée

Lorsque plusieurs suites tendent vers $+\infty$, la croissance comparée se propose de déterminer laquelle croît le « plus vite ».

Définition 44.8 (Suite dominée)**.** *Une suite (u_n) est dite* dominée *par une suite (v_n), quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si on peut trouver un réel positif A et un entier N qui vérifient*

$$n < N \Rightarrow |u_n| \leq A \times |v_n| .$$

Remarque 44.9 (Notation de Landau)**.** On notera $O(v_n)$ l'ensemble des suites dominées par (v_n).

Définition 44.10 (Suites négligeables)**.** *Une suite (u_n) est dite* négligeable *devant une suite (v_n), quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si on peut trouver une suite (ε_n) qui vérifie :*

$$\begin{cases} u_n = \varepsilon_n \times v_n, & \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \end{cases} .$$

Remarque 44.11 (Notation de Landau)**.** On notera $o(v_n)$ l'ensemble des suites négligeables devant (v_n).

Théorème 44.12. *Si la suite (v_n) ne s'annule pas au delà d'un certain rang, on a*

$$u_n \in o(v_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Théorème 44.13. *La suite géométrique (ou exponentielle) $u_n = a^n$ de raison $a \in \mathbb{N}$ strictement supérieure à 1 croit plus vite que toute puissance de n, $v_n = n^p$ avec $p \in \mathbb{N}$:*

$$n^p \in o(a^n) \quad \textit{ou encore} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty.$$

Théorème 44.14. *La suite géométrique (ou exponentielle) $u_n = a^n$ de raison $a \in \mathbb{N}$ strictement supérieure à 1 et la suite puissance $v_n = n^p$, pour tout $p \geq 1$ croit plus vite que la suite logarithmique, $w_n = \ln(n)$:*

$$\ln(n) \in o(a^n) \quad \textit{et} \quad \ln(n) \in o(n^p) .$$

Compléments

Démonstration du théorème 44.1. On rappelle que, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$a^n = \mathrm{e}^{n \ln(a)}.$$

Ainsi

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\mathrm{e}^{(n+1)\ln a}}{\mathrm{e}^{n\ln a}}$$

On utilise la propriété de transformation de produit en somme de l'exponentielle :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{(n+1)\ln(a)-n\ln(a)} = \mathrm{e}^{\ln a} = a.$$

1. Si $a > 1$ alors $u_{n+1} - u_n > 1$ donc (u_n) est croissante.
2. Si $a = 1$ alors $u_{n+1} - u_n = 1$ donc (u_n) est stationnaire.
3. Si $0 < a < 1$ alors $u_{n+1} - u_n < 1$ donc (u_n) est décroissante.

□

Démonstration du lemme 44.3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On considère la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) = (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Initialisation On a $\mathcal{P}(0)$ puisque $(1+x)^0 \geq 1 + 0x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Hérédité Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$:

$$(1+x)^n = 1 + nx.$$

Comme $x > 0$, on a aussi $1 + x > 0$. En multipliant l'inégalité ci-dessus par $(1+x)$, on obtient :

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x).$$

Or :

$$(1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + nx^2 + 1 + (n+1)x + nx^2.$$

Comme $nx^2 \geq 0$, on a :

$$(1+nx)(1+x) \geq 1 + (n+1)x.$$

D'où :

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x.$$

Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

□

Démonstration du théorème 44.2. 1. On suppose que $a \in \left]1\,, +\infty\right[$. Posons $x = a - 1$. Alors $x \in \left]0\,, +\infty\right[$. D'après l'inégalité de Bernoulli :

$$a^n = (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} 1 + nx = +\infty$. Par comparaison, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty.$$

La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$.

2. Si $a = 1$ alors le résultat est évident.

3. Si $0 < a < 1$ alors on pose :
$$a' = \frac{1}{a}.$$
On a alors $a' \in]1\,,+\infty[$. D'après le résultat précédent :
$$\lim_{n\to+\infty} a'^n = +\infty$$
et par passage à l'inverse, on obtient :
$$\lim_{n\to+\infty} a^n = 0.$$
La suite converge donc vers 0.

□

Démonstration du théorème 44.4. Soit $p \in \mathbb{N}$. On étudie la différence $u_{n+1} - u_n$.
$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^p - n^p = (1+n)^p - n^p$$
Si $p = 0$ alors $(1+n)^0 - n^0 = 1 - 1 = 0$. On suppose maintenant que $p > 0$ alors par un développement de $(1+n)^p$:
$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^p - n^p = (1+n)^p - n^p = n^p + \cdots + 1 - n^p \geq 1$$
où $\cdots$ est le développement classique de Bernoulli. Ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$, d'où la suite (u_n) est croissante quand $p \neq 0$. □

Démonstration du théorème 44.6. Si $p = 0$ alors $u_n = 1$, d'où le résultat. On suppose que $p \neq 0$. Dans la **Leçon n° 43 : Convergence de suites réelles**, on a vu le résultat suivant :
$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty. \tag{44.1}$$
Par récurrence :

Initialisation Si $p = 1$ alors on applique (44.1) : $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Hérédité Supposons que pour un rang $p \geq 1$ fixé, on a montré
$$\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty.$$
On montre alors la propriété au rang $p+1$. On a alors :
$$\lim_{n\to+\infty} n^{p+1} = \lim_{n\to+\infty} n \times n^p.$$
Or, par hypothèse de récurrence, $\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty$. En appliquant les propriétés de produit de limite avec (44.1), on obtient alors :
$$\lim_{n\to+\infty} n^{p+1} = +\infty.$$

□

Démonstration du théorème 44.6. On étudie la différence $u_{n+1} - u_n$:
$$u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(n(n+1)) = \ln(n^2+n).$$
Or $n \geq 1$ donc $n^2 + n \geq 1$ donc $\ln(n^2+n) \geq 0$ et ainsi la suite (u_n) est strictement croissante. □

Démonstration du théorème 44.7. On utilise le fait que si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $x_m \in \mathbb{R}$ tel que

$$x > x_m \geq f(x) > M$$

En prenant la partie entière dans chaque membre de l'inégalité, on obtient la propriété.

En particulier :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty.$$

□

Démonstration du théorème 44.14. Posons $r = a-1$, on a aussitôt : $a^n = (1+r)^n$ avec $0 < r$. Soit N un entier naturel vérifiant $p < N$, pour tout entier n supérieur à $N+1$, on écrit le développement du binôme :

$$(1+r)^n = \sum_{k=0} \mathrm{C}_n^k r^k > \mathrm{C}_n^N r^N.$$

Cette majoration ne suffit pas encore, nous allons affiner la condition en n. En prenant maintenant n supérieur à $2N$, le coefficient du binôme vérifie :

$$\mathrm{C}_n^N = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-N+1)}{N!} > \frac{n^N}{2^N \times N!}.$$

Ainsi, nous avons :

$$p < N,\ 2N < n \Rightarrow \frac{n^N}{2^N \times N!} \times r^N < a^n \Rightarrow \frac{(a-1)^N}{2^N \times N!} \times \frac{n^N}{n^p} < \frac{a^n}{n^p}.$$

L'exposant $N-p$ étant strictement positif, $\frac{n^N}{n^p} = n^{N-p}$ tend vers $+\infty$. □

LEÇON

45 Suites de nombres réels définies par une relation de récurrence

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S - BTS
Prérequis Etude de suites arithmétiques et géométriques
Références [111, 112, 113, 114, 115, 116]

Contenu de la leçon

1 Suites définies par une relation de récurrence

Définition 45.1 (Suite définie par une relation de récurence)**.** *Une suite définie par récurence est une suite que l'on connaît par son terme initial u_0 ou u_1 et une relation qui lie un terme quelconque en fonction du précédent ou des précédents.*

Il existe différents types de suite définie par récurrence :

1. Suite définie par une relation de récurrence du type
$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
2. Suite arithmético-géométrique : $u_{n+1} = au_n + b$.
3. Suites définies par une relation de la forme :
$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$
et leurs deux premiers termes.
4. Suite homographique : $u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$.
5. ...

2 Suites définies par récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$

2 1 Définitions et exemples

Si la suite (u_n) est définie par son premier terme u_0 et par :
$$u_{n+1} = f(u_n), \qquad \text{pour tout } n \geq 0,$$
(avec $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$), il n'y a pas de formule permettant de calculer directement u_n en fonction de n, mais on dispose d'une relation (dite de récurrence) permettant de calculer le terme de rang $n+1$ à partir de celui de rang n. Ainsi, en connaissant le premier terme u_0, on peut calculer le terme suivant u_1, puis connaissant u_1, on peut calculer u_2.

Exemples 45.2.
1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3 \times u_n$. On a alors :
$$u_1 = 3 \times u_0 = 3 \times 2 = 6$$
$$u_2 = 3 \times u_1 = 3 \times 6 = 18$$
$$u_3 = 3 \times u_2 = 3 \times 18 = 52.$$
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1,5$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{4+u_n}$. On a alors :
$$u_1 = 2\sqrt{4+u_0} = 2\sqrt{4-1{,}5} \simeq 3{,}16$$
$$u_2 = 2\sqrt{4+u_1} \simeq 2\sqrt{4+3{,}16} \simeq 5,35.$$

2.2 Détermination graphique des termes

Dans un repère orthonormé, on trace d'abord la représentation graphique de la fonction f définissant la relation de récurrence et la droite d'équation $y = x$. On part de u_0 en abscisse : l'ordonnée du point de la courbe correspondant à cette abscisse nous donne u_1. Pour déterminer $u_2 = f(u_1)$, il nous faut rabattre u_1 sur l'axe des abscisses, pour cela, on utilise la droite d'équation $y = x$. Dès lors, u_2 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse u_1.

Pour poursuivre la construction, on répète le procédé en rabattant u_2 sur l'axe des abscisses, u_3 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisses u_2...

Exemple 45.3. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = a \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = 1{,}5u_n^2 - 1 = f(u_n)$ avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,5x^2 - 1$. On voit que pour $a = 0,9$, la suite semble converger vers

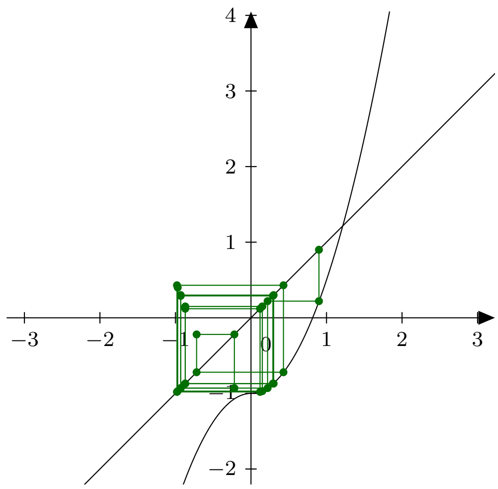


FIGURE 45.1 – Représentation graphique de la suite $u_{n+1} = 1,5u_n^2 - 1$ quand $u_0 = 0,9$

un point (qu'on appelle point fixe). Si on prend, maintenant $a = 1,8$, on obtient la représentation graphique de la figure 45.2

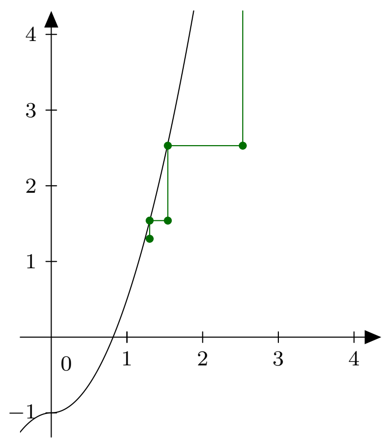


FIGURE 45.2 – Représentation graphique de $u_{n+1} = 1,5u_n^2-$ quand $u_0 = 1,3$

Le but de cet exemple est d'étudier la suite

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = 1,5x^2 - 1. \end{cases}$$

On résout d'abord $f(x) = x$:

$$1,5x^2 - 1 = x \Rightarrow 1,5x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 2 = 0.$$

Le discriminant du polynôme est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 24 = 28 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{7}.$$

D'où l'équation a pour solutions :

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{7}}{6} = \frac{1 - \sqrt{7}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}.$$

D'après le graphique, la parabole, courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$ ont deux points d'intersection un d'abscisse négative ℓ (limite de (u_n) quand elle converge) et un d'abscisse positive a, donc $a = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$.

1. On étudie quand $u_0 \notin [-a, a]$. Si $u_0 < -a = -\frac{1+\sqrt{7}}{3}$ alors :

$$-u_0 > a = \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \Rightarrow (-u_0)^2 = u_0^2 > \left(\frac{1 + \sqrt{7}}{3}\right)^2 = \frac{8 + 2\sqrt{7}}{9}.$$

$$u_1 = 1,5u_0^2 - 1 > 1,5\frac{8 + 2\sqrt{7}}{9} - 1 = \frac{8 + 2\sqrt{7} - 6}{6} = \frac{1 + \sqrt{7}}{3} = a.$$

Si $u_0 > a$ alors

$$u_0^2 > \left(\frac{1 + \sqrt{7}}{3}\right)^2 = \frac{8 + 2\sqrt{7}}{9}$$

et d'après ce qui précède, $u_1 > a$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n > a$. D'après ce qui précède, $\mathcal{P}_1$ est vraie. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et on va en déduire $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie. Il suffit de remplacer u_0 par u_n dans le calcul précédent :

$$u_n > a = \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \Rightarrow u_n^2 > \left(\frac{1 + \sqrt{7}}{3}\right)^2 = \frac{8 + 2\sqrt{7}}{9}$$

$$u_{n+1} = 1,5u_n^2 - 1 > 1,5\frac{8 + 2\sqrt{7}}{9} - 1 = \frac{8 + 2\sqrt{7} - 6}{6} = \frac{1 + \sqrt{7}}{3} = a.$$

$\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On a démontré par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Pour démontrer que (u_n) est croissante, on cherche le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = 1,5u_n^2 - u_n - 1.$$

On reconnaît le trinôme du second degré étudié dans la première question u_0 est à l'extérieur des racines et pour $n \geq 1$, P_n implique que u_n est à l'extérieur des racines donc $u_{n-1} - u_n > 0$ et (u_n) est strictement croissante.

Soit la suite (v_n) définie par $v_{n+1} = 1,5v_n - 1$ et $v_1 = u_1$. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n \geq v_n$. On va démontrer par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$. P_1 est vraie. On suppose que P_n est vraie et on va déduire P_{n+1} vraie.

$$u_n > a > 1 \Rightarrow u_n^2 > u_n \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_n \Rightarrow u_n \geq v_n$$

$$u_{n+1} = 1,5u_n^2 - 1 > 1,5u_n - 1 \geq 1,5v_n - 1 = v_{n+1}.$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On a démontré par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

La suite arithmético-géométrique (v_n) tend vers $+\infty$ et on peut appliquer le théorème des gendarmes :

$$u_n > v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

2. On suppose que $u_0 \in]-a\,,a[$. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $-a < u_n < a$. $u_0 \in]-a\,,a[$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et on va en déduire $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie.

   Si $0 \leq u_n < a$
$$0 < u_n < a = \frac{1+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow 0 < u_n^2 < \left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{8+2\sqrt{7}}{9}$$
$$-1 < u_{n+1} = 1,5u_n^2 - 1 < 1,5\frac{8+2\sqrt{7}}{9} - 1 = \frac{8+2\sqrt{7}-6}{6} = \frac{1+\sqrt{7}}{3} = a.$$
$$-a < -1 \Rightarrow -a < u_n < a.$$

   $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

   Si $-a < u_n < 0$
$$0 < -u_n < a = \frac{1+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow 0 < (-u_n)^2 = u_n^2 < \left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2 = \frac{8+2\sqrt{7}}{9}.$$

   On a démontré par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

   D'après le graphique, la parabole, courbe représentation de f et la droite d'équation $y = x$ ont deux points d'intersection un d'abscisse négative ℓ donc $\ell = \frac{-1-\sqrt{7}}{3}$.

2 3 Suites arithmético-géométriques

Il s'agit des suites récurrentes définie par :
$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}, \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}.$$

C'est un cas particulier des suites étudiées plus en haut, f est une fonction linéaire. On veut exprimer le terme général u_n de cette suite en fonction de n et étudier sa limite éventuelle. Tout d'abord,

- Si $a = 1$ et $b = 0$, c'est une suite constante.
- Si $a = 1$ et $b \neq 0$ alors la suite (u_n) est arithmétique de raison b. On a donc, pour tout entier naturel n :
$$u_n = u_0 + bn.$$
  La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$ et $-\infty$ selon le signe de b.
- Si $b = 0$ et $a \neq 1$, alors la suite (u_n) est géométrique de raison a. On a donc, pour tout entier naturel n :
$$u_n = u_0 a^n.$$
  Ainsi, la suite diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de u_0 si $a > 1$ et si $a \in]-1\,,1[$ alors la suite converge vers 0 et si $a \leq -1$, elle diverge.
- Si $a = 0$ alors la suite (u_n) est stationnaire égale à b.

Dans ce qui suit, on suppose $a \neq 1$ et $b \neq 0$. Si (u_n) et (w_n) sont deux suites qui vérifient :
$$u_{n+1} = au_n + b \quad \text{et} \quad w_{n+1} = aw_n + b$$
alors leur différence (v_n) est une suite géométrique de raison a. En effet, pour tout n, on a :
$$v_{n+1} = u_{n+1} - w_{n+1} = au_n - b - aw_n - b = a(u_n - w_n) = av_n.$$
Il suffit donc de chercher une suite (w_n) la plus simple possible vérifiant la relation $w_{n+1} = aw_n + b$.

Soit la suite (w_n) constante. On note α cette constante. On a alors :
$$\alpha = a\alpha + b.$$

Comme $a \neq 1$, il vient :

$$\alpha = \frac{b}{1-a}.$$

En conséquence, la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$, où $\alpha = \frac{b}{1-a}$ est géométrique de raison a. On en déduit alors que pour tout n,

$$v_n = v_0 a^n = (u_0 - \alpha) a^n.$$

D'où

$$u_n = (u_0 - \alpha) a^n + \alpha.$$

Comme, on connaît le comportement asymptotique des suites géométriques (a^n), on en déduit celui de (u_n) :

- Si $u_0 = \alpha$ alors (u_n) est constante égale à α.
- Si $a \in \left]-1\,,1\right[$ et $u_0 \neq \alpha$ alors (u_n) converge vers α.
- Si $a > 1$ et $u_0 \neq \alpha$ alors (u_n) diverge vers $+\infty$ (si $u_0 > \alpha$) ou $-\infty$ (si $u_0 < \alpha$).
- Si $(a \leq -1$ et $u_0 \neq \alpha)$, alors (u_n) diverge.

Exemples 45.4. 1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{4} + 3$.

(a) On représente graphiquement les premiers termes de la suite. On trace d'abord la droite d'équation $y = \frac{x}{4} + 3$ et la droite d'équation $y = x$. On part de u_0 en abscisse : l'ordonnée du point de la courbe correspondant à cette abscisse nous donne u_1. Pour déterminer $u_2 = f(u_1)$, il nous faut rabattre u_1 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite d'équation $y = x$. Dès lors, u_2 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse u_1. Pour poursuivre la construction, on répète le procédé en rabattant u_2 sur l'axe des abscisses...

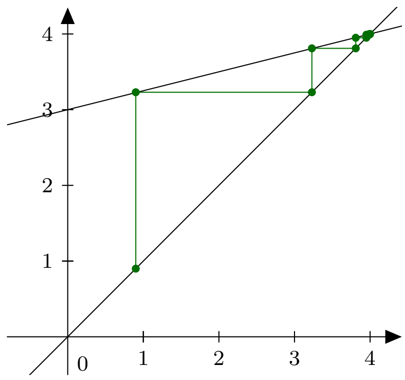


FIGURE 45.3 – Représentation de la suite $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$ avec $u_0 = 0,9$

(b) On montre que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 4$ est géométrique. Pour tout n,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 4}{u_n - 4} = \frac{\frac{u_n}{4} + 3 - 4}{u_n - 4} = \frac{\frac{u_n}{4} - 1}{u_n - 4} = \frac{\frac{1}{4}(u_n - 4)}{u_n - 4} = \frac{1}{4}.$$

(v_n) est donc géométrique de raison $b = \frac{1}{4}$.

(c) On en déduit l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n. Pour tout n :

$$v_n = b^n vXS_0 = -3\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad (\text{car } v_0 = u_0 - 4 = 1 - 4 = -3).$$

$$v_n = u_n - 4 \Leftrightarrow u_n = v_n + 4 = -3\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4.$$

(d) On détermine la limite de la suite (u_n) :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{-3\left(\frac{1}{4}\right)^n}_{\to 0} + 4 = 4 \quad (\text{car } -1 < \tfrac{1}{4} < 1).$$

(e) On détermine enfin l'expression de $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de n :

$$S_n = v_0 + 4 + v_1 + 4 + \cdots + v_n + 4 = v_0 + v_1 + \cdots + v_n + 4(n+1).$$

Or (v_n) est géométrique donc :

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}^{n+1}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = -3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} = 4 \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right).$$

D'où

$$S_n = -4 \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + 4(n+1).$$

2. Soit (u_n), la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1$.
   (a) On montre par récurrence que (u_n) est décroissante. Il s'agit de montrer que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$:
   - $u_1 - u_0 = \frac{4}{2} + 1 - 4 = -1 \leq 0$. La propriété est vraie au rang 0.
   - On suppose la propriété vraie au rang p, c'est-à-dire que $u_{p+1} - u_p \leq 0$. On a alors :

   $$u_{p+2} - u_{p+1} = \left(\frac{u_{p+1}}{2} + 1\right) - \left(\frac{u_p}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \underbrace{(u_{p+1} - u_p)}_{\leq 0} \leq 0.$$

     La propriété est alors vraie au rang $p+1$.

   Elle est donc vraie pour tout n. Donc (u_n) est décroissante pour tout n.

   (b) On montre par récurrence que (u_n) est minorée par 2.
   - $u_0 = 4 \geq 2$. La propriété est vraie au rang 0.
   - On suppose la propriété vraie au rang p, c'est-à-dire que $u_p \geq 2$. On a alors :

   $$\frac{u_p}{2} \geq 1 \Rightarrow \frac{u_p}{2} + 1 \geq 2 \Rightarrow u_{p+1} \geq 2.$$

     La propriété est alors vraie au rang $p+1$.

   Elle est donc vraie pour tout n.

3. On montre que (u_n) converge vers une limite ℓ qu'on déterminera. (u_n) est décroissante et minorée donc elle converge vers une limite ℓ qui est nécessairement une solution de l'équation $x = \frac{x}{2} + 1$. Or,

   $$x = \frac{x}{2} + 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

   (u_n) converge vers 2.

3 Suites récurrentes de type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

3 1 Un exemple

Exemple 45.5. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. On montre que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique. Pour tout n,
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n} = \frac{5u_{n+1} - 4u_n - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n} = \frac{4u_{n+1} - 4u_n}{u_{n+1} - u_n} = 4.$$
(v_n) est géométrique de raison $b = 4$ et de premier terme $v_0 = u_1 - u_0 = 1$.
2. On exprime v_n en fonction de n :
$$v_n = b^n \times v_0 = 4^n.$$
3. On a :
$$u_0 + (v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}) = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_0) = u_n.$$
4. On en déduit une expression de u_n en fonction de n. (v_n) est géométrique, donc
$$v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1 - 4^n}{1 - 4} = \frac{1}{3} \times (4^n - 1).$$
D'où
$$u_n = u_0 + \frac{1}{3} \times (4^n - 1) = 1 + \frac{1}{3} \times 4^n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 4^n + \frac{2}{3}.$$
5. Etudier la limite de la suite (u_n).
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{3} \times 4^n}_{\to+\infty} + \frac{2}{3} = +\infty \quad \text{(car } 4 > 1\text{)}.$$

3 2 Nombres de Fibonacci

On considère, quand $t = 0$, un couple A de jeunes lapins. Le mois suivant $(t = 1)$, les deux lapins sont adultes, le couple est appelé B. A $t = 2$, deux jeunes lapins naissent et on a deux couples B et A. Pour chaque mois suivant, chaque couple A devient B et chaque B devient BA. Les couples sont, successivement, A, B, BA, BAB, $BABBA$, $BABBABAB$ etc. Les nombres de couples de lapins sont
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots.$$

Définition 45.6 (Nombres de Fibonacci)**.** *Ces nombres sont appelés les* nombres de Fibonacci

On construit ainsi la suite F telle que $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ et pour tout entier naturel n, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Définition 45.7 (Suite de Fibonacci)**.** *La suite (F_n) définie par :*
$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$
est appelé suite de Fibonacci. *Les termes de la suite sont les* nombres de Fibonacci.

Le polynôme caractéristique de la suite de Fibonacci est
$$\chi(x) = x^2 - x - 1$$
admettant pour racines
$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \overline{\varphi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi $F_n = \lambda\varphi^n + \mu\overline{\varphi}^n$ où λ et μ sont obtenus par la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} F_0 = \lambda + \mu \\ F_1 = \lambda\varphi + \mu\overline{\varphi} \end{cases}$$

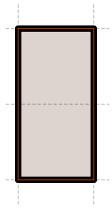
On obtient alors la formule de Binet :

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

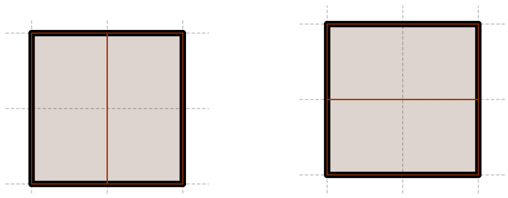
Exemples 45.8 (Applications des suites de Fibonacci)**.** 1. On dispose d'un plateau de dimension $2 \times n$, $n \in \mathbb{N}^*$. De combien de façon différentes peut-on disposer des dominos (à couleur unique sans motif) de sorte à ce qu'ils recouvrent totalement le plateau.

On regarde ce qui se passe pour les premières valeurs de n :

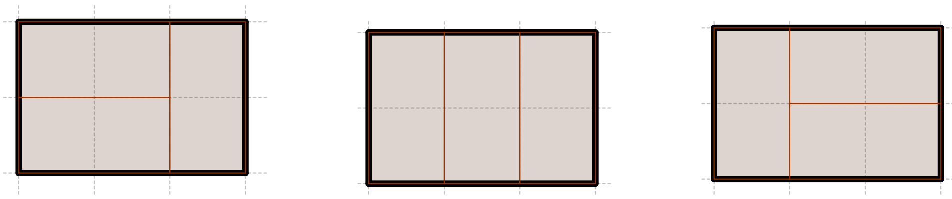
$n = 1$ **:** il y a une seule façon de disposer le domino.



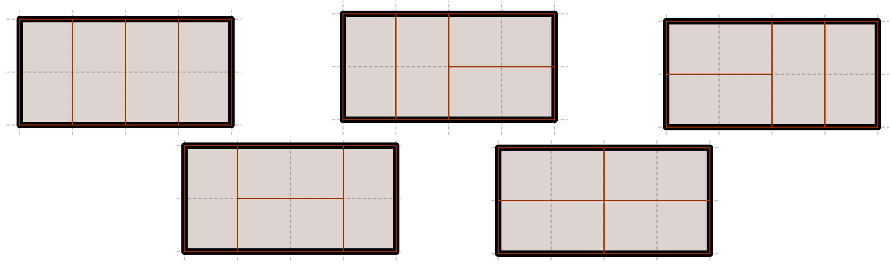
$n = 2$ **:** Il y a 2 façons de disposer les dominos.



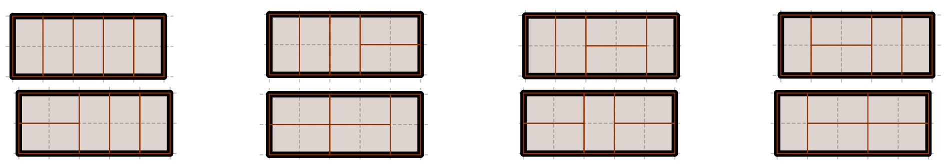
$n = 3$ **:** Il y a 3 façons de disposer les dominos.



$n = 4$ **:** Il y a 5 façons de disposer les dominos.



$n = 5$ **:** Il y a 8 façons de disposer les dominos.



$n = 6$ **:** Il y a 13 façons de disposer les dominos.

Ainsi, nous pouvons constater (et on peut vérifier cela en regardant les autres valeurs de n) que nous obtenons ici les premiers termes de la suite de Fibonacci. Il y a donc F_n façons de disposer les dominos sur un plateau de dimensions $2 \times n$.

2. Un homme se déplace dans un couloir infini où il n'avance que face à lui ou vers sa droite sans jamais se tourner vers la gauche ni revenir en arrière. Combien de chemins possibles peut-il emprunter pour aller à la case n suivant l'illustration ci-dessous ?

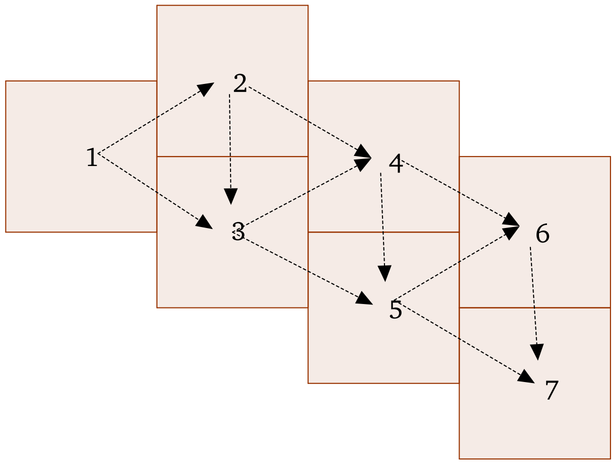


FIGURE 45.4 – Parcours dans un couloir infini

– De la case 1 à la case 2, il y a 1 possibilité ;
– De la case 1 à la case 3, il y a 2 possibilités ($1 \to 3$ ou $1 \to 2 \to 3$) ;
– De la case 1 à la case 4, il y a 3 possibilités ;
– De la case 1 à la case 5, il y a 5 possibilités ;
– De la case 1 à la case 6, il y a 8 possibilités ;
– De la case 1 à la case 7, il y a 13 possibilités ;

On voit encore une fois apparaître les premiers termes de la suite de Fibonacci. Il y a donc F_n chemins possibles pour aller de la case 1 à la case n.

Compléments

1 Utilisation de Geogebra pour tracer une suite de récurrence

Soit à tracer la représentation graphique de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : I \to \mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, de premier terme u_0. On trace tout d'abord la représentation graphique de f :

```
f(x) = ...
```

et la première bissectrice du repère (qu'on appellera $\mathcal{D}$) :

```
y = x
```

On définit le paramètre a à l'aide d'un curseur et le paramètre n (nombre de termes de la suite qui seront calculés) avec un autre curseur. On calcule alors les n premiers termes de la suite :

```
Termes=IterationListe[f,a,n]
```

On définit les points (u_i, u_i) de la droite $\mathcal{D}$

```
Pointsx = Sequence[(Element[Termes,i],Element[Termes,i]),i,1,n]
```

puis les points (u_i, u_{i+1})

```
Pointsf = Sequence[(Element[Termes,i],Element[Termes,i+1]),i,1,n]
```

puis les segments verticaux :

```
SegmentsV = Sequence[Segment[Element[Pointsx,i],Element[Pointsf,i
   ]],i,1,n]
```

Et enfin les segments horizontaux :

```
SegmentsH = Sequence[Segment[Element[Pointsf,i],Element[Pointsx,i
   +1]],i,1,n]
```

2 Etude d'une population

Les suites récurrentes ont de très nombreuses applications. Par exemple, intéressons nous à l'évolution à l'effectif d'une population.

Soit p_n l'effectif de la population à l'instant n. On suppose qu'il n'y a aucun flux migratoire. L'évolution de l'effectif de la population résulte donc uniquement des naissances et des décès. On note α le taux de natalité ($\alpha \geq 0$) et ω le taux de mortalité ($0 < \omega < 1$). On a :

$$p_{n+1} = p_n + \alpha p_n - \omega p_n = p_n(1 + \alpha - \omega). \tag{45.1}$$

Cependant, il parait raisonnable de penser que les taux de natalité et de mortalité sont dépendants de l'effectif de la population. En effet, si l'effectif de la population est très important, la compétition entre les individus est accrue. On peut alors imaginer que le taux de natalité diminue et que le taux de mortalité augmente et inversement...

Un modèle un peu plus fin pourrait donc considérer que ω et α sont des fonctions affines dépendantes de p_0 :

$$\begin{aligned} \alpha(p_n) &= \alpha - \alpha' p_n \quad \text{où } \alpha' > 0 \\ \omega(p_n) &= \omega + \omega' p_n \quad \text{où } \omega' > 0. \end{aligned}$$

(46.1) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n(1 + \alpha - \alpha' p_n - \omega - \omega' p_n) \\ &= p_n(1 + \alpha - \omega) \cdot \left(1 - \frac{\alpha' + \omega'}{1 + \alpha + \omega} p_n\right). \end{aligned}$$

On pose $u_n := \frac{\alpha'+\omega'}{1+\alpha+\omega} p_n$. Comme $p_{n+1} > 0$, $p_n > 0$ et $(1 + \alpha - \omega) \geq 0$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

Remarque 45.9. Que caractérise u_n ?

- Si u_n est nul (ou tout au moins très petit) alors on en revient au premier modèle, c'est-à-dire les taux de natalité et de mortalité sont très peu sensibles à l'effectif de la population.
- Si u_n s'approche de 1, l'évolution de l'effectif en ait fortement impacté.

Conclusion : u_n caractérise la sensibilité des taux de mortalité et de natalité à l'effectif de la population.

On remarque que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{\alpha' + \omega'}{a} \cdot p_{n+1} \quad \text{où } a = 1 - \omega + \alpha \\ &= \frac{\alpha' + \omega'}{a} \cdot a \cdot p_n \cdot (1 - u_n) \\ &= u_n \cdot a \cdot (1 - u_n). \end{aligned}$$

u_n est donc une suite récurrente avec $g(x) = ax(1-x)$.

Remarque 45.10 (Discussion des valeurs de a)**.** $a > 0$ car $1 - \omega > 0$ et $\alpha > 0$. On peut considérer que a n'est pas très grand, sinon cela signifierait qu'il y a un grand écart entre α et ω. Prenons $0 < a < 4$.

On peut alors montrer que $g([0\,,1]) \subset [0\,,1]$. Les points fixes de g sont $\overline{x_1} = 0$ et $\overline{x_2} = \frac{a-1}{a}$.

Si $0 \leq a < 1$ seul $\overline{x_1}$ est dans $[0\,,1]$ et il est attractif car $g'(x) = a - 2ax$ et $g'(\overline{x_1}) = a$.

Si $1 \leq a < 2$
- $g'(x) = a - 2ax$, $g'(\overline{x_1}) = 0 > 1$ donc $\overline{x_1}$ est répulsif.
- $g'(\overline{x_2}) = a - 2a\frac{a-1}{a} = 1 - a$. Or

$$1 \leq a < 2 \Leftrightarrow -1 \geq -a > -2 \Leftrightarrow 0 \geq 1 - a > -1$$

donc $\overline{x_2}$ est attractif.

LEÇON

46 Problèmes conduisant à l'étude de suites

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S - BTS

Prérequis Suites, probabilités

Références [117, 118, 119]

Contenu de la leçon

1 Suites de carrés

Exemple 46.1. On considère un carré $ABCD$ de côté $c = 4$. On appelle A_1, B_1, C_1 et D_1 les points situés sur $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ à distance 1 de A, B, C, D.

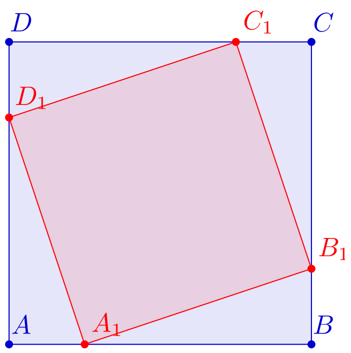


FIGURE 46.1 – Figure de l'exemple

1. On justifie que $A_1B_1C_1D_1$ est un carré. Les triangles AA_1D_1, BB_1A_1, CC_1B_1 et DD_1C_1 sont des triangles isométriques puisqu'ils ont chacun un angle droit compris entre deux côtés de longueurs respectives 1 et 3. On en déduit que $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1$. $A_1B_1C_1D_1$ est donc un quadrilatère ayant quatre côtés de même longueur, c'est un losange. De plus, on a :
$$\widehat{AA_1D_1} + \widehat{D_1A_1B_1} + \widehat{B_1A_1B} = \pi.$$
Donc
$$\widehat{D_1A_1B_1} = \pi - \widehat{AA_1D_1} + \widehat{B_1A_1B}.$$
Comme les triangles AA_1D_1, BB_1A_1, CC_1B_1 et DD_1C_1 sont isométriques et rectangles, on a :
$$\widehat{AA_1D_1} + \widehat{B_1A_1B} = \widehat{AA_1D_1} + \widehat{A_1D_1A} = \frac{\pi}{2}.$$
On en déduit que
$$\widehat{D_1A_1B_1} = \frac{\pi}{2}.$$
Donc $A_1B_1C_1D_1$ est un carré.
2. On appelle A_2, B_2, C_2 et D_2 les points situés respectivement sur $[A_1B_1]$, $[B_1C_1]$, $[C_1D_1]$, $[D_1A_1]$ à la distance 1 de A_1, B_1, C_1, D_1. On montre que $A_2B_2C_2D_2$ est un carré.
Les triangles $A_1A_2D_2$, $B_1B_2A_2$, $C_1C_2B_2$ et $D_1D_2C_2$ sont des triangles isométriques puisqu'ils ont chacun un angle droit compris entre deux côtés de longueurs respectives égales.

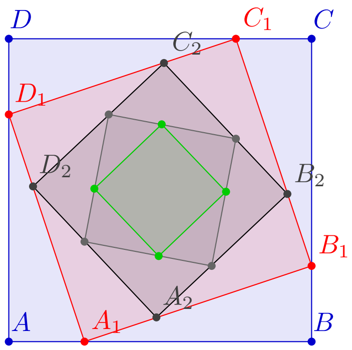


FIGURE 46.2 – Figure de la question 2

On en déduit que $A_2B_2 = B_2C_2 = C_2D_2 = D_2A_2$. $A_2B_2C_2D_2$ est donc un quadrilatère ayant quatre côtés de même longueur, c'est un losange. De plus, on a :

$$\widehat{A_1A_2D_2} + \widehat{D_2A_2B_2} + \widehat{B_2A_2B_1} = \pi.$$

Donc

$$\widehat{D_2A_2B_2} = \pi - \widehat{A_1a_2D_2} + \widehat{B_2A_2B_1}.$$

Comme les triangles $A_1A_2D_2$, $B_1B_2A_2$, $C_1C_2B_2$ et $D_1D_2C_2$ sont isométriques et rectangles, on a :

$$\widehat{A_1A_2D_2} + \widehat{B_2A_2B_1} = \widehat{A_1A_2D_2} + \widehat{A_2D_2A_1} = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que $\widehat{D_2A_2B_2} = \frac{\pi}{2}$. Donc $A_2B_2C_2D_2$ est un carré.

3. On peut montrer que même, que si on réitère le procédé, on obtient que $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$, $A_4B_4C_4D_4$ sont des carrés.
4. On note $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ et $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ les aires et les longueurs des carrés $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$, $A_4B_4C_4D_4$ et $A_5B_5C_5D_5$. On montre que les suites $(a_k)_{0\leq k\leq 5}$ et $(c_k)_{0\leq k\leq 5}$ sont décroissantes. Le carré $A_5B_5C_5D_5$ est contenu dans le carré $A_4B_4C_4D_4$, lui même contenu dans le carré $A_3B_3C_3D_3$, lui-même contenu dans le carré $A_2B_2C_2D_2$, lui-même contenu dans le carré $A_1B_1C_1D_1$, lui-même contenu dans le carré $ABCD$. On a donc

$$a_5 \leq a_4 \leq a_3 \leq a_2 \leq a_1 \leq a_0.$$

On sait de plus que le côté d'un carré est égal à la racine carré de son aire. La fonction racine carrée étant croissante sur $[0\,, +\infty[$, on en déduit que :

$$c_5 \leq c_4 \leq c_3 \leq c_2 \leq c_1 \leq c_0.$$

Donc les suites de nombres $(a_k)_{0\leq k\leq 5}$ et $(c_k)_{0\leq k\leq 5}$ sont décroissantes.
5. On calcule les valeurs de $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ et c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5. On sait que $c_0 = 4$ donc $a_0 = 16$. L'utilisation du théorème de Pythagore dans le triangle A_1Bb_1 permet d'obtenir :

$$(A_1B_1)^2 = A_1B^2 + BB_1^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \text{ donc } a_1 = 10 \quad \text{et} \quad c_1 = \sqrt{10} \simeq 3,162.$$

L'utilisation du théorème de Pythagore dans le triangle $A_2B_1B_2$ permet d'obtenir :

$$(A_2B_2)^2 = (A_2B_1)^2 + (B_1B_2)^2 = (\sqrt{10} - 1)^2 + 1^2 = 12 - 2\sqrt{10}$$

donc

$$a_2 = 12 - 2\sqrt{10} \simeq 5,675 \quad \text{et} \quad c_2 = \sqrt{12 - 2\sqrt{10}} \simeq 2,382.$$

En réitérant les calculs, on obtient :

$$a_0 = 16,\ a_1 = 10,\ a_2 = 10 - 2\sqrt{10} \approx 5,675,\ a_3 \approx 2,911,\ a_4 = 1,499,\ a_5 = 1,050$$

et

$$c_0 = 4,\ c_1 = \sqrt{10} \approx 3,162,\ c_2 = \sqrt{12 - 2\sqrt{10}} \approx 2,382,\ c_3 \approx 1,706,\ c_4 \approx 1,224,\ c_5 \approx 1,025.$$

L'aire A du carré peut s'obtenir à partir de l'aire a du carré précédent par le calcul :

$$A = (\sqrt{a} - 1)^2 + 1.$$

On peut ainsi obtenir avec une calculatrice les aires successives des carrés. Avec la calculatrice TI82, on pourra faire :

```
16 -> A
(V^A-1)^2 + 1 -> A
```

où `->` peut s'obtenir en tapant la touche STO¿ et `V^` est la racine carrée. Il suffit ensuite de appuyer sur la touche ENTER pour obtenir les valeurs approchées successives de l'aire.

```
> 16 -> A
16
> (V^A-1)^2 + 1 -> A
10
5.6754468
2.910806318
1.498589257
```

Le côté C d'un carré peut s'obtenir à partir de l'aire c du carré précédent par le calcul

$$C = \sqrt{(c-1)^2 + 1^2}.$$

On peut ainsi obtenir avec la TI82 :

```
4 -> C
V^((C-1)^2 + 1) -> C
```

Il suffit ensuite de appuyer sur la touche ENTER pour obtenir les valeurs approchées successives du côté :

```
> 4 -> C
4
> V^((C-1)^2 + 1) -> C
3.16227766
2.382319181
1.706108531
1.224168802
```

6. On donne un algorithme sur Algobox qui permet d'obtenir les valeurs de a_n et c_n pour un n quelconque.

```
> Variables
     etape EST_DU_TYPE NOMBRE
     C EST_DU_TYPE NOMBRE
```

```
> DEBUT_ALGORITHME
    LIRE etape
    C PREND_LA_VALEUR 4
    > TANT_QUE (etape>0) FAIRE
       DEBUT_TANT_QUE
       etape PREND_LA_VALEUR etape-1
       C PREND_LA_VALEUR sqrt((C-1)*(C-1)+1)
       FIN_TANT_QUE
    AFFICHER C
FIN_ALGORITHME
```

On donne un algorithme sur TI82 qui permet d'obtenir les valeurs de a_n et c_n pour un n quelconque.

```
Input N
4 -> C
While N>0
V^((C-1)^2+1)-> C
N-1 -> N
End
Disp "COTE ", C
```

Si on réitère le procédé, il semble que l'on s'apporche de plus en plus d'un carré « fixe » de côté 1.

2 Intérêts composés

Exemple 46.2. Une personne a placé sur un compte le 1er janvier 2005 un capital de 10000 €. Ce compte produit des intérêts de 4% par an. Chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital et deviennent à leur tour générateurs d'intérêts. Pour n entier naturel, on appelle C_n le capital du 1er janvier de l'année $2005+n$. On a ainsi $C_0 = 10000$.

1. On détermine C_1 et C_2. Chaque année le capital génère des intérêts de 4%. Rajouter 4% revient à multiplier par :

$$1 + 4\% = 1 + \frac{4}{100} = 1,04.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 \times 1,04 = 10000 \times 1,04 = 10400 \\ C_2 &= C_1 \times 1,04 = 10400 \times 1,04 = 10816. \end{aligned}$$

2. On exprime C_{n+1} en fonction de C_n et on en déduit une valeur approchée de C_{10}. C_{n+1} est le capital au 1er janvier de l'année $2005+n+1$. Il est obtenu en rajoutant 4% à C_n, capital au 1er janvier de l'année $2005+n$. On a donc :

$$C_{n+1} = C_n \times 1,04.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
C_3 &= C_2 \times 1,04 = 10816 \times 1,04 = 11248,64 \\
C_4 &= C_3 \times 1,04 = 11248,64 \times 1,04 \approx 11698,59 \\
C_5 &= C_4 \times 1,04 \approx 11698,59 \times 1,04 \approx 12166,53 \\
C_6 &= C_5 \times 1,04 \approx 12166,53 \times 1,04 \approx 12653,19 \\
C_7 &= C_6 \times 1,04 \approx 12653,19 \times 1,04 \approx 13159,32 \\
C_8 &= C_7 \times 1,04 \approx 13159,32 \times 1,04 \approx 13685,69 \\
C_9 &= C_8 \times 1,04 \approx 13685,69 \times 1,04 \approx 14233,12 \\
C_{10} &= C_9 \times 1,04 \approx 14233,12 \times 1,04 \approx 14802,44.
\end{aligned}$$

3. On suppose maintenant qu'au 1er janvier de chaque année, à partir du 1er janvier 2006, la personne rajoute 1000 € sur son compte. On recalcule C_1 et C_2, puis on exprime C_{n+1} en fonction de C_n. Ainsi, on détermine une valeur approchée de C_{10}. Chaque année, le capital génère des intérêts de 4% et de plus il est augmenté de 1000 €. On a donc

$$\begin{aligned}
C_1 &= C_0 \times 1,04 + 1000 = 10000 \times 1,04 + 1000 = 11400 \\
C_2 &= C_1 \times 1,04 + 1000 = 11400 \times 1,04 + 1000 = 12856
\end{aligned}$$

On peut écrire $C_{n+1} = C_n \times 1,04 + 1000$. On obtient alors en utilisant une calculatrice $C_{10} \approx 26808,55$. Avec une TI82, on peut faire :

```
10000 -> C
C * 1.04 + 1000 -> C
```

On obtient alors

```
> 10000-> C
10000
> C*1.04+1000->C
11400
12856
14370.24
15945.0496
17582.85158
19286.16565
21057.61227
22899.91676
24815.91343
26808.54997
```

Avec un tableur (OpenOffice.org Calc), on peut faire :

```
A1 = 10000
B1 = A1*1,04+1000
# Glisser la formule vers la droite autant de fois que
    necessaire
```

On obtient :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	10000	11400	12856	14370,24	15945,0496	17582,85158	19286,16565	21057,61227	22899,91676	24815,91343

4. On donne un algorithme sur Algobox qui détermine à partir de quelle année le capital aura été multiplié par 5.

```
> VARIABLES
     C EST_DU_TYPE NOMBRE
     annee EST_DU_TYPE NOMBRE
> DEBUT_ALGORITHME
     annee PREND_LA_VALEUR 2005
     C PREND_LA_VALEUR 10000
     > TANT_QUE (C < 50000) FAIRE
        DEBUT_TANT_QUE
        annee PREND_LA_VALEUR annee+1
        C PREND_LA_VALEUR C*1.04+1000
        FIN_TANT_QUE
     AFFICHER annee
   FIN_ALGORITHME
```

On donne un algorithme sur TI82 qui détermine à partir de quelle année le capital aura été multiplié par 5.

```
2005 -> N
10000 -> C
While C < 50000
C*1.04+1000 -> C
N + 1 -> N
End
Disp "ANNEE ",N
```

Ainsi, en 2025, on multiplie par 5 le capital initial déposé en 2005.

3 Un problème de tribu Lation

Exemple 46.3. Dans une tribu un peu spéciale, la tribu « Lation », on compte de façon très étrange :

$$1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, \dots$$

Tous les multiples de 3 ont disparu tout en gardant le symbole « 3 » dans les autres nombres ! Quel nombre obtiendra-t-on si l'on compte 2011 objets ?

On se fixe k un entier supérieur à 2 et pose N_k le k^e nombre obtenu. Soit p un entier, que vaut N_{3p} ?

- $N_3 = 4 = 3 + 1 = 3 + N_1$
- $N_6 = 8 = 6 + 2 = 6 + N_2$
- $N_9 = 13 = 9 + 4 = 9 + N_3$
- $N_{12} = 17 = 12 + 5 = 12 + N_4$
- $N_{15} = 22 = 15 + 7 = 15 + N_5$

On constate alors que :

$$N_{3p} = 3p + N_p.$$

Ainsi :

$$N_{2010} = 2010 + N_{670}.$$

Comme 670 n'est pas divisible par 3, on va exprimer N_{669} :

$$N_{669} = 669 + N_{223}.$$

Comme 223 n'est pas divisible par 3, on va exprimer N_{222} :

$$N_{222} = 222 + N_{74}.$$

Comme 74 n'est pas divisible par 3, on va exprimer N_{72} :

$$N_{72} = 72 + N_{24} = 72 + 24 + N_8 = 72 + 24 + 11 = 107.$$

On a alors :

$$N_{74} = 110$$

car 108 est divisible par 3. D'où :

$$N_{222} = 222 + 110 = 332$$

ainsi

$$N_{223} = 334$$

car 333 est divisible par 3. De plus :

$$N_{669} = 669 + 334 = 1003$$

$$N_{670} = 1004$$

$$N_{2010} = 2010 + 1004 = 3014.$$

4 0,9999...= 1

À l'aide d'une suite géométrique, on va montrer que $0,9999\cdots = 1$. Nous avons :

$$0,9999\cdots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \cdots = \frac{9}{10}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{10^n}$$

$$0,9999\cdots = \frac{9}{10} \times \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \times \frac{10}{9}.$$

5 Mise en abîme

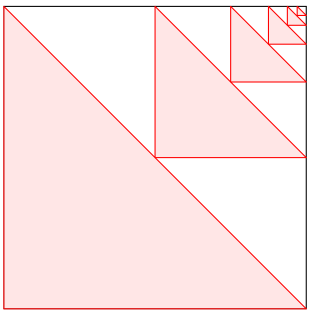


FIGURE 46.3 – Mise en abîme

Sachant qu'il y a une infinité de triangles colorés, calculez l'aire de la surface totale qu'ils occupent.

– Le premier triangle (le plus grand) a pour côté 1, son aire est donc égale à $\frac{1}{2}$.
– Le second triangle a pour côté $\frac{1}{2}$; son aire est donc égal à $\frac{1}{8}$.
– Le troisième triangle a pour côté $\frac{1}{4}$; son aire est donc égale à $\frac{1}{32}$.

La surface totale aura donc une aire égale à :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

6 Le problème des anniversaires

A partir de quelle valeur n la probabilité pour que, dans un groupe de n personnes, deux au moins d'entre elles aient la même date d'anniversaire est-elle supérieur à $0,5$?

Pour traiter ce problème, considérons l'événement contraire de celui qui nous intéresse : calculons la probabilité pour qu'aucune des personnes n'aient la même date d'anniversaire (on notera cette probabilité p_n). Quand $n = 2$,

$$p_2 = \frac{364}{365} = 1 - \frac{1}{365}.$$

Quand $n = 3$, il faut que la troisième personne n'ait pas la même date d'anniversaire que les deux autres, d'où :

$$p_3 = \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right).$$

Quand $n = 4$, on a :

$$p_4 = \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right)\left(1 - \frac{3}{365}\right).$$

Pour n quelconque, on a :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{365}\right).$$

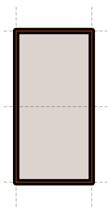
La probabilité qui nous intéresse est $1 - p_n$. On regroupe les valeurs dans la table 46.1. On voit ici qu'à partir de $n = 23$, la probabilité qui nous intéresse est supérieur à 0,5.

7 Nombres de Fibonacci

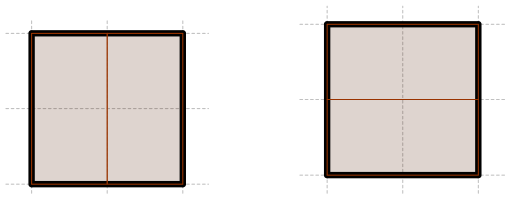
Exemples 46.4 (Applications des suites de Fibonacci). 1. On dispose d'un plateau de dimension $2 \times n$, $n \in \mathbb{N}^*$. De combien de façon différentes peut-on disposer des dominos (à couleur unique sans motif) de sorte à ce qu'ils recouvrent totalement le plateau.

On regarde ce qui se passe pour les premières valeurs de n :

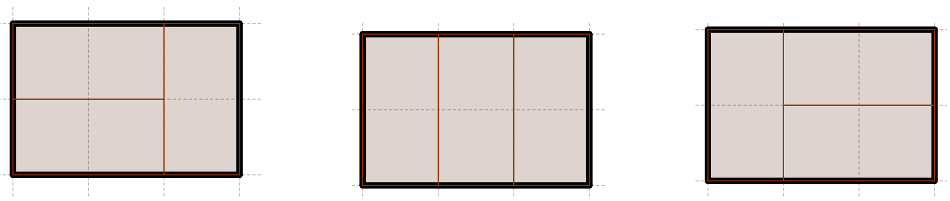
$n = 1$: il y a une seule façon de disposer le domino.



$n = 2$: Il y a 2 façons de disposer les dominos.



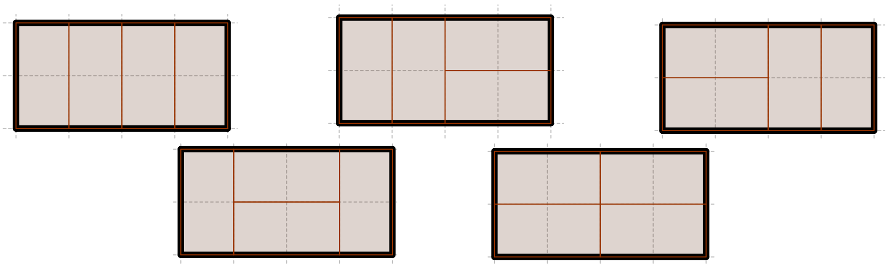
$n = 3$: Il y a 3 façons de disposer les dominos.



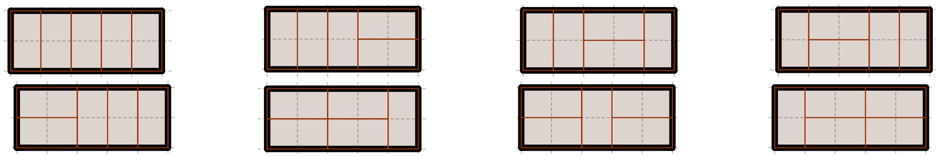
n	p_n	1-p_n
2	0,997260274	0,002739726
3	0,9917958341	0,0082041659
4	0,9836440875	0,0163559125
5	0,9728644263	0,0271355737
6	0,9595375164	0,0404624836
7	0,9437642969	0,0562357031
8	0,9256647076	0,0743352924
9	0,9053761661	0,0946238339
10	0,8830518223	0,1169481777
11	0,8588586217	0,1411413783
12	0,8329752112	0,1670247888
13	0,8055897248	0,1944102752
14	0,776897488	0,223102512
15	0,7470986802	0,2529013198
16	0,7163959947	0,2836040053
17	0,6849923347	0,3150076653
18	0,6530885821	0,3469114179
19	0,620881474	0,379118526
20	0,5885616164	0,4114383836
21	0,5563116648	0,4436883352
22	0,5243046923	0,4756953077
23	**0,4927027657**	**0,5072972343**
24	0,4616557421	0,5383442579
25	0,431300296	0,568699704
26	0,4017591799	0,5982408201
27	0,3731407177	0,6268592823
28	0,3455385277	0,6544614723
29	0,3190314625	0,6809685375
30	0,2936837573	0,7063162427

TABLE 46.1 – Problèmes des anniversaires

$n = 4$ **:** Il y a 5 façons de disposer les dominos.



$n = 5$ **:** Il y a 8 façons de disposer les dominos.



$n = 6$ **:** Il y a 13 façons de disposer les dominos.

Ainsi, nous pouvons constater (et on peut vérifier cela en regardant les autres valeurs de n) que nous obtenons ici les premiers termes de la suite de Fibonacci. Il y a donc F_n façons de disposer les dominos sur un plateau de dimensions $2 \times n$.

2. Un homme se déplace dans un couloir infini où il n'avance que face à lui ou vers sa droite sans jamais se tourner vers la gauche ni revenir en arrière. Combien de chemins possibles peut-il emprunter pour aller à la case n suivant l'illustration ci-dessous ?

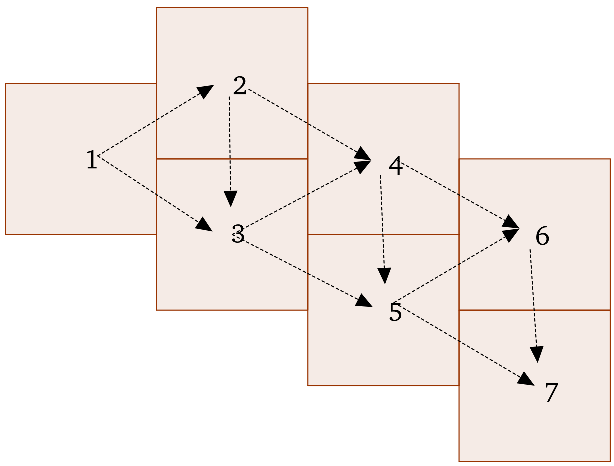


FIGURE 46.4 – Parcours dans un couloir infini

- De la case 1 à la case 2, il y a 1 possibilité ;
- De la case 1 à la case 3, il y a 2 possibilités ($1 \to 3$ ou $1 \to 2 \to 3$) ;
- De la case 1 à la case 4, il y a 3 possibilités ;
- De la case 1 à la case 5, il y a 5 possibilités ;
- De la case 1 à la case 6, il y a 8 possibilités ;
- De la case 1 à la case 7, il y a 13 possibilités ;

On voit encore une fois apparaître les premiers termes de la suite de Fibonacci. Il y a donc F_n chemins possibles pour aller de la case 1 à la case n.

8 Etude d'une population

Les suites récurrentes ont de très nombreuses applications. Par exemple, intéressons nous à l'évolution à l'effectif d'une population.

Soit p_n l'effectif de la population à l'instant n. On suppose qu'il n'y a aucun flux migratoire. L'évolution de l'effectif de la population résulte donc uniquement des naissances et des décès. On note α le taux de natalité ($\alpha \geq 0$) et ω le taux de mortalité ($0 < \omega < 1$). On a :

$$p_{n+1} = p_n + \alpha p_n - \omega p_n = p_n(1 + \alpha - \omega). \tag{46.1}$$

Cependant, il parait raisonnable de penser que les taux de natalité et de mortalité sont dépendant de l'effectif de la population. En effet, si l'effectif de la population est très important, la compétition entre les individus est accrue. On peut alors imaginer que le taux de natalité diminue et que le taux de mortalité augmente et inversement...

Un modèle un peu plus fin pourrait donc considérer que ω et α sont des fonctions affines dépendantes de p_0 :

$$\begin{aligned} \alpha(p_n) &= \alpha - \alpha' p_n \quad \text{où } \alpha' > 0 \\ \omega(p_n) &= \omega + \omega' p_n \quad \text{où } \omega' > 0. \end{aligned}$$

(46.1) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n(1 + \alpha - \alpha' p_n - \omega - \omega' p_n) \\ &= p_n(1 + \alpha - \omega) \cdot \left(1 - \frac{\alpha' + \omega'}{1 + \alpha + \omega} p_n\right). \end{aligned}$$

On pose $u_n := \frac{\alpha' + \omega'}{1+\alpha+\omega} p_n$. Comme $p_{n+1} > 0$, $p_n > 0$ et $(1 + \alpha - \omega) \geq 0$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

Remarque 46.5. Que caractérise u_n ?

- Si u_n est nul (ou tout au moins très petit) alors on en revient au premier modèle, c'est-à-dire les taux de natalité et de mortalité sont très peu sensibles à l'effectif de la population.
- Si u_n s'approche de 1, l'évolution de l'effectif en ait fortement impacté.

Conclusion : u_n caractérise la sensibilité des taux de mortalité et de natalité à l'effectif de la population.

On remarque que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{\alpha' + \omega'}{a} \cdot p_{n+1} \quad \text{où } a = 1 - \omega + \alpha \\ &= \frac{\alpha' + \omega'}{a} \cdot a \cdot p_n \cdot (1 - u_n) \\ &= u_n \cdot a \cdot (1 - u_n). \end{aligned}$$

u_n est donc une suite récurrente avec $g(x) = ax(1 - x)$.

Remarque 46.6 (Discussion des valeurs de a)**.** $a > 0$ car $1 - \omega > 0$ et $\alpha > 0$. On peut considérer que a n'est pas très grand, sinon cela signifierait qu'il y a un grand écart entre α et ω. Prenons $0 < a < 4$.

On peut alors montrer que $g([0\,,1]) \subset [0\,,1]$. Les points fixes de g sont $\overline{x_1} = 0$ et $\overline{x_2} = \frac{a-1}{a}$.

Si $0 \leq a < 1$ seul $\overline{x_1}$ est dans $[0\,,1]$ et il est attractif car $g'(x) = a - 2ax$ et $g'(\overline{x_1}) = a$.

Si $1 \leq a < 2$
- $g'(x) = a - 2ax$, $g'(\overline{x_1}) = 0 > 1$ donc $\overline{x_1}$ est répulsif.
- $g'(\overline{x_2}) = a - 2a\frac{a-1}{a} = 1 - a$. Or

$$1 \leq a < 2 \Leftrightarrow -1 \geq -a > -2 \Leftrightarrow 0 \geq 1 - a > -1$$

donc $\overline{x_2}$ est attractif.

LEÇON

47 Limite d'une fonction réelle de variable réelle

Niveau, prérequis, références

Niveau Première S
Prérequis Notion de fonction
Références [120, 121]

Contenu de la leçon

1 Introduction

Exemple 47.1. On considère la fonction f définie sur $]1\,, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x-4}{x-1}.$$

1. Si on calcule les valeurs de f quand x deviennent très grand, on obtient :

x	2	5	10	50	100	1000	10000
$f(x)$	2	2,75	2,88889	2,97959	2,98989	2,99899	2,99989

   On constate que lorsque les nombres x devient de plus en plus grands, les nombres $f(x)$ s'approchent aussi près que voulu du nombre 3. On dire que la limite f en $+\infty$ est égale à 3.

2. Si on calcule maintenant les valeurs de la fonction lorsque la variable x s'approche de plus en plus de la valeur interdite 1 :

x	0,5	0,8	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1	1,2	1,5	2
$f(x)$	5	8	13	103	1003	10003	$\times$	-9997	-997	-97	-7	-2	1	2

   On dira alors que f n'a pas de limite ou mieux :
   – la limite de f en 1 à gauche est égale à $+\infty$
   – la limite de f en 1 à droite est égale à $-\infty$.

2 Définitions

2 1 Limite d'une fonction en $+\infty$

On donne tout d'abord des définitions intuitives de la limite :

Définition 47.2. *Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus :*

grands [a]*, on dit que f a* pour limite $+\infty$ *en $+\infty$ et on note :*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

grands en valeurs absolue mais négatifs *on dit que f* a pour limite $-\infty$ *en $+\infty$ et on note*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

proches d'un réel ℓ [b]*, on dit que f* a pour limite ℓ *en $+\infty$ et on note*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

a. Par l'expression ≪ de plus en plus grand ≫, il faut entendre ≪ aussi grand que voulu ≫.
b. Par l'expression ≪ de plus en plus proche ≫, il faut entendre ≪ aussi proche que voulu ≫.

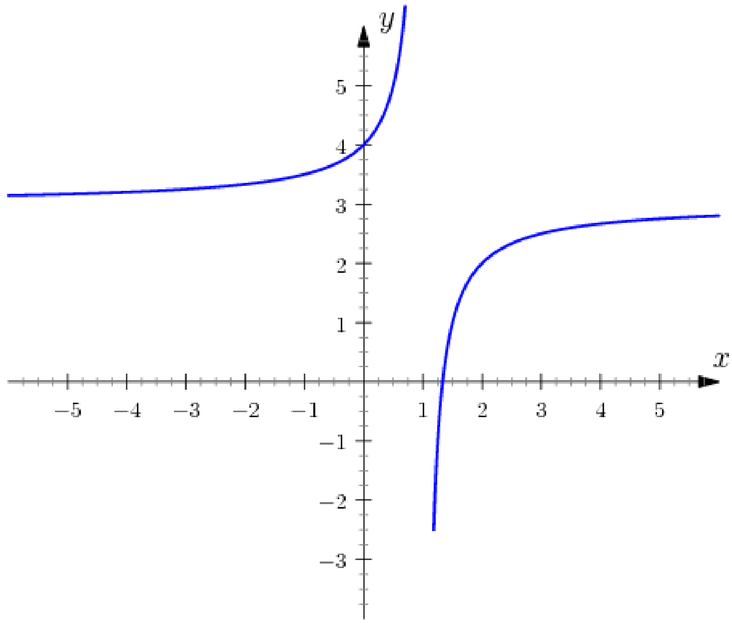


FIGURE 47.1 – Représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{3x-4}{x-1}$

On donne maintenant des définitions plus rigoureuses bien qu'elle ne soit pas utilisé en classe de Première S.

Définition 47.3. 1. *Si pour tout réel M positif, il existe un réel A tel que :*

$$x \geq A \Rightarrow f(x) \geq M,$$

alors on dit que f a pour limite $+\infty$ *en* $+\infty$ *et on note*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2. *Si pour tout réel M négatif, il existe un réel A tel que :*

$$x \geq A \Rightarrow f(x) \leq M$$

alors on dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ *et on note*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

3. *S'il existe un réel ℓ tel que pour tout intervalle $]\ell-\varepsilon\,,\ell+\varepsilon[$, $(\varepsilon > 0)$ et il existe un réel A tel que :*

$$x \geq A \Rightarrow f(x) \in I.$$

Alors on dit que f a pour limite *ℓ en $+\infty$ et on note*

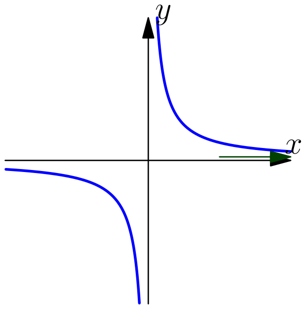
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

Exemples 47.4. 1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$,

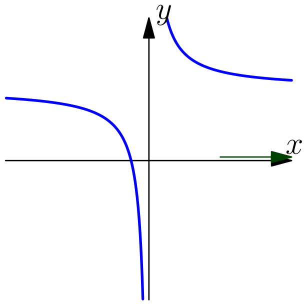
2. $\lim_{x\to+\infty}(2 + \frac{1}{x}) = 2$,

3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$,

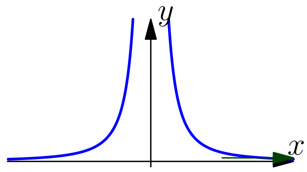
4. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$,
5. $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$,
6. $\lim_{x\to+\infty} (-3x) = -\infty$,
7. $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$,
8. $\lim_{x\to+\infty} (-\frac{x^2}{2}) = -minf$.



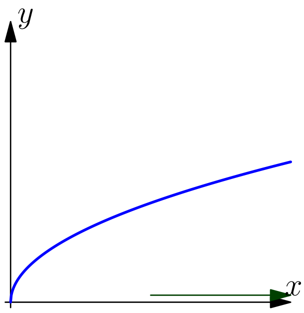
(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$



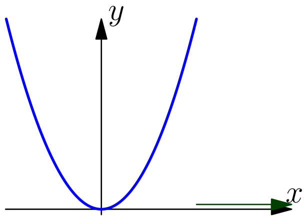
(b) $\lim_{x\to+\infty} (2 + \frac{1}{x}) = 2$



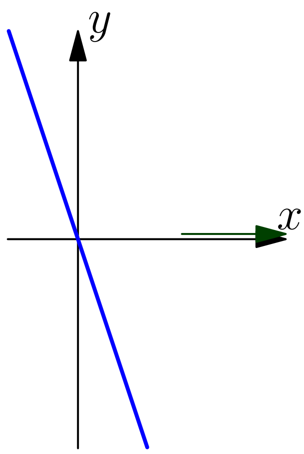
(c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$



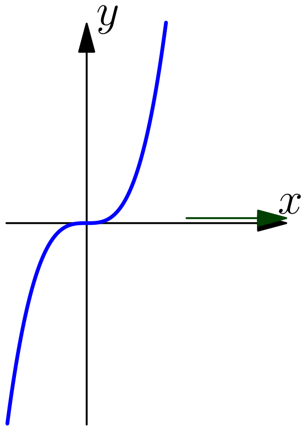
(d) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$



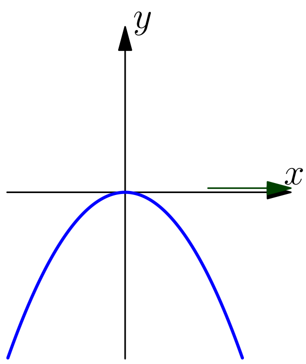
(e) $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$



(f) $\lim_{x\to+\infty} (-3x) = -\infty$



(g) $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$



(h) $\lim_{x\to+\infty} (-\frac{x^2}{2}) = -\infty$

FIGURE 47.2 – Limite d'une fonction en $+\infty$

Remarque 47.5. Il existe des fonctions qui n'ont pas de limite en $+\infty$, c'est le cas, par exemple, pour la fonction sinus et cosinus.

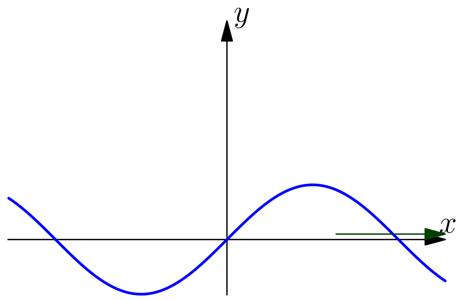


FIGURE 47.3 – La fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$

2 2 Limite d'une fonction en $-\infty$

Définition 47.6. *Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle du type $]-\infty, a[$. Lorsque $-x$ prend des valeurs de plus en plus grandes, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus*

grands, *on dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

proches d'un réel ℓ, *on dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$ et on note*

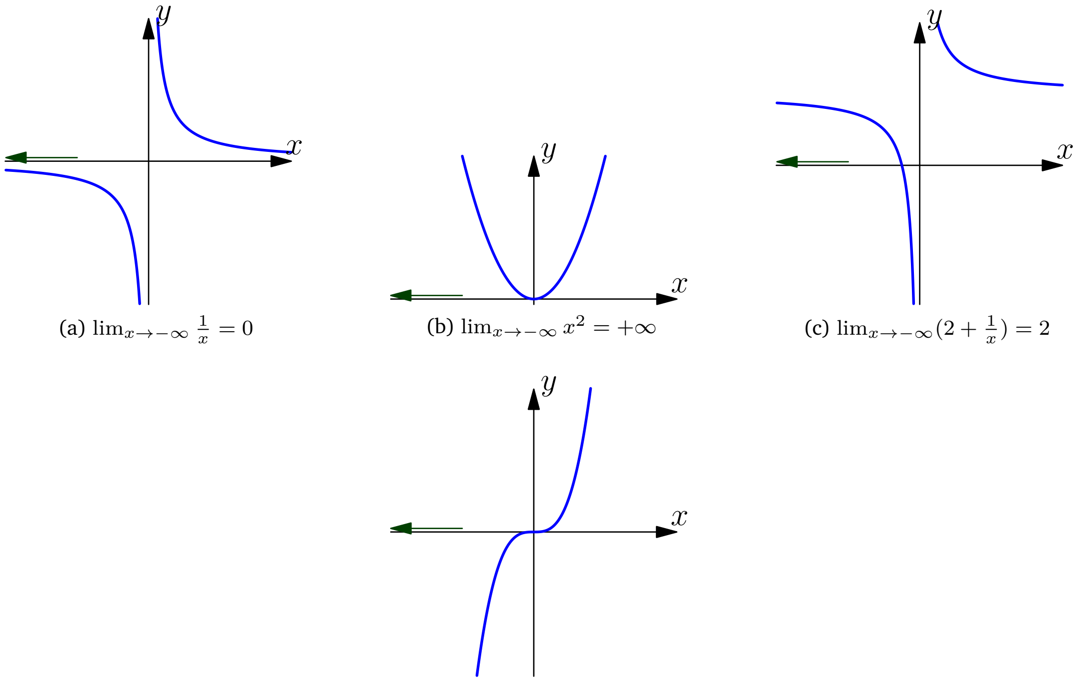
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

grands en valeurs absolue mais négatifs, *on dit que f a pour limite $-\infty$ et $-\infty$ et on note*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Exemples 47.7.

1. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$,
2. $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$,
3. $\lim_{x\to-\infty}(2 + \frac{1}{x}) = 2$,
4. $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.



(a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ (b) $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ (c) $\lim_{x\to-\infty}(2+\frac{1}{x}) = 2$

(d) $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

FIGURE 47.4 – Limite d'une fonction en $-\infty$

2 3 Limite d'une fonction en un réel a

Définition 47.8. *Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant a ou tel que a soit une borne de D. Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus*

grands, *on dit que f a pour limite $+\infty$ en a et on note*

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

proches d'un réel ℓ, *on dit que f a pour limite ℓ en a et on note*

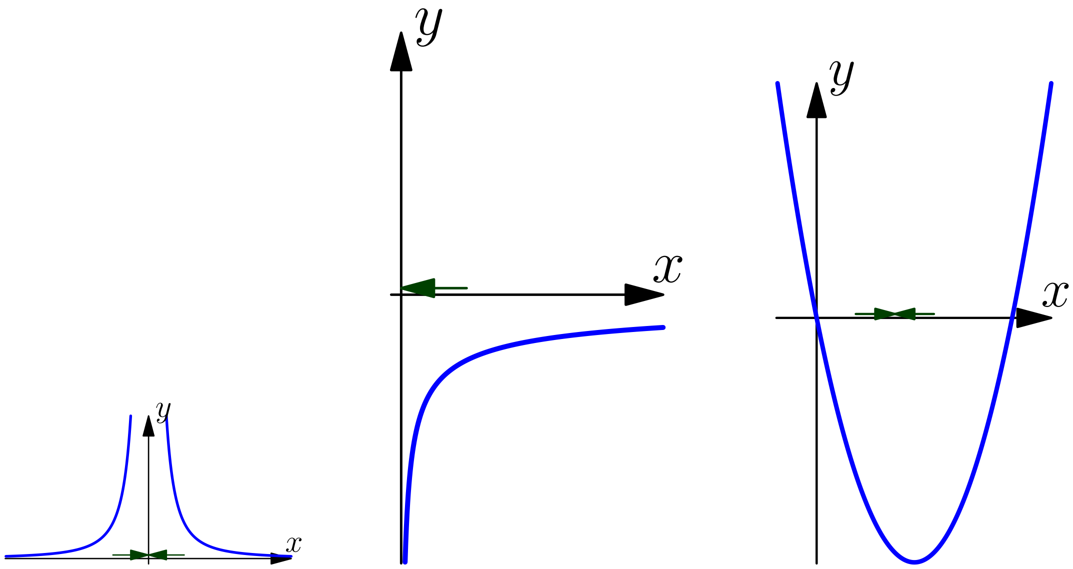
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$

grands en valeur absolue mais négatifs, *on dit que f a pour limite $-\infty$ en a et on note*

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Exemples 47.9.
1. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$,
2. $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty$,
3. $\lim_{x\to 2}(x^2 - 5x) = -6$.

Remarque 47.10. Il existe des fonctions qui n'ont pas de limite en a ; c'est le cas de la fonction inverse, qui n'a pas de limite en 0.



(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ (b) $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty$ (c) $\lim_{x\to -\infty}(x^2 - 5x) = -6$

FIGURE 47.5 – Limite d'une fonction en un point a

2 4 Limite d'une fonction à droite (ou à gauche)

La fonction inverse n'a pas de limite en 0, car si x s'approche de 0, les nombres $\frac{1}{x}$ ne rentrent pas dans le cadre de la définition 47.8. Cependant, on peut parler de limite « à droite » et de limite « à gauche » : on note alors 0^+ pour signifier que x s'approche de 0 par valeur supérieure et 0^- pour signifier que x s'approche de 0 par valeur inférieure.

Ainsi, on a :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

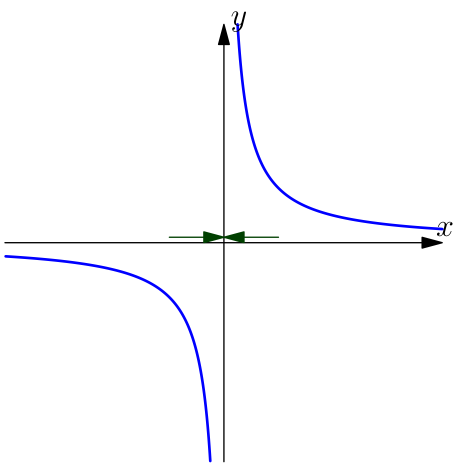


FIGURE 47.6 – Limite à gauche et à droite

3 Opérations sur les limites

Propriété 47.11. *Les tableaux 47.1, 47.2 et 47.3 permettent de donner, dans certains cas, la limite de la somme et du produit de deux fonctions f et g, ainsi que la limite de l'inverse d'une fonction f lorsqu'on connaît la limite de deux fonctions. Les limites peuvent être des limites en $+\infty$, en $-\infty$, en x_0, des limites à droite ou à gauche, mais bien entendu toutes les limites utilisées doivent être de même nature.*

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme ind.

TABLE 47.1 – Limite d'une somme

Si f a pour limite	ℓ	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$ (suivant les signes)	forme ind.

TABLE 47.2 – Limite d'un produit

Si f a pour limite	$\ell' \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{1}{f}$ a pour limite	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

TABLE 47.3 – Limite d'un inverse

Remarques 47.12.
1. Les résultats des deux tableaux précédents permettent de trouver les résultats pour un quotient.
2. Les formes indéterminées sont de deux types exprimés sous forme abrégée par : $+\infty - \infty$, $0 \times +\infty$.

Exemples 47.13.
1. $\lim_{x\to+\infty}(x^3+x+15) = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(x+15) = +\infty$.
2. $\lim_{x\to+\infty}(-2x(x+3)) = -\infty$ car $\lim_{x\to+\infty}(-2x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(x+3) = +\infty$.
3. $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x(x-2)} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{x-2} = -\infty$ car $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to0^+}(x-2) = -2$.

Propriété 47.14.
- *La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.*
- *La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes des plus haut degré du numérateur et du dénominateur.*

Exemples 47.15.
1. $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} -3x^3+2x^2+3x-5 = +\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} -3x^3 = +\infty$.
2. $\lim_{x\to+\infty} R(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{3x+2} = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3} = +\infty$.

4 Asymptotes

4.1 Asymptote horizontale

Définition 47.16 (Asymptote horizontale)**.** *Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$ (resp $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$) on dit que la droite d'équation $y = k$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).*

Exemple 47.17. $\lim_{x\to+\infty}(2+\frac{1}{x}) = 2$, donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$.

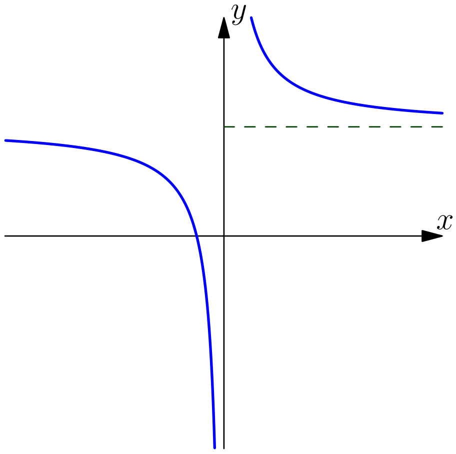


FIGURE 47.7 – La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 2 + \frac{1}{x}$ admet une tangente horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$

4.2 Asymptote verticale

Définition 47.18 (Asymptote verticale). *Si une fonction f admet une limite infinie à gauche ou à droite en un réel a, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.*

Exemple 47.19. $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$ (et $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$) donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-2}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

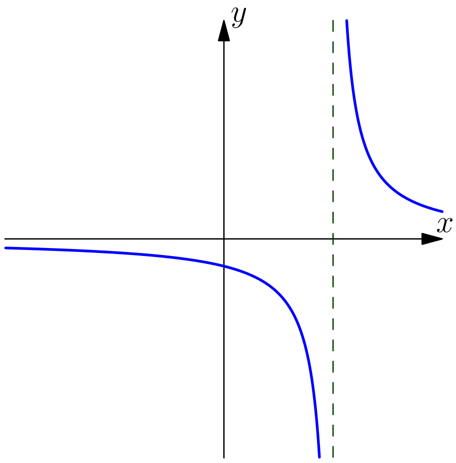


FIGURE 47.8 – La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+2}$ admet une tangente verticale d'équation $x = 2$

5 Théorème de comparaison (admis)

5.1 Théorème de majoration, minoration

Théorème 47.20. *Soit f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a, +\infty[$.*
- *Si, pour x assez grand, on a $f(x) \geq u(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.*
- *Si, pour x assez grand, on a $f(x) \leq v(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.*

Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en a.

Exemples 47.21. 1. Soit $f(x) = -x+\sin(x)$. On calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. On pose $v(x) = -x+1$. Comme, pour tout x, $\sin x \leq 1$, on a, pour tout x, $f(x) \leq v(x)$. Or,

$$\lim_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

2. Soit $g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$. Calculer $\lim_{x\to 0} g(x)$. On pose $u(x) = \frac{1}{x^2}$. Comme, pour tout x, on a $1 \leq \sqrt{1+x^2}$, on a, pour tout x, $g(x) \geq u(x)$. Or,

$$\lim_{x\to 0} u(x) = +\infty$$

, donc

$$\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty.$$

5 2 Théorème d'encadrement ou théorème des « gendarmes »

Théorème 47.22. *Soient f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a\,,+\infty[$. Si, pour x assez grand, on a $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si*

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} v(x) = \ell$$

alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en a.

Exemples 47.23. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{\sin x}{x}.$$

On veut calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. On pose :

$$u(x) = 1 - \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Comme, pour tout $x \neq 0$, on a :

$$-1 \leq \sin x \leq 1,$$

on en déduit que, pour tout $x \neq 0$:

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x).$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} v(x) = 1,$$

donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

LEÇON

48 Théorème des valeurs intermédiaires

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S
Prérequis Continuité d'une fonction, suites adjacentes
Références [122, 123]

Contenu de la leçon

1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 48.1 (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soient I un intervalle, a et b dans I tels que $a < b$. Soit f une application* continue *sur l'intervalle I. Soit λ, un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe (au moins) un réel c dans $[a\,,b]$ tel que $f(c) = \lambda$.*

Remarques 48.2.
1. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que l'équation $f(x) = \lambda$ ($f(a) < \lambda < f(b)$) admet au moins une solution dans $[a\,,b]$.
2. L'hypothèse de continuité est *indispensable* dans le théorème. Essayer d'applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction « partie entière » avec $a = 0$, $b = 1$ et $\lambda = \frac{1}{2}$...

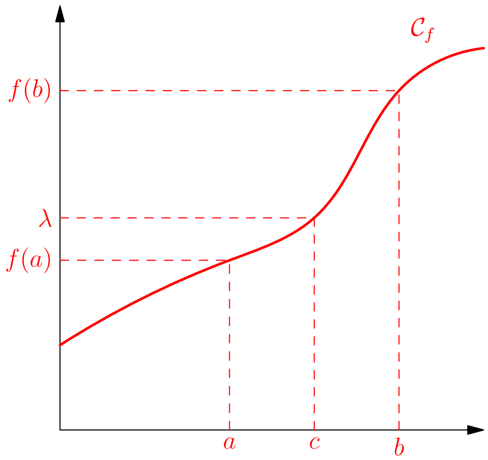


FIGURE 48.1 – Cas d'une fonction monotone

Exemple 48.3. Tout polynôme de polynôme P (à coefficients réels) de degré impair admet (au moins) une racine réelle. En effet, comme le degré de P est impair, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty.$$

En conséquence, il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x < a$, on ait $P(x) < 0$ et un réel $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > b$, on ait $P(x) > 0$. Comme P est une fonction continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence d'un réel $c \in \,]a\,,b[$ tel que $P(c) = 0$.

Remarque 48.4. Le théorème des valeurs intermédiaires n'admet pas de réciproque. Une fonction f peut très bien vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue. Considérer par exemple la fonction f définie sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ x_0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{où } x_0 \in [-1\,,1].$$

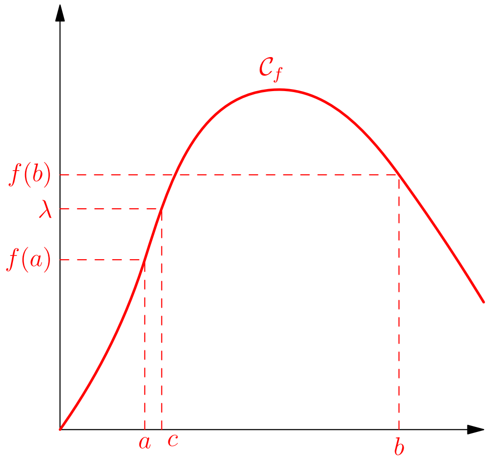


FIGURE 48.2 – Cas d'une fonction non monotone

On peut montrer (en exercice) que la fonction f est non continue en 0 et vérifie pourtant la propriété des valeurs intermédiaires. En effet, soient a et b deux réels avec $a < b$.

- Si a et b sont non nuls et de même signe, alors c'est immédiat (puisque dans ce cas f est continue sur $[a\,,b]$).
- Si $a = 0$ (et $b > 0$) alors on prend un réel λ compris entre $f(a) = x_0$ et $f(b)$. Comme $\lambda \in [-1\,,1]$, on peut toujours trouver un réel $X \geq \frac{1}{b}$ tel que $\sin X = \lambda$. En posant $x = \frac{1}{X}$, il vient bien $f(x) = \lambda$ avec $x \in [a\,,b]$.
- On raisonne de même si on a un intervalle $[a\,,0]$ ou $[a\,,b]$ lorsqu'il contient 0.

2 Applications

2 1 Le théorème du point fixe

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de démontrer un petit théorème de point fixe.

Théorème 48.5 (Théorème du point fixe). *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a\,,b]$. Si $f(I) \subset I$ alors f admet (au moins) un point fixe sur I. Autrement dit, il existe (au moins) un réel x de I tel que $f(x) = x$.*

2 2 Image d'un intervalle par une application continue

Corollaire 48.6 (Image d'un intervalle par une application continue). *Soit f une application* continue *sur un intervalle I. Alors*[a] *$f(I)$ est un intervalle.*

a. $f(I) = \{f(x),\ x \in I\}$.

Remarque 48.7. Si f n'est pas continue, il se peut très bien que $f(I)$ ne soit pas un intervalle : avec $f(x) = \mathrm{E}\,(x)$, $\mathrm{E}\,(x)$ désignant la partie entière de x, on a $f([0\,,1]) = [0\,,1]$.

Exemples 48.8.

1. Soit $f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   - Image de l'intervalle ouvert $I =]1\,,2[$: $f(I) =]1\,,4[$.
   - Image de l'intervalle ouvert $J =]-1\,,2[$: $f(J) = [0\,,4[$.
   - Image de l'intervalle fermé $H = [-2\,,2]$: $f(H) = [0\,,4]$.
   - Image de l'intervalle semi-ouvert $K = [0\,,+\infty[$, $f(K) = K$.
2. Soit $g(x) = \sin x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   - Image de l'intervalle ouvert $I =]0\,,\pi[$, $g(I) =]0\,,1]$.
   - Image de l'intervalle ouvert $J =]0\,,2\pi[$: $g(J) = [-1\,,1]$.

3. Soit $h(x) = \frac{x}{1+|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}$. On veut déterminer $h(\mathbb{R})$. Comme $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$h(-x) = \frac{-x}{1+|-x|} = -\frac{x}{1+|x|} = -h(x),$$

ce qui prouve que h est impaire. Montrons que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Soient x et y dans $\mathbb{R}_+$. Supposons $0 \leq x < y$. Alors :

$$h(y) - h(x) = \frac{y}{1+y} - \frac{x}{1+x} = \frac{y(1+x) - x(1+y)}{(1+x)(1+y)} = \frac{y-x}{(1+x)(1+y)}.$$

Or, $y - x > 0$ d'où :

$$h(x) - h(y) > 0 \Leftrightarrow h(x) < h(y).$$

Ceci prouve la stricte croissance de h dans $\mathbb{R}_+$. Comme h est impaire, on en déduit qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+x} = 1,$$

et, h étant impaire :

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -1.$$

Montrons que h est bornée par -1 et 1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Il est clair que $0 \leq x \leq 1 + x$. Comme $1 + x \geq 0$, on peut diviser par $1 + x$:

$$0 \leq \frac{x}{1+x} \leq 1$$

et comme $x = |x|$ (puisque $x \geq 0$) :

$$0 \leq h(x) \leq 1.$$

Comme h est impaire, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-1 \leq h(x) \leq 1.$$

Donc h est bornée par -1 et 1 (mais elle n'atteint pas ses bornes). On a donc $h(\mathbb{R}) \in \left]-1\,,1\right[$. Réciproquement soit $y \in \left]-1\,,1\right[$. Comme h est continue (quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas), le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence d'un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = y$. Donc $\left]-1\,,1\right[\subset h(\mathbb{R})$. D'où :

$$h(\mathbb{R}) = \left]-1\,,1\right[.$$

2 3 Image d'un segment par une application continue

Voir les compléments [1]

2 4 Théorème de bijection

Le théorème de bijection est une particularisation du théorème des valeurs intermédiaires. On ajoute une condition de plus pour la fonction f : la stricte monotonie.

Théorème 48.9 (Théorème de bijection)**.** *Soit f une application* continue *et* strictement montone *sur un intervalle I. Soient a et b dans I avec $a < b$. Soit λ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe un* unique *c dans $[a\,,b]$ tel que $f(c) = \lambda$.*

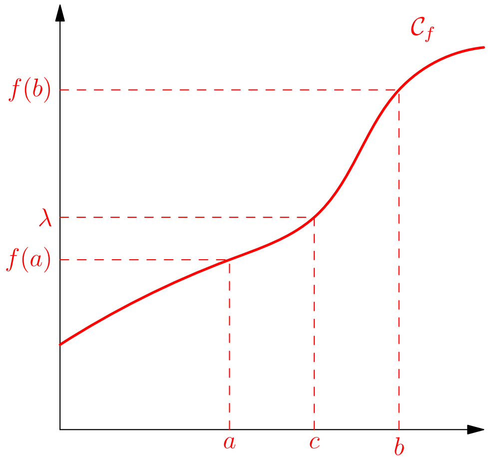


FIGURE 48.3 – Si l'on ajoute l'hypothèse de stricte monotonie de f, nous sommes alors assurés de l'unicité de cette solution.

Remarque 48.10. En résumé, lorsque f est une fonction définie sur un intervalle I, et lorsque $\lambda \in f(I)$, l'hypothèse de continuité de f nous fournit l'existence d'au moins une solution (dans I) de l'équation $f(x) = \lambda$. Si l'on ajoute l'hypothèse de stricte monotonie de f, nous sommes alors assurés de l'unicité de cette solution.

Dans le cas où f est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I, on a donc moyen de déterminer l'image d'un intervalle $[a\,,b]$:
- $f([a\,,b]) = [f(a)\,,f(b)]$ lorsque f est strictement croissante ;
- $f([a\,,b]) = [f(b)\,,f(a)]$ lorsque f est strictement décroissante.

Ce résultat s'étend aux intervalles non bornés en remplaçant les valeurs de f par ses limites.

Corollaire 48.11. *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a\,,b]$. Si $f(a)f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I.*

Exemple 48.12. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (1+x)^3 + x.$$

On démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1\,,0]$. La fonction g est clairement continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (comme somme et composée de fonctions qui le sont). De plus :

$$g(-1) = -1 < 0 \quad \text{et} \quad g(0) = 1 > 0.$$

Le réel $\lambda = 0$ est donc bien compris entre $g(-1)$ et $g(0)$. On en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1\,,0]$:

x	$-\infty$	-1	α	0	$+\infty$
$g'(x)$			$+$		
g		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

On donne maintenant un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} à l'aide d'un petit tableau de valeurs :

x	$-0,9$	$-0,8$	$-0,7$	$-0,6$	$-0,5$	$-0,4$	$-0,3$	$-0,2$	$-0,1$
$g(x)$	$-0,899$	$-0,792$	$-0,673$	$-0,536$	$-0,375$	$-0,184$	$0,043$	$0,312$	$0,629$

1. La démonstration est hors programme, on pourra admettre le théorème lors de la présentation du plan.

On en déduit :

$$-0,4 < \alpha < -0,3.$$

Compléments

1 Démonstrations du cours

Démonstration du théorème 48.1. Supposons $f(a) < f(b)$. Nous allons construire deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par l'algorithme suivant :

- Si le milieu m de l'intervalle $[a\,,b]$ est tel que $f(m) \geq m$ alors on pose $a_1 = a$ et $b_1 = m$.
- Sinon, on pose $a_1 = m$ et $b_1 = b$.

On recommence le découpage :

- Si le milieu m de l'intervalle $[a_1\,,b_1]$ est tel que $f(m) \geq \lambda$ alors on pose $a_2 = a_1$ et $b_2 = m$.
- Sinon, on pose $a_2 = m$ et $b_2 = b_1$.

On a ainsi :

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1 \leq b \quad \text{et} \quad f(a_2) \leq \lambda \leq f(b_2).$$

En réitérant le procédé, on construit ainsi une suite de segments emboîtés[2] :

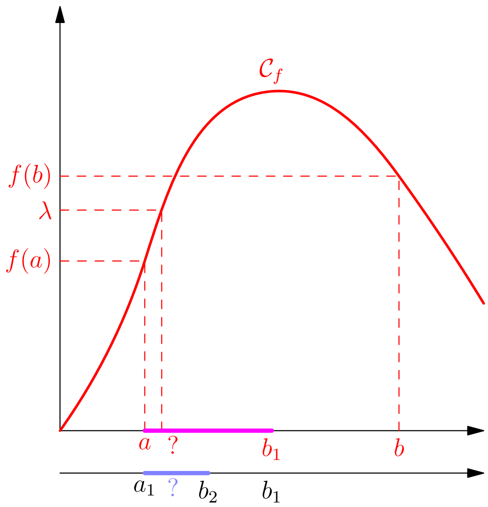


FIGURE 48.4 – Illustration de la suite construite

$$[a\,,b] \supset [a_1\,,b_1] \supset \cdots \supset [a_n\,,b_n] \supset \cdots.$$

De plus, par construction, la longueur de $[a_n\,,b_n]$ est $\frac{b-a}{2^n}$. Les segments $[a_n\,,b_n]$ ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc adjacentes.

Notons c leur limite commune (ce réel c est dans l'intervalle $[a\,,b]$). Montrons que $f(c) = \lambda$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(a_n) \leq \lambda \leq f(b_n)$$

et par passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\lambda \leq \lim_{n\to+\infty} f(b_n).$$

Or, f est continue en c donc :

$$f(c) \leq \lambda \leq f(c)$$

et ainsi $f(c) = \lambda$. On a bien montré qu'il existe un réel c dans $[a\,,b]$ tel que $f(c) = \lambda$. $\square$

2. Il s'agit d'une méthode de *dichotomie*.

Démonstration du théorème 48.5. Considérons la fonction g définie sur I par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

Montrons que $0 \in g(I)$. On a :

$$g(a) = f(a) - a \in g(I) \quad \text{et} \quad g(b) = f(b) - b \in g(I).$$

Or, comme $f(I) \subset I$, on a $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$, c'est-à-dire $g(a) \leq 0$ et $g(b) \geq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $x \in I$ tel que $f(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x$. □

Démonstration du corollaire **??**. Soient y_1 et y_2 dans $f(I)$ avec $y_1 \leq y_2$. Il s'agit de montrer tout élément λ de $[y_1\,, y_2]$ est élément de $f(I)$. Comme y_1 et y_2 sont dans $f(I)$, il existe a et b dans I tels que :

$$f(a) = y_1 \quad \text{et} \quad f(b) = y_2.$$

Comme I est un intervalle, on a : $[a\,, b] \subset I$. Comme f est continue sur $[a\,, b]$ (puisque $[a\,, b] \subset I$), on a, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $\lambda \in [y_1\,, y_2]$, il existe $c \in [a\,, b]$ tel que $f(c) = \lambda$. D'où : $\lambda \in f(I)$. □

Démonstration du théorème 48.9. **Existence** L'existence a déjà été prouvée : c'est le théorème des valeurs intermédiaires.

Unicité L'unicité découle de la stricte monotonie. On va la démontrer dans le cas où f est strictement croissante (le cas strictement décroissante) est analogue. Supposons qu'il existe deux réels c et c' dans $[a\,, b]$ tels que $f(c) = \lambda$ et $f(c') = \lambda$. Si $c < c'$ alors par stricte croissante de f :

$$f(c) < f(c').$$

Ce qui contredit la condition $f(c) = f(c') = \lambda$. Si $c > c'$ alors par stricte croissante de f :

$$f(c) > f(c').$$

Ce qui contredit la condition $f(c) = f(c') = \lambda$. Finalement $c = c'$, ce qui prouve l'unicité.

□

Démonstration du corollaire 48.11. Si $f(a)f(b) < 0$, cela signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Autrement dit, 0 est intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. On conclut avec le théorème de bijection. □

2 Image d'un segment par une application continue

Théorème 48.13 (Image d'un segment par une application continue)**.** *Soit f une application continue sur un segment I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $f(I)$ est un segment.*

Pour démontrer le théorème 48.13, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 48.14. *Soit f une fonction numérique définie sur un segment $[a\,, b]$. Si f est continue sur $[a\,, b]$, f est bornée sur $[a\,, b]$.*

Démonstration du lemme 48.14. On suppose que f est non bornée et on reprend la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires. On suppose que c est la limite commune des suites (a_n) et (b_n) construite dans cette démonstration. Or f est non bornée sur $[a_n\,, b_n]$, on peut donc construire une suite réelle $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout n, $c_n \in [a_n\,, b_n]$ et $|f(c_n)| \geq n$. La première relation nous montre que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c ce qui est contradictoire avec la seconde relation si on suppose f continue sur $[a\,, b]$. □

Démonstration du théorème 48.13. Soit $[a\,,b]$ un segment de I. D'après le lemme précédent, il existe deux réels m et M tel que $f([a\,,b])$ soit l'un des intervalles $]m\,,M[$, $[m\,,M[$, $]m\,,M]$, $[m\,,M]$, On justifiera de l'impossibilité des trois premières formes en introduisant les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{f(x)-m} \quad \text{ou} \quad x \mapsto \frac{1}{M-f(x)}$$

dont on observera qu'elles sont définies et continues sur $[a\,,b]$ sans y être bornées. □

LEÇON

49 Dérivabilité

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S

Prérequis Continuité en un point d'une fonction, limites en un point d'une fonction.

Références [124, 125]

Contenu de la leçon

1 Dérivabilité en un point

Théorème 49.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe un réel ℓ tel que l'accroissement moyen ait pour limite ℓ :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell.$$

(ii) Il existe un réel ℓ et une fonction φ tels que pour tout h tel que $x_0+h \in I$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \ell h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0.$$

Définition 49.2 (Accroissement moyen)**.** *La quantité* $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *s'appelle* l'accroissement moyen de f en x_0. *Graphiquement, elle représente le coefficient directeur de la sécante à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f entre les points d'abscisses x_0 et x_0+h.*

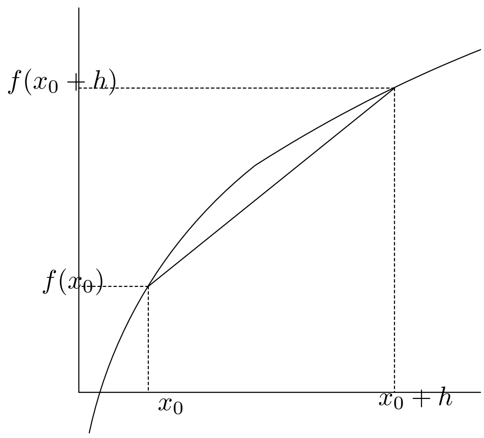


FIGURE 49.1 – Accroissement moyen de f

La condition (i) du théorème peut donc aussi se traduit par l'accroissement moyen de f en x_0 admet une limite *finie*.

Définition 49.3 (Dérivabilité)**.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I. Lorsque l'une des deux conditions du théorème ci-dessus est vérifiée, on dit que f est* dérivable en x_0. *Le nombre ℓ s'appelle alors* le nombre dérivé de f en x_0 *et on le note $f'(x_0)$.*

Exemples 49.4. 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. On étudie la dérivabilité en 0. Pour cela on évalue la limite de l'accroissement moyen de f en $x_0 = 0$:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

D'où :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

La limite n'est pas finie. La fonction « racine carrée » n'est donc pas dérivable en 0.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$. On étudie la dérivabilité de cette fonction en 0. Nous avons, pour tout $h \neq 0$:

$$\frac{|0+h|-|0|}{|h|} = \frac{|h|}{h}.$$

Or la quantité $\frac{|h|}{h}$ n'a pas de limite en 0. En effet :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} -\frac{h}{h} = -1.$$

L'accroissement moyen de la fonction f n'a pas de limite en 0. Par conséquent la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

2 Différentes interprétations du nombre dérivé

2.1 Interprétation graphique du nombre dérivé

Il représente le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_0.

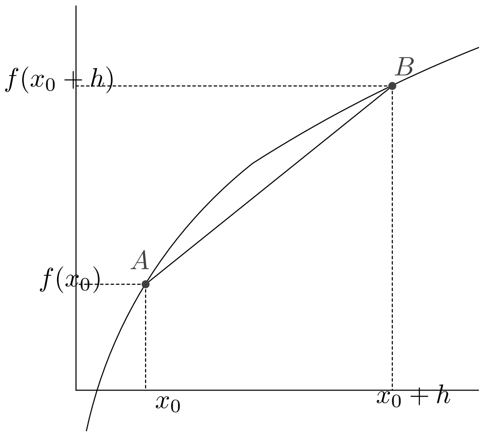


FIGURE 49.2 – Accroissement moyen de f

Le coefficient directeur de la sécante (AB) est :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Lorsque h tend vers 0 :

- le point B tend vers le point A
- la droite (AB) tend alors vers la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A
- l'accroissement moyen de f en x_0 tend vers $f(x_0)$. A la limite le point B est en A, la droite (AB) est tangente à $\mathcal{C}_f$ en A et son coefficient directeur est $f'(x_0)$.

2.2 Interprétation numérique du nombre dérivé

On a vu que lorsque f est dérivable en x_0, on a :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x - x_0) \quad \text{où } \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0.$$

Ainsi lorsque x est voisin de x_0, on a l'approximation :

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

L'application

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

s'appelle *approximation affine de f en x_0*.

2.3 Détermination d'une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse x_0

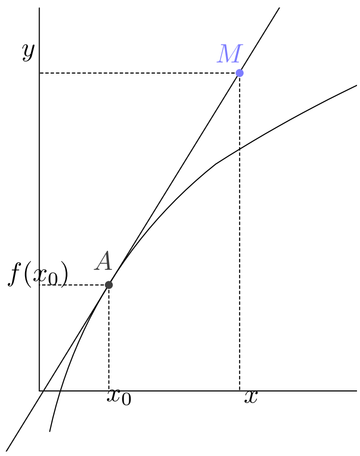


FIGURE 49.3 – Tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$

La méthode est classique : soit $M(x, y)$ un point quelconque de cette tangente T distinct de A. Le coefficient directeur de T est :

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}.$$

D'où une équation de T :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

On constate que la tangente T n'est autre que la représentation graphique de l'approximation affine de f (en x_0).

Exemple 49.5. On se donne la fonction f définie sur tout $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto f(x) = -x^2 + 3.$$

On cherche une équation de la tangente T au point d'abscisse $x_0 = 2$. On calcule $f'(2)$:

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{-(2+h)^2 + 3 - (-2^2 + 3)}{h} = \frac{-4h - h^2}{h} = -4 - h$$

donc

$$f'(2) = \lim_{h \to 0}(-4 - h) = -4.$$

L'équation de T est donc :

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2) = -1 - 4(x - 2) = -4x + 7.$$

2 4 Interprétation cinématique du nombre dérivé

Supposons ici que f représente la loi horaire d'un mobile en déplacement. La vitesse moyenne du mobile entre les instants t_0 et $t_0 + h$ est alors :

$$\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}.$$

La vitesse instantanée du mobile au moment t_0 est donc donnée par :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} = f'(t_0).$$

Si f est une loi horaire d'un mobile en mouvement, le nombre dérivé en t_0 représente la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0.

3 Fonction dérivée

Définition 49.6 (Fonction dérivée)**.** *Lorsqu'une fonction f admet un nombre dérivé en tout point x_0 d'un intervalle I, on dit que f est* dérivable *sur I. On définit alors la* fonction dérivée*, notée f', qui à tout point x_0 de I associe le nombre dérivé $f'(x_0)$.*

Voici un théorème fondamental :

Théorème 49.7. *Toute fonction f dérivable sur un intervalle I est continue sur I.*

Remarques 49.8.

1. La réciproque du théorème 49.7 est fausse. En effet, il existe des fonctions continues en un point x_0 et non dérivables en x_0. C'est le cas, par exemple, de la fonction « valeur absolue ».
2. Une fonction f peut être dérivable (et donc continue) sans que sa dérivée f' soit continue.

Exemple 49.9. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On montre que f est continue en 0. On a, pour tout réel $x \neq 0$:

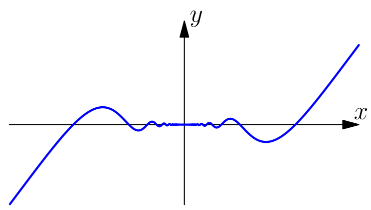


FIGURE 49.4 – Représentation graphique de la fonction $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

$$\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1.$$

Donc :

$$x^2 \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq x^2.$$

D'après le théorème de comparaison des limites (en 0), on en déduit :

$$\lim_{x\to 0} |f(x)| = 0$$

puisque $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$. Donc :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Donc f est continue en 0. On montre que f est dérivable en 0. Pour tout réel $x \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x}.$$

Or :

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Ce qui signifie que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. Cependant f' n'est pas continue en 0. En effet, pour tout $x \neq 0$, on a :

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Nous savons que $\lim_{x\to 0} 2x \sin \frac{1}{x} = 0$, mais la quantité $\cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0. Donc f' n'a pas de limite en 0, ce qui signifie qu'elle n'est pas continue en 0.

Remarque 49.10. Si f est dérivable en x_0, alors l'application « coefficient directeur » φ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si $x \neq x_0$ et $\varphi(x_0) = f'(x_0)$ est continue en x_0 puisque

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = f'(x_0).$$

4 Applications de la dérivation à l'étude de fonctions

Théorème 49.11 (Lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction)**.** *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*

1. *f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.*
2. *f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur I.*
3. *f est strictement croissante (resp. strictement décroissante sur I si et seulement si*
   - *$f' \geq 0$ sur I (resp. $f' \leq 0$)*
   - *L'ensemble $\{x \in I,\ f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide.*

La démonstration de ce théorème est hors-programme. On peut en voir une à la **Leçon 48 : Théorème des accroissements finis**.

Remarques 49.12.
1. Si $f' > 0$ sur I, sauf en des points isolés où elle s'annule, on a quand même la stricte croissance de f sur I,
2. il n'y a pas équivalence entre les conditions « $f' > 0$ » et « f est strictement croissante sur I ».

On applique les mêmes remarques pour « $f' < 0$ sur I ».

Exemples 49.13.
1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. On a $f'(x) = 3x^2$. La dérivée est toujours strictement positive sauf en 0 où elle s'annule. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Cet exemple montre donc qu'une fonction strictement croissante sur un intervalle I n'a pas nécessairement une dérivée strictement positive sur I.

2. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x \in [-1\,,1] \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On a

$$g'(x) = \begin{cases} 3(x+1)^2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x \in [-1\,,1] \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La dérivée g' est toujours positive. De plus, elle est nulle sur tout intervalle $[-1\,,1]$. Par

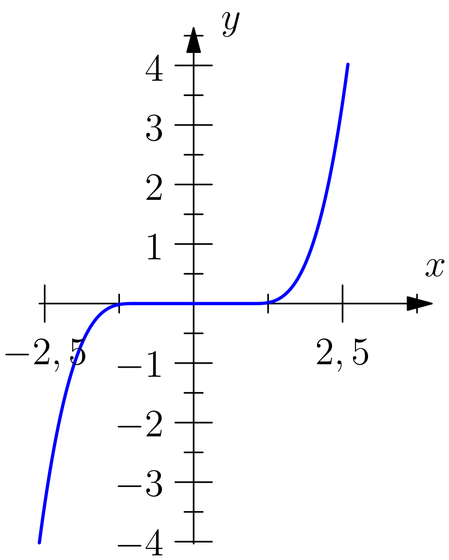


FIGURE 49.5 – Représentation graphique de la fonction g

conséquent, la fonction g est croissante (non strictement) sur $\mathbb{R}$.

3. Soit h la fonction définie sur $]-2\,,-1[\,\cup\,]1\,,2[$ par

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \,]-2\,,-1[\\ 1 & \text{si } x \in \,]1\,,2[\end{cases}$$

On a clairement $h' = 0$ sur $]-2\,,-1[\cup]1\,,2[$. Cependant h n'est pas constante, d'où la nécessité de la condition « I est un intervalle » dans le théorème précédent.

Le théorème suivant donne une *condition nécessaire* pour que f ait un extremum local en x_0 :

Théorème 49.14. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f admet un extremum local en un point x_0 intérieur à I alors $f'(x_0) = 0$.*

Remarques 49.15. Avant de lire la démonstration, on donne quelques explications :

1. Si a et b représentent les extrémités de l'intervalle I (avec éventuellement $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$), l'intérieur de I est l'intervalle ouvert $]a\,,b[$.
2. Un extremum local est soit un maximum local, soit un minimum local. Une fonction f admet un maximum local en x_0, s'il existe un intervalle ouvert J du type $]x_0-\varepsilon\,,x_0+\varepsilon[$ (avec $\varepsilon > 0$) tel que pour tout x de J, on ait $f(x) \leq f(x_0)$. (On définit de façon analogue un minimum local). Une fonction peut avoir plusieurs maxima sur un même intervalle I. Le plus grand d'entre eux est appelé maximum global de f sur I.

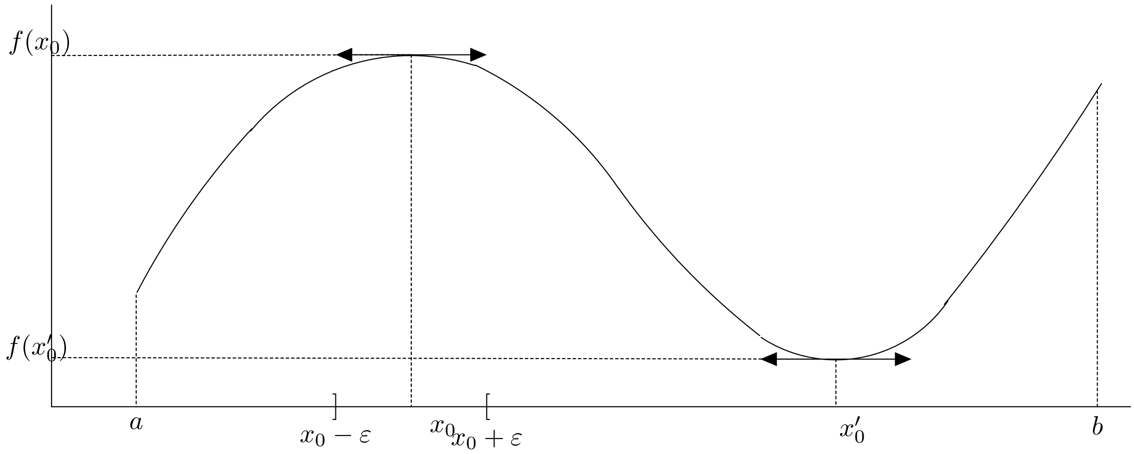


FIGURE 49.6 – Minimum local et maximum local d'une fonction

Le théorème suivant donne une *condition suffisante* pour que f ait un extremum local en x_0.

Théorème 49.16. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit x_0 un point intérieur à I. Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors f a un extremum local en x_0.*

Ce théorème est admis car il repose sur le théorème des accroissements finis.

5 Dérivation d'une fonction composée et applications

Théorème 49.17. *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $u(I)$. La fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:*

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) v'(u(x)).$$

Conséquence 49.18. *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.*
- *Si $f = \sqrt{u}$ (où u est strictement positive sur I) alors f est dérivable sur I et $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.*
- *Si $f = u^n$ (avec $n \in \mathbb{Z}^*$ et u ne s'annulant pas sur I si $n \leq -1$) alors f dérivable sur I et $f' = nu'u^{n-1}$.*

Exemples 49.19.
1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}.$$
On peut écrire $f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + x$. la fonction u est strictement positive sur $]0\,,+\infty[$. Donc f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et on a $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, ce qui donne :
$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}, \qquad \text{pour tout } x \in \,]0\,,+\infty[.$$
2. Dans la pratique, s'il n'y a pas d'ambiguïté avec les intervalles, on finit par ne plus préciser la composition :
$$f(x) = (2x^2 - x + 1)^6 \qquad f'(x) = 6(4x-1)(2x^2 - x + 1)^5.$$

6 Tableaux des dérivées usuelles et opérations sur les dérivées

Le tableau 49.1 nous donne les dérivées usuelles. Tous les résultats de ce tableau se démontre essentiellement avec la définition du nombre dérivé.

Le tableau 49.2 donne les opérations sur les dérivées lorsque u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I. Tous les résultats de ce tableau se démontrent essentiellement avec la définition du nombre dérivé.

Fonction f	Fonction dérivée f'	Domaine de définition de f'
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$; $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = -\omega \sin(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = \omega \cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \tan(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = \omega(1 + \tan^2(\omega t + \varphi))$	$\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{t},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

TABLE 49.1 – Dérivées de fonctions usuelles

Fonction	Dérivée	Conditions
$u + v$	$u' + v'$	
ku (k constante)	ku'	
uv	$u'v + uv'$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
u^n $(n \in \mathbb{Z})$	$nu'u^{n-1}$	$u > 0$ sur I si $n \leq 0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I
$v \circ u$	$u'(v' \circ u)$	

TABLE 49.2 – Opérations sur les dérivées

1 Les démonstrations du cours

Démonstration du théorème 49.1. (i) $\Rightarrow$ (ii) Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell.$$

On pose, pour $h \neq 0$:

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \ell.$$

Par hypothèse, on a ainsi :

$$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0.$$

De plus :

$$h\varphi(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - \ell h.$$

D'où la condition (ii) :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \ell h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \ell h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0.$$

Pour $h \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell + \varphi(h)$$

et comme $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$, il vient :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell.$$

D'où la condition (i).

□

Démonstration du théorème 49.7. Soit $x_0 \in I$. Puisque f est dérivable en x_0 :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0.$$

On pose $x = x_0 + h$, il vient alors :

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\varphi(x-x_0) \quad \text{où } \lim_{x\to x_0} \varphi(x-x_0) = 0.$$

Par passage à la limite lorsque x tend vers x_0, on obtient :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\varphi(x-x_0)).$$

Or $\lim_{x\to x_0} (x-x_0)f'(x_0) = 0$ car $f'(x_0)$ est un nombre fini et :

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x-x_0) = 0.$$

D'où :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

La fonction f est donc continue en x_0. Ce raisonnement étant valable pour tout x_0 de I, on en déduit que f est continue sur I. □

Démonstration du théorème 49.14. Par hypothèse, f est dérivable en x_0 et :

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Comme x_0 est intérieur à I, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0-\varepsilon\,, x_0+\varepsilon[$ soit contenu dans I. Supposons que l'extremum local de f soit un maximum local. Pour $h \in\,]0\,,\varepsilon[$, on a :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Pour $h \in\,]-\varepsilon\,, 0[$, on a :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Ceci montre que la dérivée à droite de f en x_0 est négative et que la dérivée à gauche de f en x_0 est positive. Et comme elles sont toutes deux égales à $f'(x_0)$, on a nécessairement

$$f'(x_0) \geq 0 \quad \text{et} \quad f'(x_0) \leq 0$$

d'où $f(x_0) = 0$.

Dans le cas où f admet un minimum local, on raisonne de même. □

Démonstration du théorème 49.17. Soit $x_0 \in I$. On écrit :

$$\frac{(v\circ u)(x)-(v\circ u)(x_0)}{x-x_0} = \frac{v(u(x))-v(u(x_0))}{u(x)-u(x_0)} \times \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}.$$

On pose $y_0 = u(x_0)$ et $y = u(x)$, ainsi :

$$\frac{(v\circ u)(x)-(v\circ u)(x_0)}{x-x_0} = \frac{v(y)-v(y_0)}{y-y_0} \times \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}.$$

Or, v étant dérivable en y_0, on a :

$$\lim_{y\to y_0} \frac{v(y)-v(y_0)}{y-y_0} = v'(y_0)$$

et u étant dérivable en x_0, on a :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} = u'(x_0).$$

D'où :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(v\circ u)(x)-(v\circ u)(x_0)}{x-x_0} = u'(x_0)\times v'(y_0) = u'(x_0)\times v'(u(x_0))$$

c'est-à-dire

$$(v\circ u)'(x_0) = u'(x_0)\times v'(u(x_0)).$$

Ceci étant valable pour tout $x_0 \in I$, on en déduit la dérivabilité de $v\circ u$ sur I et

$$(v\circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x)).$$

□

Exemples de démonstration de dérivée de fonctions usuelles. 1. Si $f(x) = x^n$ lorsque $n > 0$, l'accroissement moyen de f en x s'écrit (on utilise la formule du binôme de Newton) :

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{x^n + nx^{n-1}H + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}.$$

D'où :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} nx^{n-1}\mathrm{C}_n^2 x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1} = nx^{n-1}.$$

On aurait pu procéder par récurrence en utilisant la formule de dérivation d'un produit.

2. Si $f(x) = \sin(x)$. L'accroissement moyen de f en x s'écrit :
$$\frac{\sin(x+h) - \sin h}{h} = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\sin h}{h} \cos x.$$
Or :
$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0.$$
D'où :
$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin h}{h} = \cos h.$$

□

Exemples de démonstration sur les opérations de dérivées. 1. On veut montrer la relation $(uv') = u'v + uv'$. Pour tout x_0 de I, comme les fonctions u et v sont dérivables en x_0, on peut écrire :
$$u(x_0 + h) = u(x_0) + u'(x_0)h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0, \tag{49.1}$$
$$v(x_0 + h) = v(x_0) + v'(x_0)h + h\psi(h) \quad \text{où } \lim_{h \to 0} \psi(h) = 0. \tag{49.2}$$
En multipliant (49.1) par (49.2), il vient :
$$\begin{aligned} u(x_0+h)v(x_0+h) &= (u(x_0) + u'(x_0)h + h\varphi(h))(v(x_0) + v'(x_0)h + h\psi(h)) \\ &= u(x_0)v(x_0) + (u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0))h + h\Phi(h) \end{aligned}$$
où
$$\Phi(h) = u(x_0)\psi(h) + u'(x_0)v'(x_0)h + u'(x_0)h\psi(h) + \varphi(h)v'(x_0)h + h\varphi(h)\psi(h).$$
Nous avons donc :
$$uv(x_0 + h) = uv(x_0) + (u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0))h + h\Phi(h) \quad \text{où } \lim_{h \to 0} \Phi(h) = 0.$$
La fonction produit uv admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0, donc uv est dérivable en x_0. Ceci étant valable pour tout x_0 de I, on a uv dérivable sur I. On a donc :
$$(uv)' = u'v + uv'.$$

2. On veut montrer la relation $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$. Pour tout $x \in I$, on pose $f(x) = \frac{1}{v(x)}$. On a :
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{v(x+h)} - \frac{1}{v(x)}}{h} = \frac{v(x) - v(x+h)}{hv(x)v(x+h)}.$$
Or, puisque v est dérivable, on peut écrire :
$$v(x+h) = v(x) + v'(x)h + h\varphi(h).$$
Remplaçons $v(x) - v(x+h)$ par $-(v'(x)h + h\varphi(h))$; on obtient :
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{v'(x)h + h\varphi(h)}{hv(x)v(x+h)} = -\frac{v'(x) + \varphi(h)}{v(x)v(x+h)}.$$
D'où :
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{v'(x) + \varphi(h)}{v(x)v(x+h)} = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}.$$
Donc f est dérivable et $f' = -\frac{v'}{v^2}$ d'où :
$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

3. On veut montrer la relation $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. On écrit :
$$\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$$
et on utilise la dérivée d'un produit et le résultat ci-dessus.

□

2 Quelques inégalités

Exemples 49.20. 1. On va montrer les inégalités suivantes sur $[0\,,\frac{\pi}{2}]$:

(a) $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$

(b) $1-\frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2}-x$.

On note $I=[0\,,\frac{\pi}{2}]$. On étudie les fonction f et g sur I par $f(x)=x-\sin x$ et $g(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$. On a, pour $x\in I$,

$$f'(x)=1-\cos x\geq 0$$

$$g'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}\quad\text{et}\quad g''(x)=-\sin x\leq 0.$$

La fonction f' est positive sur I, donc f est croissante sur I et comme $f(0)=0$, on en déduit que f est positive sur I, donc :

$$\sin x\leq x,\qquad\text{pour tout } x\in I.$$

La fonction g'' est négative sur I, donc g' est décroissante sur I. Or :

$$g'(0)=1-\frac{2}{\pi}>0\quad\text{et}\quad g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{\pi}<0.$$

Comme g' est continue et strictement décroissante sur I, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha\in I$ tel que $g'(\alpha)=0$. Donc g' est positive sur $[0\,,\alpha]$ puis négative sur $[\alpha\,,\frac{\pi}{2}]$. On en déduit que g est croissante sur $[0\,,\alpha]$ puis décroissante sur $[\alpha\,,\frac{\pi}{2}]$. Mais $g(0)=0$ et $g(\frac{\pi}{2})=0$. Donc g est positive sur I :

$$\frac{2}{\pi}\leq\sin x,\qquad\text{pour tout } x\in I.$$

On montre de même que :

$$1-\frac{2}{\pi}x\leq\cos x\leq\frac{\pi}{2}-x,\ \text{pour tout } x\in I.$$

2. On montre que pour tout $x\in[0\,,\frac{\pi}{2}[$, on a :

$$x\leq\tan x.$$

On pose $f(x)=\tan x-x$, pour $x\in J=[0\,,\frac{\pi}{2}[$. On a :

$$f'(x)=\tan^2 x\geq 0,\qquad\text{pour tout } x\in J.$$

Donc f est croissante sur J. En outre, $f(0)=0$ donc f est positive sur J d'où le résultat.

Remarque 49.21. A l'aide de l'encadrement $\sin x\leq x\leq\tan x$ démontré ci-dessus pour $x\in[0\,,\frac{\pi}{2}[$, on en déduit que :

$$1\leq\frac{x}{\sin x}\leq\frac{1}{\cos x},\qquad\text{pour tout } x\in\,]0\,,\tfrac{\pi}{2}[.$$

On montre que l'encadrement est aussi valable pour $x\in\,]-\frac{\pi}{2}\,,0[$. Le théorème des gendarmes permet alors de retrouver la limite importante :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

LEÇON

50 Fonctions polynômes du second degré

Niveau, prérequis, références

Niveau Première S

Prérequis Notions de fonctions

Références [126]

Contenu de la leçon

1 Fonction trinômes du second degré

Définition 50.1 (Fonction trinômes du second degré)**.** *On appelle* fonction trinôme du second degré *toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres et $a \neq 0$.*

Remarque 50.2. Une fonction trinôme est une fonction polynôme. On dit indifféremment fonction trinôme du second degré ou trinôme.

Exemples 50.3.

1. $f : x \mapsto (x+1)(x+2)$ et $g : x \mapsto (x-1)(x+1)$ sont des fonctions trinômes du second degré, car elles peuvent s'écrire $f(x) = x^2 + x - 2$ et $g(x) = x^2 - 1$.
2. $h : x \mapsto (x-1)^2 - (x+2)^2$ n'est pas une fonction trinôme du second degré, car, en développant, on obtient $h(x) = 6x - 3$.

Propriété 50.4. *Pour tout trinôme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, il existe deux nombres tels que :*

$$f(x) = a[(x-\alpha)^2 - \beta].$$

Cette écriture est appelée forme canonique *du trinôme*

Exemple 50.5. On a :

$$2x^2 - 6x - 1 = 2\left(x^2 - 3x - \frac{1}{2}\right).$$

$x^2 - 3x$ est le début du développement de $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$. Donc :

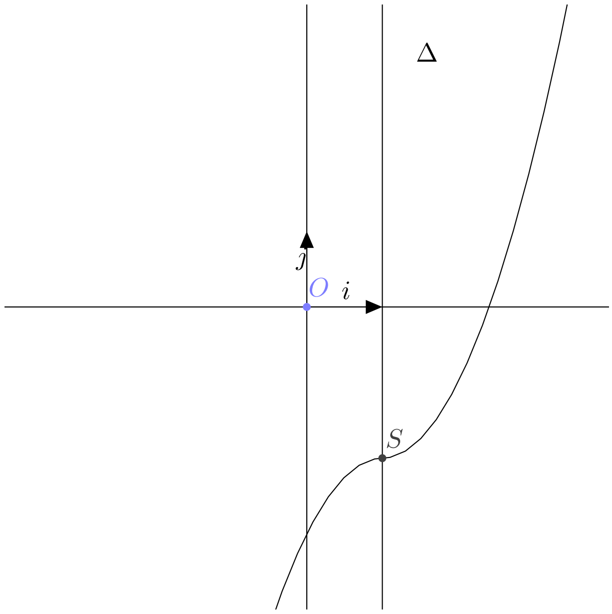
$$2x^2 - 6x - 1 = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{1}{2}\right] = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{4}\right].$$

D'où $\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = \frac{11}{4}$.

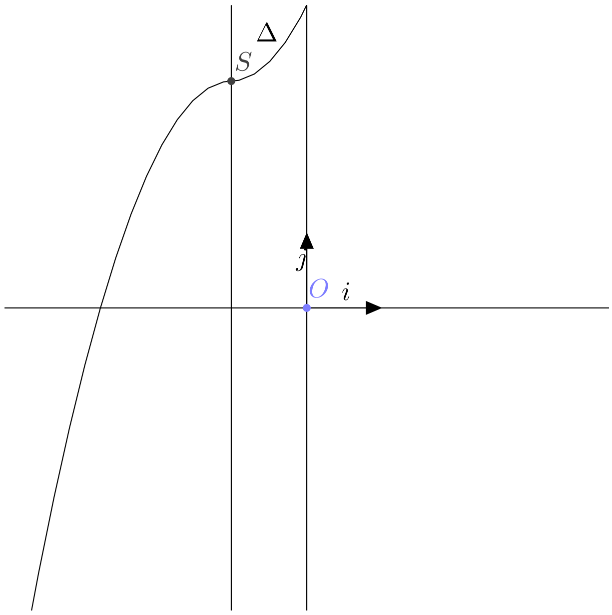
D'après la propriété 50.4, la fonction trinôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, peut aussi s'exprimer par $x \mapsto a[(x-\alpha)^2 - \beta]$. Donc f est une fonction associée à la fonction $x \mapsto x^2$ par la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$.

Propriété 50.6. *La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$ s'obtient à partir de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ en effectuant une translation de vecteur $\alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}$, puis « une multiplication par a ».*

Conséquence 50.7. *Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, admet un axe de symétrie d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.*



(a) $a > 0$



(b) $a < 0$

FIGURE 50.1 – L'axe de symétrie dans le repère (O, i, j) est $\Delta : x = -\frac{b}{2a}$ et les coordonnées de S dans le repère (O, i, j) est $S(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$

Définition 50.8 (Parabole)**.** *Dans un repère du plan, la courbe représentative d'une fonction trinôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, s'appelle une* parabole. *Son équation est $y = ax^2 + bx + c$.*

Remarque 50.9. On appelle aussi « parabole » la représentation de la fonction carré.

Propriété 50.10. *Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, une fonction trinôme. Les variations de f sur $\mathbb{R}$ sont :*

- *Si $a > 0$:*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			$f(-\frac{b}{2a})$		

  f a un minimum.

- *Si $a < 0$:*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
			$f(-\frac{b}{2a})$		
f		$\nearrow$		$\searrow$	

  f a un maximum.

Méthode 50.11. *Pour donner le tableau de variations d'une fonction trinôme, il faut :*

1. *Ecrire $f(x)$ sous forme canonique : $f(x) = a[(x-\alpha)^2 + \beta]$.*
2. *Déduire le tableau de variations.*

Exemple 50.12. On donne le tableau de variation de f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$. On écrit $f(x)$ sous forme canonique

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1$$

soit :

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}.$$

Sachant que $a > 0$, f admet un minimum $f(\frac{3}{2})$, soit $-\frac{5}{4}$. On dresse le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			$-\frac{5}{4}$		

2 Equations du second degré

Définition 50.13 (Discriminant)**.** *On appelle* discriminant *de l'expression $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, le nombre $b^2 - 4ac$, noté Δ.*

Propriété 50.14. *Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$, de discriminant Δ.*

- *Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions distinctes x_1 et x_2 :*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

  On a $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- *Si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution x_0, $x_0 : \frac{-b}{2a}$. On a $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.*
- *Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution. $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas.*

Définition 50.15. *On appelle* racine *d'un polynôme P toute solution de l'équation $P(x) = 0$.*

Exemples 50.16.
- Résoudre l'équation $3x^2 - 2x + 5 = 0$. Pour cette équation, $a = 3$, $b = -2$ et $c = 5$, donc $\Delta = -56$. L'équation n'a pas de solution (le polynôme $3x^2 - 2x + 5$ n'a pas de racine).
- Résoudre l'équation $x^2 + 2x - 15 = 0$. Pour cette équation, $a = 1$, $b = 2$ et $c = -15$, donc $\Delta = 64$. On a $x_1 = \frac{-2-\sqrt{64}}{2}$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{64}}{2}$, soit $x_1 = -5$ et $x_2 = 3$. L'équation a deux solutions (le polynôme $x^2 + 2x - 15$ a deux racines).

Remarque 50.17. Pour résoudre certaines équations telles que $x^2 - 5 = 0$ ou $x^2 - 3x = 0$, l'utilisation du discriminant n'est pas utile.

Méthode 50.18. *Pour résoudre une équation du second degré,*
1. *Vérifier qu'il s'agit d'une équation du second degré et si l'utilisation du discriminant est utile.*
2. *Calculer le discriminant Δ et déterminer son signe.*

Exemples 50.19.
1. On veut résoudre $2x^2 - 4x - 5 = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré et on calcule le discriminant $b^2 - 4ac$:
$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (-5)$$
car $a = 2$, $b = -4$ et $c = -5$, d'où $\Delta = 56$. Δ est strictement positif, il y a deux solutions distinctes données par les formules
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{56}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{56}}{4},$$
soit :
$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{14}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{14}}{2}.$$
2. On veut résoudre l'équation $4x^2 - 5 = 0$. Pour cette équation, le calcul du discriminant n'est pas utile. L'équation s'écrit $x^2 = \frac{5}{4}$. Il y a deux solutions opposées, soit :
$$x_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$
3. On veut résoudre l'équation $\frac{4}{3}x^2 + 25 = 0$. Pour cette équation, le calcul du discriminant n'est pas utile. $\frac{4}{3}x^2 + 25$ est strictement positif, donc il n'y a pas de solutions.
4. On veut résoudre l'équation $3x^2 + 5x = 0$. Pour cette équation, le calcul du discriminant n'est pas utile, car elle se factorise immédiatement :
$$x(3x + 5) = 0$$
soit $x_1 = 0$ et $x_2 = -\frac{5}{3}$.

3 Signe du trinôme du second degré

Propriété 50.20. *Soit $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, de discriminant Δ. Le signe de $ax^2 + bx + c$ est :*
- *Si $\Delta < 0$, le signe de a pour tout x de $\mathbb{R}$ ($ax^2 + bx + c$ n'a pas de racine).*
- *Si $\Delta = 0$, le signe de a pour tout x de $\mathbb{R}$ sauf x_0 (x_0 est la racine de $ax^2 + bx + c$).*
- *Si $\Delta > 0$,*
  - *le signe de a pour tout x de $]-\infty\,, x_1[\,\cup\,]x_2\,, +\infty[$*
  - *le signe de $-a$ pour tout x de $]x_1\,, x_2[$*

  (x_1 et x_2 sont les racines de $ax^2 + bx + c$ ($x_1 < x_2$)).

Exemple 50.21. On note $f(x) = x^2+x-2$. On cherche le signe de f. $\Delta = 9$ et $f(x)$ a deux racines : -2 et 1. Le coefficient a de x^2 est positif. Donc $f(x) < 0$ pour tout x de $]-2\,,1[$ (« entre » les racines) ; $f(x) > 0$ pour tout x de $]-\infty\,,2[\cup]1\,,+\infty[$ (« à l'extérieur » des racines).

Méthode 50.22. *On veut déterminer le signe d'un trinôme du second degré.*

1. *Si le cas est évident, le signe se déduit directement.*
2. *Sinon calculer le discriminant Δ.*
   - *Si $\Delta < 0$, le trinôme est toujours du signe de a.*
   - *Si $\Delta = 0$, le trinôme est toujours du signe de a et nul pour $x = -\frac{b}{2a}$.*
   - *Si $\Delta < 0$, le trinôme est du signe de a « à l'extérieur des racines » et du signe opposé à a « entre les racines ».*

Exemples 50.23.

1. On cherche le signe de $2x^2 - 3x + 4$. On calcule le discriminant $\Delta = -23$. Δ étant négatif et le coefficient de x^2 positif : $2x^2 - 3x + 4$ est positif sur $\mathbb{R}$.
2. On veut résoudre l'inéquation $x^2 - 3 < 0$. L'équation $x^2 - 3 = 0$ se résout sans discriminant, elle admet deux racines :
$$x_1 = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = -\sqrt{3}.$$
Le coefficient de x^2 est positif :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
signe de x^2-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'inéquation $x^2 - 3 \leq 0$ a pour solution $[-\sqrt{3}\,,\sqrt{3}]$.
3. On veut résoudre l'inéquation $3x^2 - 2x + 4 < 0$. On calcule le discriminant $\Delta = -44$. Δ étant négatif et le coefficient de x^2 positif : $2x^2 - 3x + 4$ est positif sur $\mathbb{R}$. L'inéquation $3x^2 - 2x + 4 < 0$ n'a pas de solution.

Compléments

Démonstration de la propriété 50.4. Comme $a \neq 0$, on peut écrire
$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$
$x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. En effet,
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$
d'où
$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$
Donc :
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a[(x-\alpha)^2 - \beta] \end{aligned}$$
avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$. □

Démonstration de la propriété 50.14. Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. L'équation s'écrit :

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = 0.$$

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$, elle s'écrit

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0.$$

soit :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0, \qquad \text{car } a \neq 0.$$

– Si $\Delta > 0$, alors Δ est le carré de $\sqrt{\Delta}$:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = \left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

  L'équation s'écrit

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0.$$

  Donc $x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ ou $x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$, soit :

$$x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

– Si $\Delta = 0$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$ s'écrit

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

  Ce carré est nul si, et seulement si,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right) = 0$$

  soit $x = -\frac{b}{2a}$.

– Si $\Delta < 0$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ est strictement positif donc ne s'annule jamais. Il n'y a pas de solution à l'équation.

$\square$

Démonstration de la propriété 50.20. $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique s'écrit

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right] - \frac{\Delta}{4a^2}$$

avec $a \neq 0$.

– Si $\Delta < 0$ alors $\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ est positif et le signe de ax^2+bx+c est celui de a.
– Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ et son signe est celui de a sauf pour $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

– Si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c$ se factorise :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Soit $x_1 < x_2$, on a le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a(x - x_1)(x - x_2)$		$\mathrm{sgn}(a)$	0	$\mathrm{sgn}(-a)$	0	$\mathrm{sgn}(a)$	

où $\mathrm{sgn}(a)$ est le signe de a.

$\square$

LEÇON

51 Fonctions logarithmes

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S

Prérequis Fonctions dérivées, fonctions exponentielles, primitives, intégrales, théorème des accroissement finis, résolution d'une équation du second degré.

Références [127, 128]

Contenu de la leçon

1 Introduction de la fonction logarithme

1 1 Introduction du logarithme par les primitives

Théorème 51.1. *La fonction « inverse », définie sur* $]0\,,+\infty[$ *par* $f(x) = \frac{1}{x}$ *admet une unique primitive* F *qui vérifie la condition* $F(1) = 0$.

L'argument principal est que toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Définition 51.2. *On considère la fonction* f *définie sur l'intervalle* $]0\,,+\infty[$ *par* $f(x) = \frac{1}{x}$ *(restriction de la fonction « inverse » à* $]0\,,+\infty[$*. La fonction* logarithme népérien *noté* $\ln$ *est* la *primitive* F *de* f *telle que* $F(1) = 0$.

1 2 Introduction du logarithme par l'exponentielle

Propriété 51.3. *Pour tout nombre réel* a *strictement positif, il existe un réel unique* α *tel que* $\mathrm{e}^{\alpha} = a$. *On appelle ce nombre* le logarithme népérien *de* a. *On le note* $\ln a$.

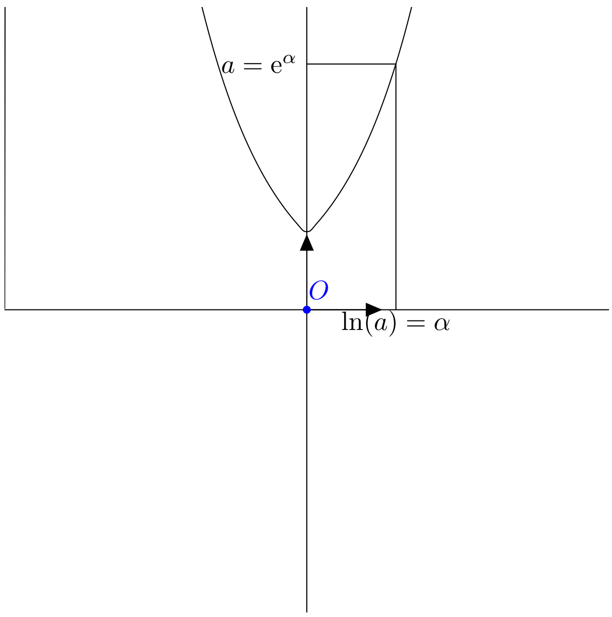


FIGURE 51.1 – Définition du logarithme népérien avec la fonction exponentielle

Exemples 51.4. 1. Le nombre α tel que $\mathrm{e}^{\alpha} = 3$ est $\ln 3$.

2. $\ln 5$ est le nombre dont l'image par la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ est 5 ; ainsi $\mathrm{e}^{\ln 5} = 5$.

1 3 Conséquences des définitions du logarithme

On va se placer dans le cadre où on a introduit le logarithme par l'unique primitive F de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$ qui vérifie la condition $F(1) = 0$.

Conséquence 51.5. *1. La fonction primitive est définie sur le même intervalle que la fonction considérée, donc la fonction* $\ln$ *est définie sur* $]0\,,+\infty[$.

2. $\ln(1) = 0$.
3. *la fonction* $\ln$ *est dérivable sur* $]0\,,+\infty[$ *et* $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ *pour tout* $x \in\,]0\,,+\infty[$. *La fonction* $\ln$ *est continue sur* $]0\,,+\infty[$ *puisque dérivable sur cet intervalle*
4. *La fonction* $\ln$ *est strictement croissante sur* $]0\,,+\infty[$ *puisque sa dérivée est strictement positive sur cet intervalle, ce qui permet une première esquisse de son tableau de variations :*

x	0	1	$+\infty$
signe de la dérivée $\frac{1}{x}$	$\|\|$	$+$	$+$
variation de la fonction $\ln$	$\|\|$ $\nearrow$	0	$\nearrow$

5. *Ainsi, nous en déduisons également le signe de la fonction* $\ln$ *:*
   - $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$,
   - $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$,
   - $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
6. *La fonction* $\ln$ *étant strictement croissante et continue, elle réalise une bijection de* $]0\,,+\infty[$ *sur l'intervalle image. On en déduit que pour tous réels* a *et* b *de* $]0\,,+\infty[$, *on a :*
   - $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$,
   - $\ln a < \ln a \Leftrightarrow a < b$.

   En effet, si $a = b$ *alors il est clair que* $\ln a = \ln b$. *De même, si* $a < b$ *alors (stricte croissante du* $\ln$*)* $\ln a < \ln b$.

1 4 Des exemples

Exemples 51.6. 1. On veut déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g définies par :
- $f(x) = \ln(x+3)$
- $g(x) = \ln(x^2 - x - 2)$.

On pose $F(x) = x + 3$ et $G(x) = x^2 - x - 2$. Les deux fonctions f et g sont définies si le logarithme des deux fonctions F et G sont définies, ce qui équivaut à la positivité stricte des deux fonctions F et G.
- $F(x) > 0 \Leftrightarrow x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$. Donc f est définie sur l'intervalle $]-3\,,+\infty[$.
- $G(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0$. On résout $x^2 - x - 2 = 0$. Le discriminant du trinôme est $\Delta = 1 - 4 \times (-2) = 1 + 8 = 9$. Donc :

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1-3}{2} = -1.$$

Or le signe du coefficient de x^2 est positif donc $G(x) > 0 \Leftrightarrow x \in\,]-\infty\,,-1[\cup[2\,,+\infty]$. Donc g est définie sur l'intervalle $]-\infty\,,-1[\,\cup\,[2\,,+\infty]$.

2. On veut dériver la fonction f définie par $f(x) = 3 - x + \ln x$. La fonction f est dérivable car c'est une somme de fonctions dérivables. On rappelle que comme $x \mapsto \ln x$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$, la dérivée de la fonction logarithme est $x \mapsto \frac{1}{x}$. Donc :
$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x}.$$
3. On veut résoudre l'équation $\ln(2x+1) = \ln(3-x)$. Ceci est équivalent à résoudre le système d'équation/inéquation suivant :
$$\begin{cases} 2x+1 = 3-x \\ 2x+1 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases}$$
Or :
$$2x+1 = 3-x \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$
et on vérifie les deux autres conditions du système :
$$2 \times \frac{2}{3} + 1 = \frac{7}{3} \quad \text{et} \quad 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}.$$
Donc la solution de l'équation proposée est $x = \frac{2}{3}$.

2 Théorème fondamental

Théorème 51.7. *Pour tous réels a et b strictement positifs :*
$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$
On dit que la fonction logarithme transforme les produits en somme.

Remarque 51.8. Si a et b sont strictement négatifs, on a une relation analogue :
$$\ln(ab) = \ln(-a) + \ln(-b)$$
et plus généralement, pour tout réels a et b de $\mathbb{R}^*$:
$$\ln|ab| = \ln|a| + \ln|b|.$$

Conséquence 51.9. *Pour tous réels a et b strictement positifs :*
1. $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$,
2. $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$,
3. $\ln a^p = p \ln a$, $(p \in \mathbb{Z})$,
4. $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

3 Etude de la fonction $\ln$

3.1 Limites aux bornes de l'ensemble de définition $]0\,,+\infty[$

Théorème 51.10.
$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$
où $x \to 0^+$ signifie x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Théorème 51.11. *La fonction $\ln$ est une bijection (strictement croissante) de $]0\,,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.*

3.2 Le nombre e

Puisque la fonction $\ln$ est une bijection de $]0\,,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, pour tout réel $\ln x = \lambda$ admet une unique solution dans $]0\,,+\infty[$.

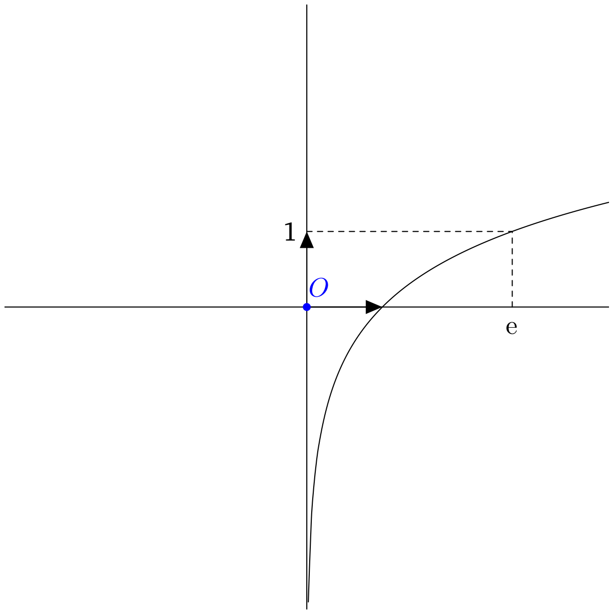
Définition 51.12 (Base du logarithme népérien)**.** *On note* e *l'unique solution de l'équation* $\ln x = 1$. *Ce nombre* e *s'appelle* base *du logarithme népérien.*

On a donc $\ln \mathrm{e} = 1$ et par la calculatrice, on obtient $\mathrm{e} \approx 2{,}718\ldots$. Plus généralement, $\ln \mathrm{e}^p = p \ln \mathrm{e} = p$.

Exemple 51.13. Soit à résoudre $\ln(x+3) = 9$, pour $x > -3$:

$$\ln(x+3) = \ln \mathrm{e}^9 \Leftrightarrow x + 3 = \mathrm{e}^9 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^9 - 3 \approx 8100.$$

3.3 Représentation graphique de la fonction $\ln$



4 Limites de références

Lemme 51.14. *La représentation graphique de la fonction* $\ln$ *est toujours située sous la première bissectrice* $(y = x)$ *:*

$$\ln x < x \text{ pour tout } x > 0.$$

Remarque 51.15. On a même $\ln x \leq x - 1$, pour tout $x \in\,]0\,,+\infty[$.

Théorème 51.16. 1. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

2. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \quad (\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*).$$

3. $$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$$

4. $$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0, \quad (\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*).$$

5. $$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1.$$

Remarque 51.17. La dernière limite peut s'écrire sous d'autres formes :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to+\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Corollaire 51.18. *Pour toute fonction polynôme P de degré supérieur ou égal à 1, on a :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0.$$

Exemples 51.19.

1. On veut étudier la limite suivante :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}.$$
On a :
$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x}.$$
Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ et
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$
D'où par produit,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0.$$
2. On veut étudier la limite suivante :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$
En remarquant que $x = (\sqrt{x})^2$, nous avons :
$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{2\ln\sqrt{x}}{x}.$$
En posant $X = \sqrt{x}$ ($X \to +\infty$), nous obtenons :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{X\to+\infty} 2\frac{\ln X}{X} = 0.$$
Par un raisonnement analogue, on peut montrer que :
$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = 0.$$

5 Dérivées et primitives

Théorème 51.20. *Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction définie par $\ln u$ est dérivable sur I et :*

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

C'est une conséquence du théorème de dérivation d'une fonction composée.

Théorème 51.21. *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I est $\ln|u|$.*

Pour la démonstration de ce théorème, on peut utiliser le précédent en dérivant $\ln|u|$. On distinguera les intervalles où $u > 0$ de ceux où $u < 0$.

Exemple 51.22. On veut dériver sur $]0\,,+\infty[$ la fonction

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \ln(x^2+1) - \ln(x).$$

On obtient :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}.$$

6 Exponentielles de base a

Définition 51.23. *Pour tout nombre réel a strictement positif et tout nombre réel b, on pose :*

$$a^b = \mathrm{e}^{b\ln a}.$$

Remarques 51.24.

1. Cette définition donne un sens à une écriture telle que $\pi^{\sqrt{2}}$.
2. Elle est cohérente avec la puissance rationnelle d'un nombre $3^{1/2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln 3}$. Or $\frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{3}$ donc $3^{1/2} = \mathrm{e}^{\ln\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Exemples 51.25 (Sur calculatrice TI82).

```
> Pi^(V^(2))=e^(V^(2)*ln(Pi))
1
> Pi^(V^(2))
5.047487267
> e^(3*ln(2))
8
> (-3)^5
-243
> (-3)^(Pi)
ERR:REP NONREEL
1:Quitter [EXE]
> 3^(-Pi)
.0317014678
```

Propriété 51.26. *Pour tous nombres réels a et a' strictement positifs et tous nombres réels b et b' :*

1. $\ln a^b = b \ln a$.
2. $a^{b+b'} = a^b a^{b'}$.
3. $a^{b-b'} = \frac{a^b}{a^{b'}}$
4. $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$.
5. $(aa')^b = a^b a'^b$.
6. $\left(\frac{a}{a'}\right)^b = \frac{a^b}{a'^b}$.

Remarque 51.27. Les propriétés des puissances d'exposants entiers s'étendent, pour les nombres strictement positifs, aux puissances d'exposants réels.

Exemples 51.28.

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^\pi = \frac{1}{2^\pi} = 2^{-\pi}$,
2. $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{1-\sqrt{2}}$.

Définition 51.29 (Exponentielle de base a)**.** *Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto a^x$ par $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$. On l'appelle fonction* exponentielle de base a.

Exemples 51.30.

1. La fonction $f : x \mapsto 5^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $5^x = \mathrm{e}^{x \ln 5}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$f'(x) = \ln 5 \times \mathrm{e}^{x \ln 5} = \ln 5 \times 5^x.$$
2. La fonction $g : x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \mathrm{e}^{x \ln \frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{-x \ln 2}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$g'(x) = -\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

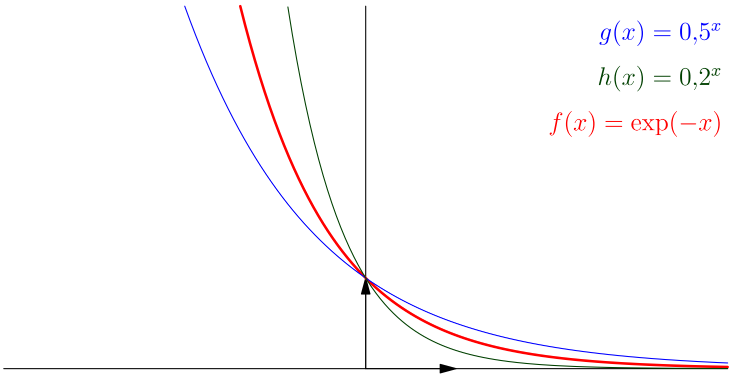
On peut tracer le tableau de variations de $x \mapsto a^x$ en distinguant deux cas :

1. Si $0 < a < 1$:

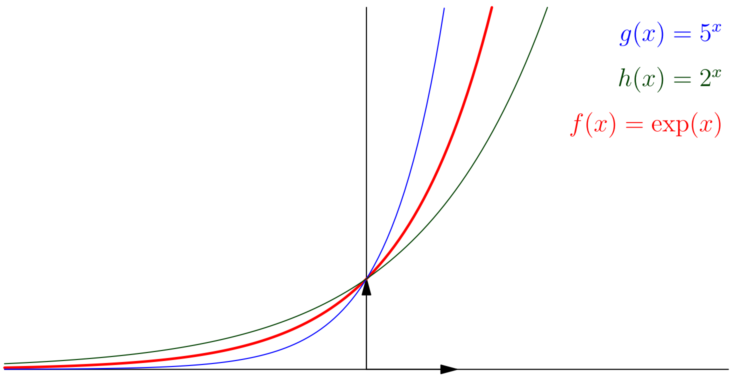
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	a	$\searrow$	0

2. Si $1 < a$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x	0	$\nearrow$	a	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



(a) $0 < a < 1$



(b) $1 < a$

FIGURE 51.2 – Représentation graphique de $x \mapsto a^x$

Démonstration de la propriété 51.3. La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elle est continue de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $]0\,,+\infty[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel a de l'intervalle $]0\,,+\infty[$, l'équation $e^x = a$ admet des solutions. Or la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Il y a donc un et un seul nombre réel α tel que $e^\alpha = a$. □

Démonstration du théorème 51.7. Pour tout réel a strictement positif, on pose la fonction G définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$G(x) = \ln(ax).$$

La fonction G est dérivable (G est une composée de fonctions dérivables : $G = v \circ u$ avec $u(x) = ax$ et $v = \ln$) et :

$$G'(x) = a \times \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$$

La fonction G est donc une primitive de la fonction inverse tout comme la fonction $\ln$. Elles diffèrent donc d'une constante c :

$$G(x) = \ln x + c \Leftrightarrow \ln(ax) = \ln x + c.$$

On calcule la constante c, si $x = 1$, on a :

$$\ln a = \ln 1 + c = 0 + c,$$

d'où $c = \ln a$ et finalement :

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a \quad \text{pour tout réel } x \in \,]0\,,+\infty[.$$

□

Démonstration de la conséquence 51.9.

1. $0 = \ln 1 = \ln(b \times \frac{1}{b}) = \ln b + \ln \frac{1}{b}$ d'où $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$.
2. $\ln \frac{a}{b} = \ln(a \times \frac{1}{b}) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$.
3. Si $p > 0$ alors

$$\ln a^p = \ln(a \times a \times \cdots \times a) = \ln a + \ln a + \cdots + \ln a = p \ln a.$$

   Si $p < 0$ alors

$$\ln a^p = \ln \frac{1}{a^{-p}} = -\ln(a^{-p}) = -(-p)\ln a = p \ln a.$$

4. Voir la section 51.2.6.

□

Démonstration du théorème 51.10. On établie le deuxième résultat. Soit p un entier naturel. On a $\ln 2^p = p \ln 2$. D'où :

$$\lim_{p\to+\infty} \ln 2^p = \lim_{p\to+\infty} p \ln 2 = +\infty.$$

Soit x un nombre réel tel que $x \geq 2^p$. La fonction $\ln$ est strictement croissante, donc $\ln x \geq \ln 2^p$. On passe à la limite :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x \geq \lim_{p\to+\infty} \ln 2^p.$$

Or, $\lim_{p\to+\infty} \ln 2^p = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Le premier résultat en découle simplement par changement de variable :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{1}{x} = -\lim_{x\to+\infty} \ln x = -\infty.$$

□

Démonstration du théorème 51.11. La stricte croissance et la bijectivité ont déjà été établies. En outre, comme

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

et comme la fonction $\ln$ est continue, elle prend toutes les valeurs intermédiaires entre $-\infty$ et $+\infty$. l'intervalle image de $]0\,,+\infty[$ par la fonction $\ln$ est donc $\mathbb{R}$. □

Démonstration du lemme 51.14. On considère la fonction f définie sur $I =]0\,,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln x$. Sa dérivée f' est définie sur I par :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

On a $f'(x) > 0$ si et seulement si $x > 1$ d'où le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
signe de f'	$\|\|$	$-$	0	$+$	
variations de f	$\|\|$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

La fonction f admet un minimum m strictement positif en 1 :

$$m = f(1) = 1 - \ln 0 = 1.$$

Par conséquent, la fonction f est strictement positive pour tout réel x positif, d'où le lemme. □

Démonstration du théorème 51.16. D'après le lemme précédent, on peut écrire, pour tout $x > 0$: $\ln\sqrt{x} < \sqrt{x}$:

$$\frac{1}{2}\ln x < \sqrt{x}$$

et pour $x > 1$, on a :

$$0 < \ln x < 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, on a, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

On en déduit, comme simple conséquence que pour $n \geq 2$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\ln x}{x} = 0$$

car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. On établit maintenant la limite suivante à l'aide du changement de variable du type $X = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to+\infty}\left(-\frac{\ln X}{X}\right) = 0$$

d'après ce qui précède. On en déduit, comme simple conséquence que pour $n \geq 2$:

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = \lim_{x\to 0^+} x^{n-1} x \ln x = 0$$

car $\lim_{x\to 0^+} x^{n-1} = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$. Enfin, pour la dernière limite, on reconnaît l'accroissement moyen de la fonction $\ln$ en $x_0 = 1$ La limite est donc égale au nombre dérivé de la fonction $\ln$ en x_0 soit $\frac{1}{x_0}$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

□

Démonstration du corollaire 51.18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de P. Notons $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$ (avec $a_n \neq 0$). Comme la limite en $+\infty$ d'une fonction polynôme P est égale à la limite de son terme de plus haut degré, nous avons

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{a_n x^n} = 0$$

puisque $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$. □

LEÇON

52 Fonctions exponentielles

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S
Prérequis Fonction logarithme
Références [129]

Contenu de la leçon

1 La fonction exponentielle

Définition 52.1. *Soit a un nombre réel. On appelle solution sur l'intervalle I de l'équation différentielle $Y' = aY$ toute fonction dérivable sur I, qui vérifie sur I : $f' = af$.*

Exemples 52.2.
1. La fonction nulle est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $Y' = 2Y$.
2. Les fonctions constantes sont des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $Y' = 0Y$.

Remarque 52.3. L'équation différentielle $Y' = aY$, notée aussi $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ay$, exprime une proportionnalité entre la fonction et sa dérivée. Elle permet de modéliser de nombreux phénomènes (en physique,...).

Propriété 52.4 (Théorème d'existence). *Il existe une fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle $Y' = Y$ et telle que $f(0) = 1$ que l'on appelle la* fonction exponentielle.

Remarque 52.5. On notera provisoirement la fonction exponentielle $x \mapsto \exp(x)$.

Propriété 52.6. *La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.*

Propriété 52.7. *Soit a un réel donné. Les solutions de l'équation différentielle $Y' = aY$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\exp(ax)$ où k est une constante réelle.*

2 La notation e^x

Propriété 52.8. *Pour tous nombres réels a et b,* $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Propriété 52.9. *Le nombre réel* $\exp(1)$ *se note* e. *On a* $\mathrm{e} \simeq 2,72$ *et, pour tout x élément de $\mathbb{R}$,*

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x.$$

Remarques 52.10. Ainsi $\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ a un sens, c'est l'image de $\sqrt{2}$ par la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$. On a aussi :

$$\mathrm{e}^0 = 1,\ \mathrm{e}^1 = \mathrm{e},\ \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}},\ \mathrm{e}^{1/2} = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

Conséquence 52.11.
1. *Pour tous nombres réels a et b :*
$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b,\ \mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a},\ \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}.$$
2. *Pour tout nombre réel a et tout rationnel r :* $\mathrm{e}^{ra} = (\mathrm{e}^a)^r$.

Exemples 52.12.
1. $\mathrm{e}^{x+1} = \mathrm{e}\mathrm{e}^x$
2. $\mathrm{e}^{x-2} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^2}$
3. $\mathrm{e}^{2x} = (\mathrm{e}^x)^2$
4. $\mathrm{e}^{x/2} = \sqrt{\mathrm{e}^x}$.

Remarque 52.13. Ne pas confondre $\mathrm{e}^{(a^b)}$ et $(\mathrm{e}^a)^b$; ainsi $\mathrm{e}^{x^2} = \exp(x^2)$ alors que $(\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x}$.

3 Étude de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$

D'après sa définition, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est solution de l'équation différentielle $Y' = Y$ et telle que $f(0) = 1$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$, et égale à sa dérivée.

Conséquence 52.14. *1. $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.

Propriété 52.15 (Limites).

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

On obtient le tableau de variations de la fonction $\exp$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
e^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ passe par les points de coordonnées $(0, 1)$ et $(1, \mathrm{e})$.
- La tangente à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ au point de coordonnées $(0, 1)$ a pour équation $y = x + 1$. De plus, pour h « assez petit » : $\mathrm{e}^h \approx 1 + h$.
- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est au dessus de l'axe des abscisses, qui est une droite asymptote.

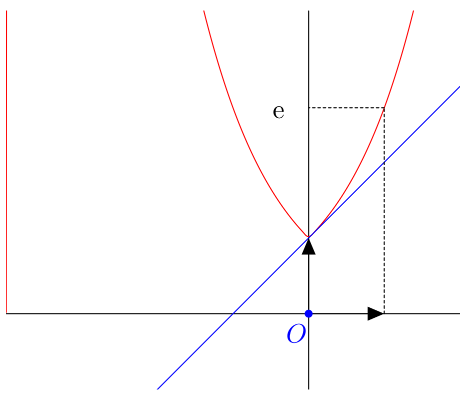


FIGURE 52.1 – Représentation graphique de la fonction exponentielle et de sa tangente en $x = 0$

Conséquence 52.16. *1. Pour tout nombre réel x, $\mathrm{e}^x > 0$.*

2. Pour tous nombres réels x et y : $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y$ équivaut à $x = y$ et $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^y$ équivaut à $x > y$.

Exemples 52.17.

1. $\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{x+1}$ équivaut à $3x = x + 1$.
2. $\mathrm{e}^x \geq 1$ équivaut à $x \geq 0$.
3. $\mathrm{e}^x \leq 1$ équivaut à $x \leq 0$.

Propriété 52.18. *Soit u une fonction définie sur un intervalle I. Si u est dérivable sur I, alors la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est $x \mapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.*

Exemple 52.19. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto \cos x \mathrm{e}^{\sin x}$.

Propriété 52.20 (Limites fondamentales).
1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$,
2. $\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.

Conséquence 52.21. *Pour tout nombre entier n strictement positif :*
1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.
2. $\lim_{x\to-\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$.

Exemples 52.22.
1. Soit $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x^{10}}$,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
2. Soit $g : x \mapsto x^{1000}\mathrm{e}^x$,
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0.$$

Remarque 52.23. Pour les limites en $+\infty$ et et en $-\infty$, on retiendra que « $\exp$ l'emporte sur x ».

Compléments

Démonstration de la propriété 52.6. Soit la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\Phi(x) = \exp(x)\exp(-x).$$
Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\Phi'(x) = \exp'(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp'(-x).$$
Or $\exp' = \exp$ donc $\Phi'(x) = 0$. La fonction Φ est constante sur $\mathbb{R}$ et égale à 1 car $\exp(0) = 1$. Puisque $\exp(x)\exp(-x) = 1$, la fonction $\exp$ ne s'annule jamais.

On démontre, par l'absurde, que la fonction $\exp$ est strictement positive. S'il existait x_0 tel que $\exp(x_0) \leq 0$, alors $\exp$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $\exp$ sur $[0, x_0]$ ou $[x_0, 0]$, on trouverait une solution à l'équation $\exp(x) = 0$. Ceci est faux puisqu'on a montré que $\exp$ ne s'annule jamais, donc x_0 tel que $\exp(x_0) \leq 0$ n'existe pas. □

Démonstration de la propriété 52.7. La fonction $f : x \mapsto k\exp(ax)$, où k est un réel, est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x de $\mathbb{R}$, vérifie
$$f'(x) = ka\exp(ax)$$
soit $f'(x) = af(x)$. Donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $Y' = aY$. Soit g une autre fonction sur $\mathbb{R}$ de $Y' = aY$, donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = ag(x)$. Comme la fonction $\exp$ ne s'annule pas, on peut définir sur $\mathbb{R}$ la fonction $u : x \mapsto \frac{g(x)}{\exp(ax)}$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, après simplification :
$$u'(x) = \frac{g'(x) - ag(x)}{\exp(ax)}.$$
Or $g'(x) = ag(x)$, donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $u'(x) = 0$. u est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\frac{g(x)}{\exp(ax)}$ est constant, soit $g(x) = k\exp(ax)$. □

Démonstration de la propriété 52.8. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \exp(x+b)$ où b est un nombre réel. g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$g'(x) = \exp'(x+b) = \exp(x+b) = g(x)$$

g vérifie l'équation $Y' = Y$. Donc d'après la propriété 52.7, $g(x) = k\exp(x)$. Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$\exp(x+b) = k\exp(x)$$

et pour $x = 0$,

$$\exp(b) = k\exp(0).$$

or $\exp(0) = 1$ donc $k = \exp(b)$ et on a

$$\exp(x+b) = \exp(x)\exp(b).$$

□

Démonstration.

- Tout d'abord, on montre que, pour tout nombre n entier naturel, on a la propriété « Pour tout réel a, $\exp(na) = (\exp(a))^n$ ». La propriété est vraie pour $n = 0$ car, par définition de la fonction $\exp$: $\exp(0) = 1$. Supposons que, pour un entier k, on ait $\exp(ka) = (\exp(a))^k$. Alors, d'après la propriété 52.6, on a :

$$\exp((k+1)a) = \exp(ka + a) = \exp(ka)\exp(a).$$

Donc $\exp((k+1)a) = (\exp(a))^{k+1}$. La propriété est vérifiée pour $n = 0$. Si on la suppose vraie pour $n = k$, alors elle est vraie pour $n = k+1$, et donc par récurrence, elle est vraie pour tout nombre entier $n \geq 0$.

- Par définition, $\exp(1) = \mathrm{e}$ et d'après la propriété 52.6,

$$\exp(1) \times \exp(-1) = \exp(1-1) = 1.$$

Donc $\exp(-1) = \frac{1}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1}$.
Si x est un entier positif, on peut écrire $x = na$ avec $a = 1$ et n entier positif.

$$\exp(x) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n$$

Soit $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.
Si x est un entier négatif, on peut écrire $x = na$ avec $a = -1$ et n entier positif.

$$\exp(x) = \exp(n \times (-1)) = (\exp(-1))^n.$$

Or

$$(\exp(-1))^n = (\mathrm{e}^{-1})^n = \mathrm{e}^{-n}.$$

Soit $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

- Si x est un nombre rationnel, on peut écrire $x = pa$ avec $a = \frac{1}{q}$, q entier strictement positif et p un entier relatif.

$$\exp(qa) = (\exp(a))^q$$

Or $qa = 1$ donc $(\exp(a))^q = \mathrm{e}$. Soit $\exp(a) = \mathrm{e}^{1/q}$.

$$\exp(x) = \exp(pa) = (\exp(a))^p.$$

Soit

$$\exp(x) = \left(\mathrm{e}^{1/q}\right)^p = \mathrm{e}^{p/q} = \mathrm{e}^x.$$

Donc, pour tout x élément de $\mathbb{Q}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

– On admet que l'on peut étendre cette propriété à $\mathbb{R}$ et on convient de noter e^x le nombre $\exp(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

$\square$

Démonstration de la conséquence 52.14. Le premier point découle immédiatement de la définition de la fonction $\exp$. On a $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ et d'après la propriété 52.6, $\exp$ est strictement positive. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable en 0 donc son taux de variation $\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x - 0}$ a pour limite en 0 le nombre dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ en 0, soit :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

$\square$

Démonstration de la propriété 52.15. – Pour étudier la limite en $+\infty$, on montre d'abord que, pour tout x, $\mathrm{e}^x \geq x$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

Comme $\exp$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{e}^0 = 1$, on obtient le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Comme, pour tout x, $f(x) \geq 0$, on a $\mathrm{e}^x \geq x$ et, d'après un des théorèmes « des gendarmes », on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty.$$

– Pour étudier la limite en $-\infty$, on pose $X = -x$ et on a $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-X}$ et

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-X} = +\infty.$$

Comme $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, on a :

$$\lim_{X \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^X} = 0,$$

soit $\lim_{X \to +\infty} \mathrm{e}^{-X} = 0$. Donc :

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

$\square$

Démonstration de la propriété 52.18. D'après le théorème de la dérivée d'une fonction composée, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et u dérivable sur I, $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I de dérivée $x \mapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$. $\square$

Démonstration de la propriété 52.20. Dans la démonstration de la propriété 52.15, on a vu que, pour tout x, $\mathrm{e}^x \geq x$. Donc, pour tout x, $\mathrm{e}^{x/2} \geq \frac{x}{2}$ et, pour tout $x \geq 0$,

$$(\mathrm{e}^{x/2})^2 \geq \left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

soit $\mathrm{e}^x \geq \frac{x^2}{4}$. Or, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{4} = +\infty$. D'après un des « théorèmes des gendarmes », on obtient

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty.$$

On a $x\mathrm{e}^x = \frac{x}{\mathrm{e}^{-x}}$. En posant $X = -x$, on a $x\mathrm{e}^x = -\frac{X}{\mathrm{e}^X}$. Or

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$$

donc

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$$

et, par suite, $\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$. □

Démonstration de la conséquence 52.21.

1. Comme $\mathrm{e}^x > 0$:

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \left(\frac{\mathrm{e}^{x/n}}{x}\right)^n$$

soit

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \left(\frac{\mathrm{e}^{x/n}}{\frac{nx}{n}}\right)^n.$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x/n}}{x/n} = +\infty.$$

En composant avec la fonction puissance, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{x/n}}{n\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty.$$

2. On pose $x = -X$, $x^n\mathrm{e}^x = (-X)^n\mathrm{e}^{-X}$, soit $x^n\mathrm{e}^x = (-1)^n\frac{X^n}{\mathrm{e}^x}$. Donc :

$$\lim_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = \lim_{X\to+\infty} (-1)^n\frac{X^n}{\mathrm{e}^X}.$$

On vient de montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$, donc

$$\lim_{X\to+\infty} (-1)^n\frac{X^n}{\mathrm{e}^X} = 0.$$

D'où : $\lim_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0$.

□

LEÇON

53

Croissance comparée des fonctions réelles $x \to \mathrm{e}^x$, $x \to x^a$ et $x \to \ln x$

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S

Prérequis Fonctions exponentielles et logarithmes, théorème des gendarmes.

Références [130, 131]

Contenu de la leçon

1 Introduction

1 1 Rappel sur les formes indéterminées

Propriété 53.1. *Les formes indéterminées sont de quatre types :*

1. *du type* $\infty - \infty$
2. *du type* $0 \times \infty$
3. *du type* $\frac{\infty}{\infty}$
4. *du type* $\frac{0}{0}$

1 2 Croissance comparée, à quoi ça sert ?

Les croissances comparées permettent de lever ce genre d'indétermination. Elles interviennent quand on calcule une limite :

- d'un rapport ou un produit d'une fonction puissance et un logarithme ;
- d'un rapport ou un produit d'une fonction puissance et une exponentielle.

On établit donc un « rapport de force » entre ces classes de fonctions. On va dire qu'une classe de fonction tend plus au moins rapidement vers l'infini qu'une autre classe de fonction. Du plus fort au plus faible, on a :

- exponentielles ;
- puissances ;
- logarithmes.

Cela se voit encore mieux sur un graphique (voir la figure 53.1).

2 Croissance comparée des fonctions puissances et logarithmes

Théorème 53.2. *1.*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

2.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \qquad \textit{(pour tout } n \in \mathbb{N}^*\textit{)}.$$

3.

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

4.

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0, \qquad \textit{(pour tout } n \in \mathbb{N}^*\textit{)}.$$

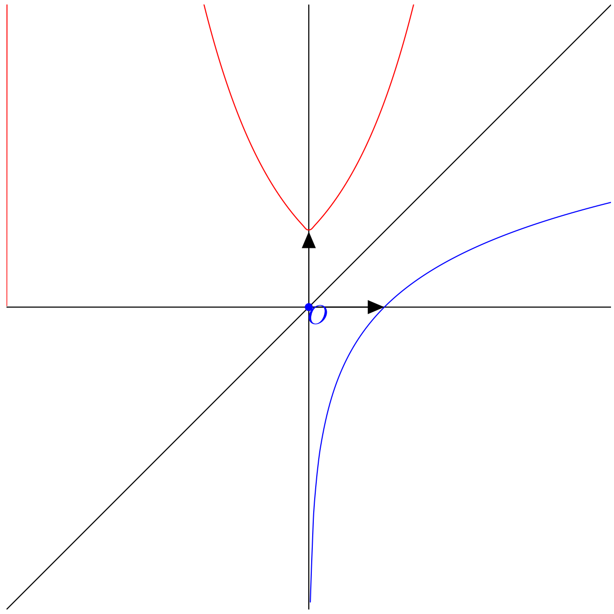


FIGURE 53.1 – Croissances comparées

Corollaire 53.3. *Pour toute fonction polynôme P de degré supérieur ou égal à 1, on a :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0.$$

Exemples 53.4. 1. On veut étudier la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

On a :

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x}.$$

Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

D'où par produit,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0.$$

2. On veut étudier la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

En remarquant que $x = (\sqrt{x})^2$, nous avons :

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{2\ln\sqrt{x}}{x}.$$

En posant $X = \sqrt{x}$ ($X \to +\infty$), nous obtenons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{X\to+\infty} 2\frac{\ln X}{X} = 0.$$

Par un raisonnement analogue, on peut montrer que :

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = 0.$$

3 Croissance comparée des fonctions puissances et exponentielles

Propriété 53.5 (Limites fondamentales). *1.* $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$,

2. $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

Conséquence 53.6. *Pour tout nombre entier n strictement positif :*

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

2. $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

Exemples 53.7. 1. Soit $f : x \mapsto \frac{e^x}{x^{10}}$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Soit $g : x \mapsto x^{1000}e^x$,

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0.$$

Remarque 53.8. Pour les limites en $+\infty$ et et en $-\infty$, on retiendra que « $\exp$ l'emporte sur x ».

4 D'autres exemples

Exemples 53.9. 1. Soit à calculer

$$\lim_{x\to+\infty} e^x + x^2 + 1.$$

Ici, nous n'avons pas besoin des croissances comparées pour déterminer la limite car :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty} e^x + x^2 + 1 = +\infty.$$

2. Soit à calculer

$$\lim_{x\to+\infty} e^x - x^2.$$

Ici, on tombe sur une forme indéterminée du type $\infty - \infty$. On remarque alors que :

$$e^x - x^2 = e^x\left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right)$$

Or, par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$, ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} e^x - x^2 = +\infty.$$

3. Soit à calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) - x^2 + 2x + 1.$$

Ici, on tombe sur une forme indéterminée du type $\infty - \infty$. On remarque alors que :

$$\ln(x) - x^2 + 2x + 1 = x^2\left(\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right).$$

Or, par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) - x^2 + 2x + 1 = -\infty.$$

4. Soit à calculer

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} \mathrm{e}^{1/x}.$$

On rencontre donc une forme indéterminée du type $+\infty \times 0$. On pose $u = \frac{1}{x}$, on a donc

$$\frac{1}{x^2} \mathrm{e}^{1/x} = u^2 \mathrm{e}^u.$$

On a

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

et, par croissances comparées, $\lim_{u \to -\infty} u^2 \mathrm{e}^u = 0$. Donc, par composition :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} \mathrm{e}^{1/x} = 0.$$

5 Applications

5 1 Branches infinies des courbes des fonctions $\ln$ et $\exp$

Propriété 53.10. *Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les courbes représentatives des fonctions $\ln$ et $\exp$ admettent des branches paraboliques de directions respectives $(O, \vec{\imath})$ et $(O, \vec{\jmath})$.*

5 2 Détermination de limites

Exemples 53.11. 1. Soit à calculer

$$\lim_{x \to 0^+} x^x.$$

Comme $x > 0$, on peut écrire :

$$x^x = \mathrm{e}^{x \ln x}$$

Or, par croissances comparées :

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0.$$

Donc, par composition

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 1.$$

2. Soit à calculer

$$\lim_{x \to +\infty} (\ln x)^{(\ln x)^{-\alpha}}, \quad \text{avec } \alpha > 0.$$

On a tout d'abord :

$$\ln(x)^{-\alpha} = \mathrm{e}^{-\alpha \ln(\ln(x))}$$

et ainsi :

$$(\ln(x))^{(\ln x)^{-\alpha}} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-\alpha \ln(\ln(x))} \ln(\ln(x))}$$

Or, pour $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} -\alpha \ln \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(\ln(x)) = +\infty$$

mais par croissances comparées, « l'exponentielle l'emporte sur le logarithme » donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-\alpha \ln(\ln(x))} \ln(\ln(x)) = 0$$

et par composition

$$\lim_{x \to +\infty} (\ln(x))^{(\ln(x))^{-\alpha}} = 1.$$

3. On considère la fonction définie sur $[0\,,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On veut étudier la dérivabilité de f en 0 et 1. On a :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0,$$

d'où

$$\lim_{x \to +\infty} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) = 1$$

et

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty,$$

d'où

$$\lim_{x \to 1^-} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) = 0.$$

Donc f est continue sur $[0\,,1]$, de plus elle est dérivable sur $]0\,,1[$ avec :

$$f'(x) = \frac{-1}{x(\ln x)^2} \exp\left(\frac{1}{lnx}\right).$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty,$$

donc f est non dérivable en 0. Puisque $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty$ alors,

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{-1}{(\ln x)^2} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) = 0$$

d'où $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = 0$, elle est donc dérivable à gauche en 1.

5 3 Une intégrale convergente

On considère l'intégrale (dépendant de x) :

$$\varphi(h) := \int_1^h t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t.$$

On montre que φ admet une limite finie en $+\infty$. Pour tout réel x fixé, $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est équivalent en $+\infty$ à $t \mapsto \frac{1}{t^2}$. On en déduit qu'il existe un réel $A > 1$ tel que pour tout $h > A$ on ait

$$0 \leq \varphi(h) \leq \int_A^h t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t \leq \int_A^h \frac{1}{t^2} \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{h} + \frac{1}{A} \leq \frac{1}{A}.$$

Donc φ est uniformément bornée, d'où le résultat.

Démonstration du théorème 53.2. On peut écrire, pour tout $x > 0$: $\ln \sqrt{x} < \sqrt{x}$:

$$\frac{1}{2} \ln x < \sqrt{x}$$

et pour $x > 1$, on a :

$$0 < \ln x < 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Comme $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, on a, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

On en déduit, comme simple conséquence que pour $n \geq 2$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\ln x}{x} = 0$$

car $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. On établit maintenant la limite suivante à l'aide du changement de variable du type $X = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{X} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X \to +\infty} \left(-\frac{\ln X}{X}\right) = 0$$

d'après ce qui précède. On en déduit, comme simple conséquence que pour $n \geq 2$:

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = \lim_{x \to 0^+} x^{n-1} x \ln x = 0$$

car $\lim_{x \to 0^+} x^{n-1} = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$. Enfin, pour la dernière limite, on reconnaît l'accroissement moyen de la fonction $\ln$ en $x_0 = 1$ La limite est donc égale au nombre dérivé de la fonction $\ln$ en x_0 soit $\frac{1}{x_0}$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

□

Démonstration du corollaire 53.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de P. Notons $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$ (avec $a_n \neq 0$). Comme la limite en $+\infty$ d'une fonction polynôme P est égale à la limite de son terme de plus haut degré, nous avons

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{a_n x^n} = 0$$

puisque $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$. □

Démonstration de la propriété 53.5. On a vu que, pour tout x, $\mathrm{e}^x \geq x$. Donc, pour tout x, $\mathrm{e}^{x/2} \geq \frac{x}{2}$ et, pour tout $x \geq 0$,

$$(\mathrm{e}^{x/2})^2 \geq \left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

soit $\mathrm{e}^x \geq \frac{x^2}{4}$. Or, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{4} = +\infty$. D'après un des « théorèmes des gendarmes », on obtient

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty.$$

On a $xe^x = \frac{x}{e^{-x}}$. En posant $X = -x$, on a $xe^x = -\frac{X}{e^X}$. Or

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$$

donc

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$$

et, par suite, $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$. □

Démonstration de la conséquence 53.6. 1. Comme $e^x > 0$:

$$\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{x/n}}{x}\right)^n$$

soit

$$\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{x/n}}{\frac{nx}{n}}\right)^n.$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x/n}}{x/n} = +\infty.$$

En composant avec la fonction puissance, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{x/n}}{n\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

2. On pose $x = -X$, $x^n e^x = (-X)^n e^{-X}$, soit $x^n e^x = (-1)^n \frac{X^n}{e^x}$. Donc :

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim_{X\to+\infty} (-1)^n \frac{X^n}{e^X}.$$

On vient de montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, donc

$$\lim_{X\to+\infty} (-1)^n \frac{X^n}{e^X} = 0.$$

D'où : $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

□

Démonstration de la propriété 53.10. En effet,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

□

LEÇON

54 Courbes planes définies par des équations paramétriques

Niveau, prérequis, références

Niveau BTS

Prérequis Fonctions, fonction dérivables, limites

Références [132, 133]

Contenu de la leçon

1 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}^2$

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On pose $\operatorname{Re} f = u$ et $\operatorname{Im} f = v$. Les fonctions u et v ainsi définies sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a, pour tout t dans I :

$$f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t).$$

Toute fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, est ainsi associée à deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On note $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples de nombres réels

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$. la donnée d'une telle fonction f revient à la donnée de deux fonctions u et v, définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que, pour tout t dans I :

$$f(t) = (u(t), v(t)).$$

Dans $\mathbb{R}^2$, les règles de calcul sont les suivantes :

– la somme de deux couples est définie par :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

– la produit d'un couple par un nombre réel est définie par :

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Ces règles sont celles utilisées pour les coordonnées des vecteurs du plan depuis la classe de seconde. Ce qui a été énoncé concernant la continuité et la dérivabilité, dans le chapitre consacré au calcul différentiel et intégral s'applique aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, comme à celles à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 54.1 (Dérivabilité)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ (respectivement $f : I \to \mathbb{R}^2$). On dit que f est* dérivable *en $t_0 \in I$ lorsque*[a]

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(t_0 + h) - f(t_0))$$

existe et est un élément de $\mathbb{C}$ (respectivement un élément de $\mathbb{R}^2$).

a. La fraction $\frac{1}{h}$ n'étant pas définie pour $h = 0$, on ne prendra pas la précaution de signaler que les limites ci-après sont calculées pour $h \neq 0$

Définition 54.2 (Dérivée)**.** *On suppose que $f : I \to \mathbb{C}$ (respectivement $f : I \to \mathbb{R}^2$) est dérivable en $t_0 \in I$. La dérivée de f en $t_0 \in I$, notée $f'(t_0)$ est définie par :*

$$f'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(t_0 + h) - f(t_0)).$$

Théorème 54.3. *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ (respectivement $f : I \to \mathbb{R}^2$). Soient $u : I \to \mathbb{R}$ et $v : I \to \mathbb{R}$ telles que $f = u + \mathrm{i}v$ (respectivement $f = (u, v)$). f est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si u et v le sont, et dans ce cas :*

$$f'(t_0) = u'(t_0) + \mathrm{i}v'(t_0) \quad \textit{(respectivement } f'(t_0) = (u'(t_0), v'(t_0))\textit{)}.$$

Définition 54.4 (Fonction de classe $\mathcal{C}^n$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$ (respectivement, dans $\mathbb{R}^2$). On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I lorsque f est n fois dérivable sur I et lorsque la dérivée n^e de f est continue sur I.*

Théorème 54.5. *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ (respectivement $f : I \to \mathbb{R}^2$). Soient u et v les fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que $f + u + \mathrm{i}v$ (respectivement $f = (u, v)$). f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si et seulement si u et v sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Lorsque f est $\mathcal{C}^n$ sur I, pour tout tout entier k, $0 \leq k \leq n$,*

$$f^{(k)} = u^{(k)} + \mathrm{i}v^{(k)} \qquad \textit{(respectivement } f^{(k)} = (u^{(k)}, v^{(k)})\textit{)}.$$

On peut démontrer ce théorème par récurrence sur l'ordre de la dérivée, en utilisant ce qui a été prouvé pour la dérivée.

Définition 54.6 (Fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$)**.** *Soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$ (respectivement dans $\mathbb{R}^2$). On dit que f est* de classe $\mathcal{C}^\infty$ *sur I lorsque f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.*

2 Courbes paramètres : paramétrisation cartésienne

Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 54.7 (Fonction vectorielle)**.** *Soient u et v des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit alors que la fonction $\vec{f}$ définie pour tout t dans I par :*

$$\vec{f}(t) = u(t)\vec{\imath} + v(t)\vec{\jmath}$$

est une fonction vectorielle.

On constate à la lecture de cette définition qu'à toute fonction vectorielle correspond une unique fonction $f : I \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout t dans I, $f(t)$ est l'affixe du vecteur $\vec{f}(t)$. De même, qu'à chaque fonction vectorielle définie sur I, correspond une unique fonction $f : I \to \mathbb{R}^2$, telle que, pour tout t dans I, $f(t)$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{f}(t)$. Cette définition est donnée ici car elle figure dans certains sujets de BTS. Elle permet aussi de définir la notion de courbe paramétrée. Cependant, on pourrait définir la notion de courbe paramétrée sans faire explicitement référence aux fonctions à valeurs vectorielles.

Définition 54.8 (Courbe paramétrée (paramétrisation cartésienne))**.** *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ (respectivement $f : I \to \mathbb{R}^2$) une fonction de classe au moins $\mathcal{C}^0$ sur I. Soit $\vec{f}$ la fonction vectorielle définie sur I, telle que pour tout t dans I, $\vec{f}(t)$ a pour affixe $f(t)$ (respectivement $\vec{f}(t)$ a pour coordonnées $f(t)$). Le sous ensemble Γ de $\mathcal{P}$ défini par :*

$$\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathcal{P},\ \exists t \in I,\ \overrightarrow{OM(t)} = \vec{f}(t) \right\}$$

est une courbe paramétrée.

Définition 54.9 (Vecteur position)**.** *Avec les notations de la définition 54.8, le vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$ est appelé* vecteur position.

Définition 54.10. *Avec les notations de la définition précédente, f est une paramétrisation cartésienne de la courbe paramétrée Γ.*

- Les coures représentatives des fonctions continues et à valeurs réels sont des courbes paramétrées. En effet, considérons $g : I \to \mathbb{R}$ continue. Alors, la courbe Γ représentative de g dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points $M(t)$, $t \in I$, du plan dont les coordonnées sont, pour tout t dans I : $(t, g(t))$. Posons alors $f : I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, g(t))$. f est une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. f est une paramétrisation de Γ.
- Tout cercle est une courbe paramétrée. Soit C le cercle de centre Ω et de rayon R. Notons (x_Ω, y_Ω) les coordonnées de Ω. Soit $f : [0\,, 2\pi[\to \mathbb{C}$ définie par :
$$f(t) = x_\Omega + \mathrm{i} y_\Omega + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.$$
f est une paramétrisation de C. On remarquera que $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x_\Omega + \mathrm{i}y_\Omega + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t}$, est une paramétrisation différente du même cercle C.

Exemple 54.11. Γ de paramétrisation
$$\begin{array}{rcccl} f & : & [-\pi\,, \pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \mapsto & (\sin t + \cos 2t, \cos t + \sin 2t) \end{array}$$

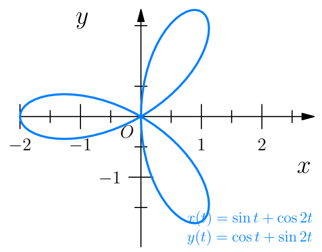


FIGURE 54.1 – Représentation graphique de Γ

Définition 54.12 (Point régulier)**.** *Soit f une paramétrisation de la courbe Γ. Soit $P_0 \in \Gamma$ d'affixe (de coordonnées) $f(t_0)$. On dit que P_0 est un point régulier, dans la paramétrisation de f, lorsque $f'(t_0) \neq 0$, ($f'(t_0) \neq (0,0)$), f' désignant la dérivée de f.*

Définition 54.13 (Tangente à une courbe paramétrée)**.** *Soir $f : I \to \mathbb{C}$ (respectivement $f : I \to \mathbb{R}^2$) de classe au moins $\mathcal{C}^1$ sur I. Soit Γ la courbe du plan paramétrée par f. Soit $t_0 \in I$. Soit P_0 le point régulier de Γ, dans la paramétrisation f, d'affixe (resp. de coordonnées) $f(t_0)$. Soit $\overrightarrow{V_0}$ le vecteur d'affixe (resp. de coordonnées) $f'(t_0)$. La* tangente à Γ en P_0 *est la droite D_0 passant par P_0 et de vecteur directeur $\overrightarrow{V_0}$.*

Cette notion correspond à la notion habituelle de tangente lorsque la courbe Γ est la courbe représentative d'une fonction. En effet, si Γ est la courbe représentative de la fonction φ, $f : t \mapsto t + \mathrm{i}\varphi(t)$ est une paramétrisation de Γ. On a alors $f' = 1 + \mathrm{i}\varphi'$. Un vecteur directeur d'affixe $1 + \mathrm{i}\varphi'$ correspond à un coefficient directeur de tangente égal à φ'.

Théorème 54.14. *Soient u et v des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction vectorielle $\vec{f} = u\vec{\imath} + v\vec{\jmath}$ est de classe $\mathcal{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$ ou $n = +\infty$, si et seulement si les fonctions u et v le sont. Lorsque $\vec{f}$ est $\mathcal{C}^n$, on a pour tout entier k tel que $k \leq n$,*
$$\vec{f}^{(k)} = u^{(k)}\vec{\imath} + v^{(k)}\vec{\jmath}.$$

Remarque 54.15. Le vecteur $\overrightarrow{V_0}$ de la définition 54.13 est égal à $\vec{f}'(t_0)$, si $\vec{f}$ est la fonction à valeurs vectorielles associée[1] à f.

Définition 54.16 (Vecteur vitesse)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ (resp. $f : I \to \mathbb{R}^2$) une paramétrisation cartésienne de la courbe Γ. On suppose f au moins $\mathcal{C}^1$ sur I. Pour tout t dans I, le vecteur $\overrightarrow{V(t)}$ d'affixe (resp. de coordonnées) $f'(t)$ est appelé* vecteur vitesse au point de paramètre t.

1. ≪ associée ≫ signifie : $\vec{f}(t)$ a pour coordonnées, pour affixe, $f(t)$, quel que soit t dans I.

3 Courbe paramétrée : paramétrisation polaire

Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 54.17 (Courbe paramétrée (paramétrisation polaire))**.** *Soient $\rho : I \to [0\,,+\infty[$ et $\theta : I \to \mathbb{R}$. Soit*

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)} \end{array}.$$

On suppose que f est de classe au moins $\mathcal{C}^0$. Alors, le sous-ensemble Γ de $\mathcal{P}$ défini par :

$$\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathcal{P},\ \exists t \in I,\ \overrightarrow{OM(t)} = \rho(t)(\cos(\theta(t))\vec{\imath} + \sin(\theta(t))\vec{\jmath}) \right\}$$

est une courbe paramétrée.

Définition 54.18 (Vecteur position)**.** *Avec les notations de la définition 54.17, le vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$ est appelé* vecteur position.

Définition 54.19 (Paramétrisation polaire)**.** *Avec les notations de la définition 54.17, on dit que f est une paramétrisation* polaire *de Γ.*

Exemple 54.20. Soient ρ et θ les fonctions définies sur $[0\,,2\pi]$ par $\rho(t) = 1 + \cos t$ et $\theta(t) = t$. La courbe de paramétrisation polaire $f = \rho \exp(\mathrm{i}\theta)$ est appelée *cardioïde*.

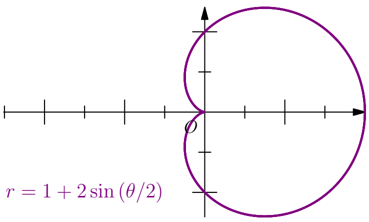


FIGURE 54.2 – Cardioïde

Théorème 54.21. *Soient $\rho : I \to [0\,,+\infty[$ et $\theta : I \to \mathbb{R}$. Soit*

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \rho(t)\exp(\mathrm{i}\theta(t)). \end{array}$$

On suppose f dérivable en $t_0 \in I$. Alors :

$$f'(t_0) = \rho'(t_0)\exp(\mathrm{i}\theta(t_0)) + \mathrm{i}\rho(t_0)\theta'(t_0)\exp(\mathrm{i}\theta(t_0)).$$

Pour la démonstration, il suffit d'utiliser la formule de dérivation d'un produit, ainsi que celle de dérivations des fonctions composées.

Théorème 54.22. *Soient $\rho : I \to [0\,,+\infty[$ et $\theta : I \to \mathbb{R}$. Soit :*

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \rho(t)\exp(\mathrm{i}\theta(t)) \end{array}$$

f est de classe $\mathcal{C}^n$ si et seulement si ρ et θ le sont.

La démonstration se fait par récurrence sur l'entier n, et elle utilise la dérivation d'un produit ainsi que la dérivation des fonctions composées.

Définition 54.23 (Tangente à une courbe paramétrée)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ (respectivement $f : I \to \mathbb{R}^2$) de classe au moins $\mathcal{C}^1$ sur I. Soit Γ la courbe du plan paramétrée par f. Soit $t_0 \in I$. Soit P_0 le point régulier de Γ, dans la paramétrisation f, d'affixe (resp. de coordonnées) $f(t_0)$. Soit $\overrightarrow{V_0}$ le vecteur d'affixe (resp. de coordonnées) $f'(t_0)$. La* tangente à Γ en P_0 *est la droite D_0 passant par P_0 et de vecteur directeur $\overrightarrow{V_0}$.*

Définition 54.24 (Vecteur vitesse)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ (resp. $f : I \to \mathbb{R}^2$) une paramétrisation cartésienne de la courbe Γ. On suppose f au moins $\mathcal{C}^1$ sur I. Pour tout t dans I, le vecteur $\overrightarrow{V(t)}$ d'affixe (resp. de coordonnées) $f'(t)$ est appelé* vecteur vitesse au point de paramètre *t.*

Remarque 54.25. Le théorème 54.21 permet de donner les coordonnées du vecteur vitesse dans un repère appelé *le repère mobile des coordonnées polaires*. En effet, posons pour tout t dans I :

$$\overrightarrow{u_{\theta(t)}} = \cos(\theta(t))\overrightarrow{\imath} + \sin(\theta(t))\overrightarrow{\jmath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v_{\theta(t)}} = -\sin(\theta(t))\overrightarrow{\imath} + \cos(\theta(t))\overrightarrow{\jmath}.$$

Pour tout t dans I, ces deux vecteurs forment un repère orthonormé (direct) [2]. On a alors

$$\overrightarrow{OM(t)} = \rho(t)\overrightarrow{u_{\theta(t)}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V(t)} = \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{OM(t)}) = \rho'(t)\overrightarrow{u_{\theta(t)}} + \rho(t)\theta'(t)\overrightarrow{v_{\theta(t)}}.$$

On remarque qu'en un point régulier où ρ' s'annule, le vecteur vitesse (qui dirige la tangente) est orthogonal au vecteur position.

4 Etude de courbes paramétrées

Exemple 54.26. Soit Γ la courbe du plan dont f est une paramétrisation. On donne :

$$f : \begin{array}{ccl} [-\pi\,,\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin 2t) \end{array}.$$

On remarque que $(x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(t))$, ce qui, compte tenu de l'intervalle dans lequel varie t, permet d'affirmer que Γ admet l'axe des abscisses comme axe de symétrie. L'intervalle d'étude peut donc être réduit à $[0\,,\pi]$.

Soit $t \in [0, \pi/2]$. on a

$$\cos(\pi - t) = -\cos t \quad \text{et} \quad \sin(2(\pi - t)) = -\sin 2t.$$

Lorsque t parcourt $[0, \pi/2]$, $\pi - t$ parcourt $[\pi/2, \pi]$. Γ admet donc l'origine O du repère comme centre de symétrie. L'intervalle d'étude peut donc être une nouvelle fois réduit. On étudiera f sur $[0, \pi/2]$.

On a :

$$x'(t) = -\sin t \quad \text{et} \quad y'(t) = 2\cos 2t.$$

Une rapide étude des signes respectifs de x' et de y' permet d'établir le tableau suivant :

t	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$x'(t)$	0	$-$		$-$	
$x(t)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0

t	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

De façon analogue à ce qui est pratiqué pour la courbe représentative d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, il faut faire apparaître sur le graphique les tangentes parallèles aux axes. Rappelons que

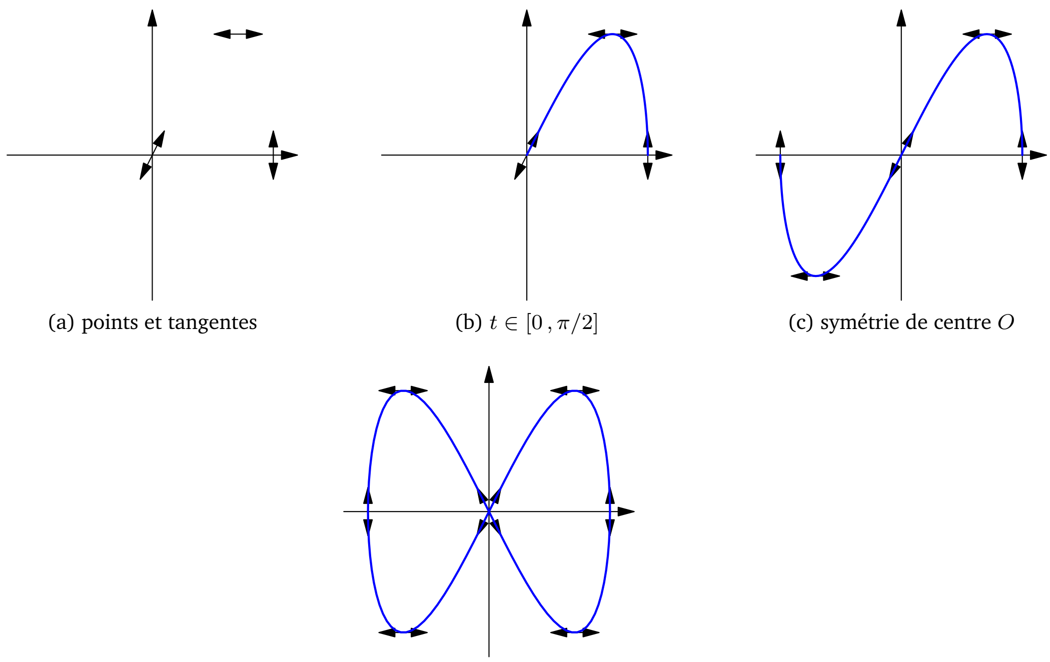
2. Les deux vecteurs sont clairement de norme 1. Ils forment un angle de $\frac{\pi}{2}$ radians car $\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin\alpha$ et $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos\alpha$, quel que soit α dans $\mathbb{R}$.

tout vecteur de coordonnées $(a, 0)$, avec $a \neq 0$, est un vecteur directeur de l'axe des abscisses, et que tout vecteur de coordonnées $(0, b)$, avec $b \neq 0$ est un vecteur directeur de l'axe des ordonnées.

Le point correspondant à la valeur $\pi/2$ du paramètre est l'origine du repère. En ce point, la tangente est dirigée par le vecteur de coordonnées

$$(x'(\pi/2), y'(\pi/2)) = (-1, -2).$$

Le tracé de Γ s'effectue donc comme sur la figure 54.3



(a) points et tangentes

(b) $t \in [0\,, \pi/2]$

(c) symétrie de centre O

(d) réflexion d'axe (Ox)

FIGURE 54.3 – Construction de la courbe paramétrée $t \mapsto (\cos t, \sin 2t)$

5 Un exercice niveau BTS

Exercice 54.27. On considère la courbe (Γ) définie par la représentation graphique :

$$\begin{cases} x = f(t) = \cos(2t) - 2\cos(t) \\ y = g(t) = \sin(2t) - 2\sin(t) \end{cases}$$

où t est un réel appartenant à l'intervalle $[-\pi\,, \pi]$.

1. Montrer que la courbe (Γ) admet un axe de symétrie en calculant $f(-t)$ et $g(-t)$.
2. (a) Calculer $f'(t)$.
   (b) Etablir le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0\,, \pi]$, en déduire les variations de f sur $[0, \pi]$.
3. (a) Calculer $g'(t)$.
   (b) Déterminer le signe $g'(t)$ sur l'intervalle $[0\,, \pi]$, en déduire les variations de g sur $[0\,, \pi]$.
4. Dresser sur l'intervalle $[0, \pi]$ le tableau de variations conjointes des fonctions f et g.
5. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe (Γ) aux points B, C et D de paramètres

$$t_B = \frac{\pi}{3},\ t_C = \frac{2\pi}{3} \quad \text{et} \quad t_D = \pi.$$

6. Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm. Tracer les tangentes aux points A, B, C et D puis la courbe (Γ). *On admet que la tangente à la courbe* (Γ) *au point* A *de paramètre* $t_A = 0$ *a pour vecteur directeur* $\vec{\imath}$.

Compléments

1 Démonstration du cours

Démonstration du théorème 54.3. Soient $t_0 \in I$ et h un nombre réel différent de 0 tel que $t_0+h \in I$. On sait que, par définition,

$$f'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}.$$

Or,

$$\frac{1}{h}(f(t_0+h) - f(t_0)) = \frac{1}{h}(u(t_0+h) - u(t_0)) + \mathrm{i}\left(\frac{1}{h}(v(t_0+h) - v(t_0))\right)$$

(respectivement :

$$\frac{1}{h}(f(t_0+h) - f(t_0)) = \left(\frac{1}{h}(u(t_0+h) - u(t_0)), \frac{1}{h}(v(t_0+h) - v(t_0))\right).)$$

D'où le résultat. □

2 Correction de l'exercice

Solutions de l'exercice 54.27. 1.

$$\begin{cases} f(-t) = \cos(-2t) - 2\cos(-t) = \cos(2t) - 2\cos t = f(t) \\ g(-t) = \sin(-2t) - 2\sin(-t) = -\sin(2t) + 2\sin t = -g(t) \end{cases}$$

Les points $M(t)$ et $M(-t)$ ont pour coordonnées respectives :

$$(f(t), g(t)) \quad \text{et} \quad (f(t), -g(t)).$$

On constate que les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses pour tout $t \in [-\pi, \pi]$. (Γ) admet l'axe des abscisses pour symétrie. On pourra donc étudier les fonctions f et g sur l'intervalle $[0, \pi]$ et compléter le graphique par symétrie.

2. (a) f est dérivable sur $[0, \pi]$ et sa dérivée est définie par :

$$f'(t) = -2\sin(2t) + 2\sin t.$$

On connaît la formule

$$\sin(2t) = 2\sin t \cos t.$$

donc

$$f'(t) = -4\sin t \cos + 2\sin t \Leftrightarrow f'(t) = 2\sin t[1 - 2\cos t].$$

(b) Sur $[0, \pi]$, $\sin t \geq 0$ donc $f'(t)$ est du signe de $1 - 2\cos t$. Dans l'intervalle $[0, \pi]$, la fonction cosinus est décroissante.

$$1 - 2\cos t \geq 0 \Leftrightarrow \cos t \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leq t \leq \pi.$$

Sur $[0, \pi/3]$, $f'(t) \leq 0$; f décroît et sur $[\pi/3, \pi]$, $f'(t) \geq 0$, f croît.

3. (a) g est dérivable sur $[0\,,\pi]$ et sa dérivée vérifie :

$$g'(t) = 2\cos 2t - 2\cos t,$$

on applique la formule $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$:

$$g'(t) = 2(2\cos^2 t - 1) - 2\cos t = 2(2\cos^2 t - \cos t - 1).$$

La dérivée s'annule si $\cos t = 1$, on peut factoriser $g'(t)$ par $\cos(t) - 1$:

$$g'(t) = 2(\cos(t) - 1)(2\cos(t) + 1).$$

(b) Sachant que $-1 \leq \cos t \leq 1$, on en déduit $\cos t - 1 \leq 0$ donc $g'(t)$ est du signe contraire à celui de $2\cos t + 1$.

$$g'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 2\cos t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \cos t \leq -\frac{1}{2}.$$

Dans l'intervalle $[0\,,\pi]$, la fonction cosinus est décroissante, l'inéquation se traduit par $t \geq \frac{2\pi}{3}$ donc sur $[0\,,\pi]$:
– si $t \in [2\pi/3, \pi]$, $g'(t) \geq 0$, g croît
– si $t \in [0\,, 2\pi/3]$, $g'(t) \leq 0$, g décroît.

4. On peut dresser les tableaux de variations de f et g sur $[0\,,\pi]$:

t	0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	$2\sqrt{3}$	$+$	0
$f(t)$	$-1/2$	$\searrow$	$-3/2$	$\nearrow$	$1/2$	$\nearrow$	3
Points	A		B		C		D

t	0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
$g'(t)$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$	4
$g(t)$	0	$\searrow$	$\sqrt{3}/2$	$\searrow$	$-3\sqrt{3}/2$	$\nearrow$	0
Points	A		B		C		D

5. Aux points B et D correspondant respectivement à $t = \frac{\pi}{3}$ et $t = \pi$, la dérivée de f s'annule mais pas la dérivée de g, en chacun de ces points la tangente admet pour vecteur directeur $\vec{\jmath}$. En B et D, la tangente à (Γ) est parallèle à l'axe des ordonnées. Au point C correspondant à $t = \frac{2\pi}{3}$, la dérivée de g s'annule mais pas celle de f. La tangente en C à la courbe admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{\imath}$. En C la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

6. L'étude précédente permet de tracer l'arc de courbe correspondant à l'intervalle $[0\,,\pi]$. La symétrie par rapport à l'axe des abscisses permettra de tracer la courbe (Γ) en entier. On a admis, dans le texte, que la tangente en A est confondue avec l'axe des abscisses.

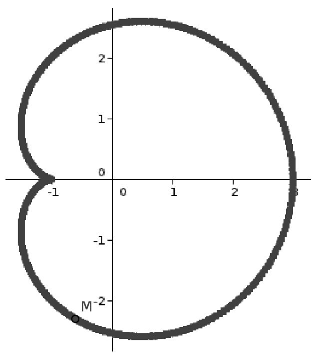


FIGURE 54.4 – Représentation graphique de Γ

$\square$

3 Tracer des courbes paramétrées sur ordinateur

On veut tracer la courbe (Γ) définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f(t) = \cos(2t) - 2\cos t \\ y = g(t) = \sin(2t) - 2\sin t \end{cases}$$

où t est un réel appartenant à l'intervalle $[-\pi\,,\pi]$.

3 1 Geogebra

Tout d'abord, il faut créer un curseur de paramètre t qui va de -1.57 à 1.57 avec incrémentation à 0.01. Ensuite, on construit $M(t)$ qui sera un point de (Γ), par l'instruction suivante :

```
M = (cos(2t)-2cos(t),sin(2t)-2sin(t))
```

On accède aux propriétés de la figure avec les combinaisons de touche CTRL + E . Pour le nombre t, on peut l'animer, on voit alors le point M bouger. Pour qu'il décrive une belle courbe de points, on peut, dans l'option du point M, « Afficher la trace ».

3 2 Xcas

Sur le logiciel XCAS, on peut taper cette commande pour tracer la courbe paramétrée :

```
plotparam(cos(2*t)-2*cos(t)+i(sin(2*t)-2*sin(t)),t,-pi,pi)
```

LEÇON

55 Intégrales, primitives

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S

Prérequis Fonctions dérivées, étude de fonctions, fonctions exponentielles et logarithmes.

Références [134]

Contenu de la leçon

1 Primitives d'une fonction

1.1 Définitions et propriétés

Définition 55.1 (Primitive d'une fonction). *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle* primitive *de f sur I, une fonction F, dérivable sur I, telle que, pour tout x appartient à I, $F'(x) = f(x)$.*

Exemples 55.2.
1. $F : x \mapsto \frac{1}{4}x^4$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto x^3$ puisque $F'(x) = f(x)$.
2. $F : x \mapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive sur $]0\,,+\infty[$ de $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ puisque sur $F'(x) = f(x)$.

Théorème 55.3. *Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.*

Exemple 55.4. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (puisqu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$), donc elle admet des primitives.

Propriété 55.5. *Soit F une primitive de f sur un intervalle I.*
- *Pour tout nombre k, $x \mapsto F(x) + k$ est aussi une primitive de f sur I.*
- *Si G est une autre primitive de f sur I, alors il existe un nombre k tel que, pour tout x de I, $G(x) = F(x) + k$.*

Exemple 55.6. La fonction $x \mapsto \sin^2 x$ est une primitive de $f : x \mapsto 2\sin x \cos x$.
Les fonctions $x \mapsto \sin^2 x + \sqrt{2}$, $x \mapsto \sin^2 x - 1$, $x \mapsto -\cos^2 x\ldots$ sont aussi des primitives de f.

Propriété 55.7. *Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I. Un réel x_0 de I et un réel y_0 étant données (appelés « conditions initiales »), il existe une* unique *primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.*

Pour une représentation graphique des primitives :
- les courbes de primitives de la fonction f sur I se déduisent l'une de l'autre par des translations de vecteur $\vec{v}(0, k)$.
- Pour tout point $A(x_0, y_0)$ avec $x_0 \in I$ (situé dans la bande), il existe une primitive unique dont la courbe représentative passa par A.

1.2 Tableaux de primitives et opérations sur les primitives

Les résultats du tableau 55.1 s'établissent en vérifiant que l'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

On considère dans le tableau 55.2 des fonctions u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I.

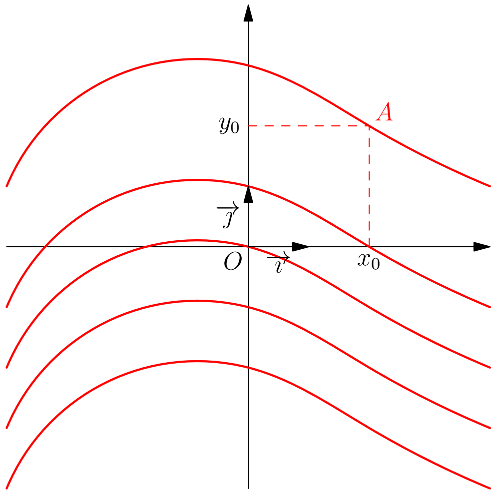


FIGURE 55.1 – Représentation de primitives d'une fonction

Fonction f	Fonction primitive F ($c =$ constante)	Intervalle I
$f(x) = k$	$F(x) = kx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$F(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$ et $n = -1$)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n > 0\,; \\ ]-\infty\,,0[\text{ ou }]0\,,+\infty[& \text{si } n \leq -2 \end{cases}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$]0\,,+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$	$]-\infty\,,0[$ ou $]0\,,+\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c$	$]\frac{\pi}{2} + k\pi\,, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$)
$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ ($\omega \neq 0$)	$F(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) + c$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ ($\omega \neq 0$)	$F(t) = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) + c$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$	$]0\,,+\infty[$

TABLE 55.1 – Tableau des primitives usuelles

Fonction	Une primitive	Conditions
$u' + v'$	$u + v$	
ku' (k constante)	ku	
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$u \neq 0$ sur I si $n \leq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\frac{v'}{v^2}$	$-\frac{1}{v}$	$v \neq 0$ sur I
$u'\mathrm{e}^u$	e^u	
$\frac{u'}{u}$	$\begin{cases} \ln u \\ \ln(-u) \end{cases}$	$\begin{cases} \text{si } u > 0 \text{ sur } I \\ \text{si } u < 0 \text{ sur } I \end{cases}$
$u'(v' \circ u)$	$v \circ u$	

TABLE 55.2 – Opérations sur les primitives

2 Intégrale et aire

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, non nécessairement orthonormal.

Définition 55.8 (Aire sous la courbe)**.** *Soit une fonction f, continue et positive sur un intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.* L'aire sous la courbe *$\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,,b]$ est l'aire du domaine plan $\mathcal{D}$ limité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ cette aire et on lit* l'intégrale *(ou somme) de a à b de f.*

Remarques 55.9.

1. Le domaine $\mathcal{D}$ peut aussi être considéré comme l'ensemble des points M du plan de coordonées (x, y) telles que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$.
2. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est exprimée en unité d'aire ; une unité d'aire étant l'aire du rectangle construit à partir des vecteurs unités.

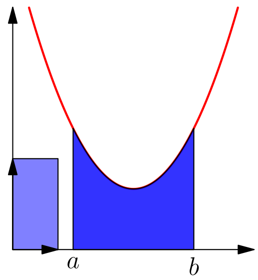
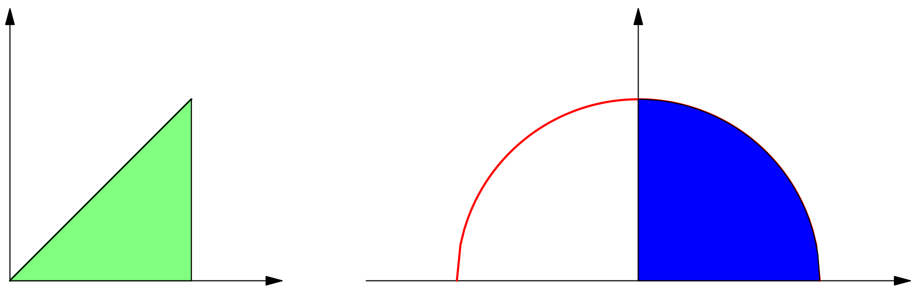


FIGURE 55.2 – Le domaine $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$. L'unité d'aire étant l'aire du rectangle construit à partir des vecteurs unités.

Exemples 55.10.

1. $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ car l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f définie par $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0\,,1]$ est l'aire d'un triangle rectangle isocèle dont les deux côtés de l'angle droit ont pour mesure 1.
2. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ car l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ est l'aire d'un quart de cercle de rayon 1.



(a) $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ (b) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

FIGURE 55.3 – Figure pour l'exemple

Propriété 55.11. *Soit une fonction f continue, positive et croissante sur un intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. L'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,,b]$ est égale à la limite commune des deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) définie par :*

$$u_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \textit{et} \quad v_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour tout entier n non nul, on divise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$. u_n correspond à l'aire des rectangles sous la courbe. v_n correspond à l'aire des rectangles au-dessus de la courbe. Pour tout n, on a

$$u_n \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq v_n.$$

Lorsque n augmente, l'écart entre l'aire des deux séries de rectangles et l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ diminue.

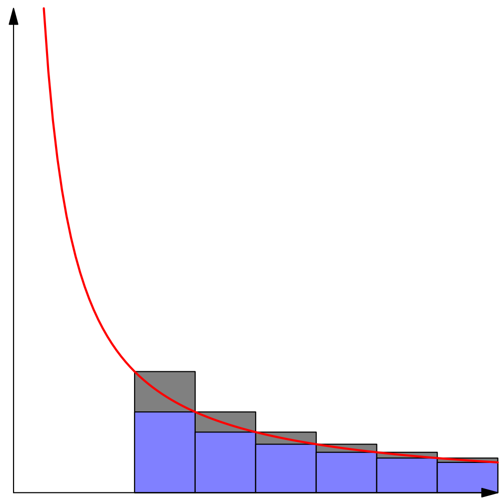


FIGURE 55.4 – Représentation des suites u_n et v_n

Remarques 55.12.
1. La propriété se généralise si f est seulement continue sur l'intervalle $[a, b]$.
2. Si la fonction f est continue, positive et décroissante sur l'intervalle $[a, b]$, on peut construire les deux suites de la même façon, mais c'est alors v_n qui correspond à l'aire des rectangles sous la courbe.

Propriété 55.13 (Relation de Chasles, pour les aires)**.** *Soit une fonction f, continue et positive sur l'intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Pour tout nombre c appartenant à l'intervalle $[a\,,b]$:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On découpe l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,,b]$ en aires sous la courbe sur les intervalles $[a\,,c]$ et $[c\,,b]$.

Exemple 55.14. Soit la fonction f dont la courbe représentative est donnée en figure 55.6. Alors :

$$\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$$

(en ajoutant les aires des deux trapèzes).

Définition 55.15 (Valeur moyenne)**.** *Soit une fonction f, continue et positive sur un intervalle $[a\,,b]$. On appelle* valeur moyenne *de la fonction f sur l'intervalle $[a\,,b]$ le nombre réel*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

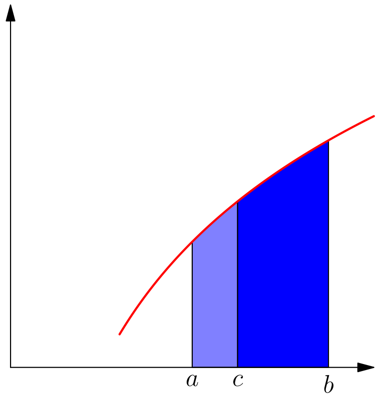


FIGURE 55.5 – Relation de Chasles

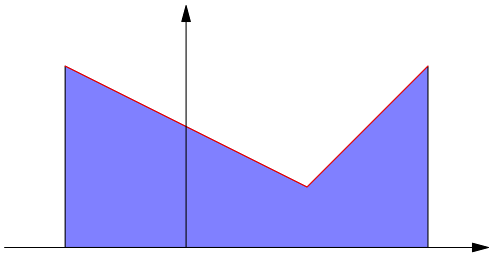


FIGURE 55.6 – Représentation graphique de f pour l'exemple

La valeur moyenne de la fonction f correspond à la valeur qu'il faut donner à une fonction constante g sur l'intervalle $[a\,,b]$ pour que l'aire sous la courbe représentative de g soit égale à l'aire sous la courbe représentative de f. L'aire du domaine hachuré est égale à l'aire du rectangle coloré.

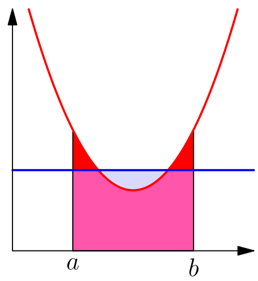


FIGURE 55.7 – Valeur moyenne

Définition 55.16. *Soit une fonction f continue et* négative *sur l'intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Le nombre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égal à* l'opposé *de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.*

Propriété 55.17. *Soit une fonction f, continue et négative sur l'intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à*

$$\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Propriété 55.18. *Soit une fonction f continue et négative sur l'intervalle $[a\,,b]$. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a\,,b]$ est égale à :*

$$-\frac{1}{b-a}\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 55.19. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,,1]$ par $f(x) = -x^2$. Sachant que $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0,1]$ est $-\frac{1}{3}$.

Propriété 55.20. *Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ telles que $f > g$. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par les deux courbes représentatives des fonctions f et g, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est, en unités d'aire,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3 Intégrale et primitive

Propriété 55.21. *Soit une fonction f continue, positive sur l'intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. L'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f sur l'intervalle $[a\,,b]$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale en unité d'aire à $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur l'intervalle $[a\,,b]$.*

Remarques 55.22.

1. On utilise la notation :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

2. On a les égalités :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a -f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemples 55.23.

1. L'aire sous la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 1$, sur l'intervalle $[-1\,,2]$ est :

$$\int_{-1}^2 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^2 = \frac{8}{3} + 2 - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = 6.$$

2. L'aire sous la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^4$ sur l'intervalle $[0\,,1]$ est :

$$\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}.$$

3. L'aire du domaine limité par la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{x}$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1\,,2]$ est :

$$-\int_1^2 -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^2 = \ln 2.$$

Définition 55.24. *Soit une fonction f continue sur un intervalle I et a un élément de I. Pour tout x appartenant à I, la fonction définie par $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a. Si F est une primitive quelconque de f sur I, alors*

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$

Remarque 55.25. Si $x > a$ et f positive sur l'intervalle $[a\,,x]$, alors $F(x)$ peut s'interpréter comme l'aire sous la courbe représentative de f sur l'intervalle $[a\,,x]$, exprimée en unité d'aire. Quels que soient a et b, éléments de I,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Exemples 55.26.

1. Sur $\mathbb{R}$,
$$\int_a^x 1\,\mathrm{d}t = \int_a^x \mathrm{d}t = [t]_a^x = x - a.$$
2. Sur $\mathbb{R}$,
$$\int_0^x -t^2\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{3}t^3\right]_0^x = -\frac{1}{3}x^3.$$
3. Sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$:
$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln x]_1^x = \ln x.$$
4. Sur $\mathbb{R}$:
$$\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\right]_0^x = \mathrm{e}^x - 1.$$

4 Propriétés algébriques de l'intégrale

Propriété 55.27 (Relation de Chasles)**.** *Soit une fonction f continue sur un intervalle I. Quels que soient a, b et c éléments de I :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 55.28. Cette propriété prolonge la propriété 55.21, qui a été établie dans le cas où les intégrales correspondent à des aires.

Exemple 55.29.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (|2-t| + |1-t|)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (3-2t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 \mathrm{d}t + \int_2^3 (2t-3)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[3t - t^2\right]_0^1 + [t]_1^2 + \left[t^2 - 3t\right]_2^3 = 2 + 1 + 2 = 5.\end{aligned}$$

Propriété 55.30 (Linéarité de l'intégrale)**.** *Soient deux fonctions f et g continues sur un intervalle I, a et b des éléments de I, et α et β deux nombres réels. Alors :*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 55.31.

$$\int_0^{\pi/4} (\tan^2 u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 u)\,\mathrm{d}u - \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}u = [\tan u]_0^{\pi/4} - [u]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Propriété 55.32 (Fonctions paires et impaires)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0. Pour tout élément a de I :*
- *si f est paire : $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$;*
- *si f est impaire : $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.*

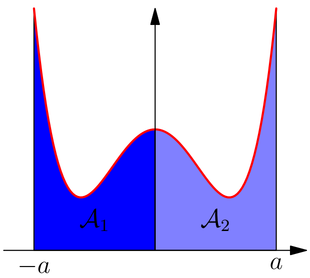
L'interprétation graphique est la suivante :

– Si f est paire et positive sur l'intervalle $[0\,,a]$, les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales. Donc :

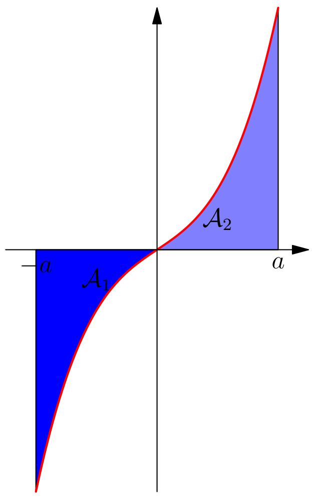
$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 2\mathcal{A}_2 = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

– Si f est impaire et positive sur l'intervalle $[0\,,a]$, les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales. Donc :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 0.$$



(a) f paire



(b) f impaire

FIGURE 55.8 – Intégrale de fonctions paires et impaires

Propriété 55.33 (Fonctions périodiques)**.** *Soit f une continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T. Pour tout nombre réel a :*

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

– Si f est positive, $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire sous la courbe représentative de f sur l'intervalle $[a\,,a+T]$. Par translations des domaines correspondants, on retrouve l'aire sous la courbe sur l'intervalle $[0\,,T]$.
– Si f est négative, on retrouve le résultat en considérant la fonction $-f$.

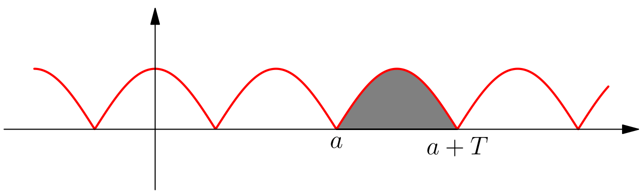


FIGURE 55.9 – Intégrales d'une fonction périodique

5 Intégrale et inégalités

Propriété 55.34. *Soit une fonction f continue positive sur un intervalle $[a\,,b]$:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Remarques 55.35.

1. Ce résultat est immédiat, puisque $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est, par définition, l'aire sous la courbe représentative de f sur l'intervalle $[a\,,b]$.
2. On peut retrouver le résultat à partir de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur l'intervalle $[a\,,b]$. D'où $F' = f$, or f est positive, donc F est croissante sur l'intervalle $[a\,,b]$ et $F(b) \geq F(a)$.
3. **Attention !** Une fonction f peut très bien avoir une intégrale positive sur l'intervalle $[a\,,b]$, sans être elle-même positive sur tout cet intervalle.

Propriété 55.36. *Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,,b]$. Si $f \leq g$ alors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 55.37. On applique la propriété 55.34 à la fonction $g - f$ qui est positive, ainsi que la propriété de linéarité de l'intégrale.

Propriété 55.38 (Inégalité de la moyenne)**.** *Soit une fonction f continue sur un intervalle I.*

- *Si les réels m et M sont tels que, pour tout x de l'intervalle I, on a $m \leq f(x) \leq M$, alors si $I = [a, b]$ avec $a < b$:*
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$
- *Si le réel M est tel que, pour tout x de l'intervalle I, on a $0 \leq |f(x)| \leq M$, alors pour tous éléments a et b de I :*
$$0 \leq \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq M\,|b-a|\,.$$

Remarques 55.39.

1. Dans le premier cas, on applique la propriété 55.36 à l'inégalité $m \leq f(x) \leq M$ sur l'intervalle $[a\,,b]$.
2. Dans le second cas, on applique la propriété 55.36 à l'inégalité $-M \leq f(x) \leq M$ sur l'intervalle $[a\,,b]$ ou $[b\,,a]$ selon que $a < b$ ou $a > b$.

Exemple 55.40. Soit la fonction inverse sur l'intervalle $[1\,,2]$. On a : $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$, d'où

$$\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq 1,$$

soit $\frac{1}{2} \leq \ln 2 \leq 1$.

Définition 55.41 (Valeur moyenne)**.** *Soit une fonction f, continue sur un intervalle $[a\,,b]$. On appelle* valeur moyenne *de la fonction f sur l'intervalle $[a\,,b]$ le nombre réel*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 55.42. Cette définition généralise la notion de valeur moyenne d'une fonction dans le cas où l'intégrale définissait une aire. Cette fois-ci, la formule est valable dans le cas où celle-ci a un signe non constant sur l'intervalle $[a\,,b]$.

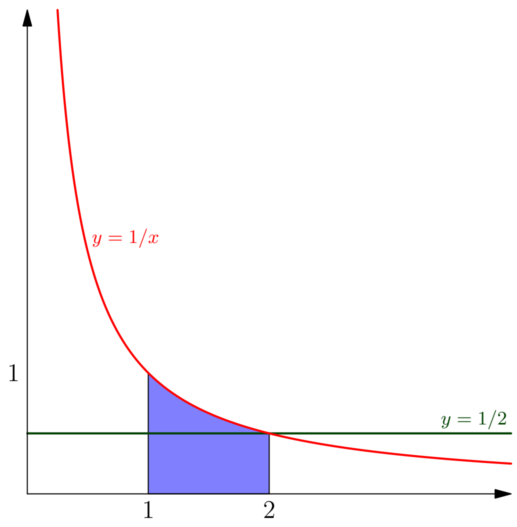


FIGURE 55.10 – $\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq 1$

Exemples 55.43. 1. La valeur moyenne de la fonction sinus sur l'intervalle $[0\,,\pi]$ est :

$$\frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[-\cos\pi\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

2. La valeur moyenne de la fonction sinus sur l'intervalle $[-\pi\,,\pi]$ est 0.
3. La valeur moyenne de la fonction définie par $x \mapsto x^2 - 1$ sur l'intervalle $[-\frac{3}{2}\,,\frac{3}{2}]$ est :

$$\frac{1}{3}\int_{-3/2}^{3/2}(x^2-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-3/2}^{3/2} = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^{3/2} = -\frac{1}{4}.$$

Compléments

Démonstration de la propriété 55.5. – Soit k un réel et H la fonction définie sur I par $H(x) = F(x) + k$. H est dérivable sur I car c'est une somme de fonctions dérivables et, pour tout x de I,

$$H'(x) = F'(x).$$

Puisque F est une primitive de f, on a : $F'(x) = f(x)$ donc $H'(x) = f(x)$: H est une primitive de f sur I.

– Soit G une primitive de f sur I. La fonction $G - F$ est dérivable et

$$(G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = 0$$

puisque, pour tout x de I,

$$G'(x) = f(x) = F'(x).$$

Donc $G - F$ est une fonction constante sur I, c'est-à-dire qu'il existe un nombre k tel que, pour tout x de I, $G(x) - F(x) = k$.

□

Démonstration de la propriété 55.7. f admet des primitives sur I qui s'écrivent sous la forme $x \mapsto G(x) + k$ où G est l'une de ces primitives. La condition $F(x_0) = y_0$ conduit à $G(x_0) + k = y_0$. D'où

$$k = y_0 - G(x_0) \quad \text{et} \quad F : x \mapsto G(x) + y_0 - G(x_0).$$

F est l'unique primitive de f sur I vérifiant la condition. □

Démonstration de la propriété 55.17. $\mathcal{C}_{-f}$, la courbe représentative de la fonction $-f$, est symétrique par rapport à l'axe des abscisses de $\mathcal{C}_f$, courbe représentative de f. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est égale, par symétrie, à l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_{-f}$. Cette aire est donc $\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$. D'après la définition 55.16, elle est aussi égale à $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. □

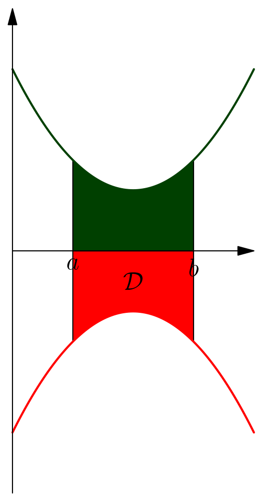


FIGURE 55.11 – Aire d'une fonction négative

Démonstration de la propriété 55.20. On découpe l'intervalle $[a\,,b]$ selon que les fonctions f et g sont toutes deux du même signes ou de signe contraire. Ainsi, dans la figure 55.12, l'aire entre les

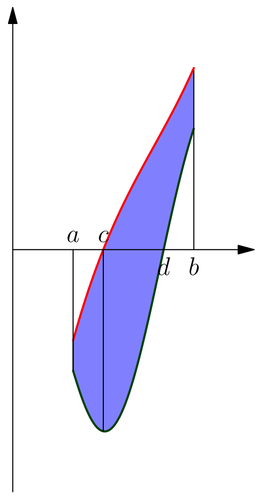


FIGURE 55.12 – Découpage des fonctions f et g selon leurs signes respectifs

deux courbes est :

– sur l'intervalle $[a\,,c]$:

$$-\int_a^c -f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b -g(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$

– sur l'intervalle $[c\,,d]$:

$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d -g(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$

– sur l'intervalle $[d\,,b]$:

$$\int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_d^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant les propriétés précédentes, on obtient bien

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

pour la valeur de l'aire du domaine $\mathcal{D}$. □

Démonstration de la propriété 55.21. La démonstration est faite dans le cas où f est croissante sur l'intervalle $[a\,,b]$. On admettra le résultat dans le cas général. Pour tout x tel que $a \leq x \leq b$, on note $\mathcal{A}(x)$ l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,,b]$. Pour $h > 0$:

$$hf(x) \leq \mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x) \leq hf(x+h)$$

soit

$$f(x) \leq \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leq f(x+h).$$

Pour $h < 0$:

$$(-h)f(x+h) \leq \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x+h) \leq (-h)f(x).$$

soit

$$f(x+h) \leq \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leq f(x).$$

Ainsi

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} = f(x).$$

La fonction $\mathcal{A}$ est donc dérivable pour tout x de l'intervalle $[a\,,b]$ et sa dérivée est la fonction f. De plus, $\mathcal{A}(a) = 0$. Ainsi $\mathcal{A}$ est la primitive de f nulle en a. Soit F une primitive quelconque de f, on peut donc écrire $\mathcal{A}(x) = F(x) - F(a)$. L'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,,b]$ vérifie donc

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

□

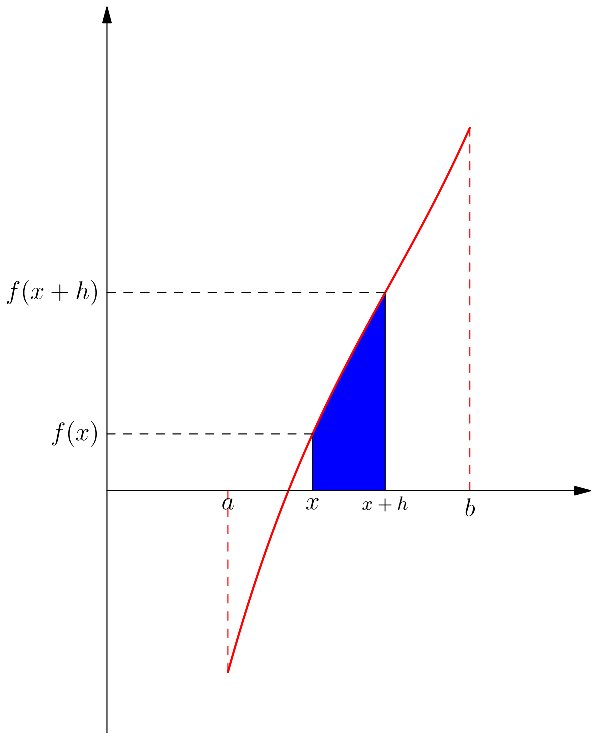


FIGURE 55.13 – Illustration de la démonstration

LEÇON

56 Techniques de calcul d'intégrales

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S (Intégration par parties), BTS
Prérequis Intégration : définition, propriétés
Références [136, 137, 138]

Contenu de la leçon

1 Intégration par parties

Définition 56.1 (Classe $\mathcal{C}^1$). *On dit qu'une fonction est de* classe $\mathcal{C}^1$ *sur un intervalle I si elle est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I.*

Théorème 56.2. *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,,b]$, alors :*

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Méthode 56.3. *Pour intégrer par parties, il faut*
- *reconnaître, dans la fonction à intégrer, le produit d'une fonction u et d'une fonction dérivée v' ;*
- *appliquer la formule d'intégration par parties.*

Exemples 56.4.
1. Soit à calculer :
$$I = \int_0^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$
On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = \mathrm{e}^t$. D'où $u'(t) = 1$ et $v(t) = \mathrm{e}^t$ (à une constante près) et ainsi :
$$I = \left[t\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1.$$
2. Soit à calculer :
$$J(x) = \int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t.$$
On pose $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = 1$. D'où $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = t$ (à une constante près) et ainsi :
$$J(x) = [t\ln t]_1^x - \int_1^x \mathrm{d}t = x\ln x - (x-1) = x\ln x - x + 1.$$

2 Changement de variables

Théorème 56.5. *Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,,b]$, dont les valeurs sont dans $\mathbb{R}$. Alors :*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

La démonstration est hors programme du BTS et admise.

Remarque 56.6. Dans $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$, on pose $u = \varphi(t)$ (changement de variable qu'on donne ou qu'on doit trouver). Si t vaut a (resp. b) alors u vaut $\varphi(a)$ (resp. $\varphi(b)$), ce qui conduit à changer les bornes de l'intégrale. Ensuite $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$, ou encore (bien que cette écriture soit formellement incorrecte au niveau BTS), $\mathrm{d}u = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, que l'on remplace dans l'intégrale.

Exemples 56.7. 1. Soit à calculer

$$I = \int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t.$$

On met t^2+t+1 sous la forme canonique :

$$t^2+t+1 = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right].$$

Ainsi

$$I = \int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1} = \int_0^1 \frac{4}{3}\frac{1}{(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u,$$

en posant $u = \frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où $\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}t$

$$U = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan(u)\right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

2. Soit f une fonction T-périodique. Alors l'intégrale de f sur une période est constante ; par exemple :

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{T/2}^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

par la relation de Chasles

$$= \int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-T/2}^0 f(u+T)\,\mathrm{d}u$$

en posant $u = t-T$

$$= \int_{-T/2}^0 f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

car $f(u+T) = f(u)$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3 Intégrale de Wallis

Exercice 56.8 (Intégrale de Wallis). Il s'agit, pour $n \in \mathbb{N}$, des intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t,\ J_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,\mathrm{d}t,\ K_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t,\ L_n = \int_{-1}^1 (t^2-1)^n\,\mathrm{d}t.$$

1. On va calculer I_n grâce à une intégration par parties. On a immédiatement :

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t\,\mathrm{d}t = 1.$$

Pour tout $n \geq 0$, on a, par intégration par parties $[u(t) = (\cos t)^{n+1}$ et $v'(t) = \cos t]$

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1}\cos t\,\mathrm{d}t = \left[(\cos t)^{n+1}\sin t\right]_0^t + (n+1)\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n(\sin t)^2\,\mathrm{d}t$$

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2}) \Leftrightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

ou encore

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad \text{pour tout } n \geq 2.$$

On en déduit immédiatement :

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4},\ I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3},\ I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3\pi}{16}.$$

Ainsi, on peut en déduire une formule générale :

– Si n pair $(n = 2p)$

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2} = \frac{\mathrm{C}_{2p}^p \pi}{2^{2p+1}}.$$

– Si n impair $(n = 2p+1)$:

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} I_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

2. On calcule J_n en se ramenant à I_n. En posant $u = \frac{\pi}{2} - t$, on obtient :

$$J_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^0 \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)^n (-\,\mathrm{d}u) = \int_0^{\pi/2} (\cos u)^n \,\mathrm{d}u = I_n.$$

3. On calcule K_n en se ramenant à I_{2n+1}. On pose $u = \arcsin t$ ($t \mapsto \arcsin t$ est une bijection de $[-1\,,1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$). On a donc $t = \sin u$.

$$K_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos u)^{2n} \cos u \,\mathrm{d}u = 2I_{2n+1} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

4. On calcule L_n en se ramenant à K_n.

$$L_n = \int_{-1}^1 (t^2-1)^n \,\mathrm{d}t = (-1)^n K_n = \frac{(-1)^n 2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

4 Intégration de fractions rationnelles

Exercice 56.9. 1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$:

$$\frac{2x^2-4}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

2. (a) En déduire sur $]1\,,+\infty[$ une primitive F_1 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2-4}{(x-1)(x+1)^2}.$$

(b) Déterminer une primitive F_2 de f sur l'intervalle $]-1\,,1[$ puis une primitive F_3 sur l'intervalle $]-\infty\,,1[$.

3. Calculer la valeur exacte de

$$I = \int_{-4}^{-2} \frac{2x^2-4}{(x-1)(x+1)^2} \,\mathrm{d}x$$

puis la valeur décimale approchée de 1 à 10^{-2} près par défaut.

1 Démonstration

Démonstration du théorème 56.2. On sait que pour tout $t \in [a\,,b]$:

$$(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t).$$

En intégrant de a à b :

$$\int_a^b (u(t)v(t))'\,\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t) + u'(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

et d'après la linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (u(t)v(t)')\,\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'où le théorème. □

2 Correction de l'exercice sur l'intégration de fractions rationnelles

Correction de l'exercice 56.9. 1.

$$\begin{aligned}\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} &= \frac{a(x+1)^2 + b(x-1)(x+1) + c(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} \\ &= \frac{a(x^2+2x+1) + b(x^2-1) + cx - c}{(x-1)(x+1)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (2a+c)x + a - b - c}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{2x^2-4}{(x-1)(x+1)^2}.\end{aligned}$$

L'égalité est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, la comparaison des coefficients respectifs donne :

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + c = 0 \\ a - b - c = -4 \end{cases}$$

On exprime, à l'aide des deux premières équations, b et c en fonction de a et l'on reporte les expressions trouvées dans la troisième équation $b = 2 - a$ et $c = -2a$:

$$a - (2-a) - (-2a) = -4 \Leftrightarrow 4a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

On en tire $b = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ et $c = -2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$. Ainsi,

$$a = -\frac{1}{2},\ b = \frac{5}{2},\ c = 1.$$

2. (a) On peut écrire, en utilisant les résultats de la première question :

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x-1} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{x-1} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Sur l'intervalle $]1\,,+\infty[$, $x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$. On en reconnaît dans les deux premiers quotients la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$. Le troisième quotient est de la forme $\frac{u'}{u^2}$. Une primitive F_1 de f sur l'intervalle $]1\,,+\infty[$ est :

$$F_1(x) = -\frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{5}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}.$$

(b) Dans le cas général $x \mapsto \ln|u|$ est une primitive de $x \mapsto \frac{u'}{u}$ si $u \neq 0$.

$$F(x) = -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{5}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{x+1}.$$

Si $u < 0$, $\ln|u| = \ln(-u)$, on applique cette règle pour le calcul des primitives F de f : sur l'intervalle $]-1\,,1[$, $x-1<0$ et $x+1>0$:

$$F_2(x) = -\frac{1}{2}\ln(-x+1) + \frac{5}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{x+1},$$

sur l'intervalle $]-\infty\,,-1[$, $x-1<0$ et $x+1<0$:

$$F_3(x) = -\frac{1}{2}\ln(-x+1) + \frac{5}{2}\ln(-x-1) - \frac{1}{x-1}.$$

3. L'intervalle $[-4\,,-2]$ est inclus dans l'intervalle $]-\infty\,,1[$. On utilise, pour primitive de f, la fonction F_3.

$$\begin{aligned} I = F_3(-2) + F_3(-4) &= \left(-\frac{1}{2}\ln 3 + \frac{5}{2}\ln 1 - \frac{1}{-1}\right) - \left(-\frac{1}{2}\ln 5 + \frac{5}{2}\ln 3 - \frac{1}{-3}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\ln 3 + 1 + \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{5}{2}\ln 3 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln 5 - 3\ln 3 + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

La calculatrice donne $I \approx -1{,}824451$, ce qui signifie $-1{,}83 \leq I \leq -1{,}82$. La valeur décimale approchée par défaut de I à 10^{-2} près est : $I \approx -1{,}83$.

□

LEÇON

57 Équations différentielles

Niveau, prérequis, références

Niveau BTS

Prérequis Fonctions dérivées

Références [139]

Contenu de la leçon

1 Préliminaires

1.1 Introduction

Définition 57.1 (Equation différentielle d'ordre n)**.** *Une* équation différentielle d'ordre n *est une équation reliant une fonction y (n fois dérivable) à ses n premières dérivées.*

Définition 57.2 (Résolution)**.** Résoudre *une telle équation, c'est trouver toutes les fonctions y satisfaisant cette équation.*

Si y est une fonction dérivable du temps, alors on note y' ou $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ sa dérivée première, y'' ou $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$ sa dérivée seconde,... On prend garde à éviter l'abus de notation classique : $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ n'est pas un nombre mais une fonction.

Exemple 57.3. Si $y(t) = \sin(3\pi t)$ alors $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = y'(t) = 3\pi\cos(3\pi t)$.

1.2 Exemple fondamental

Exemple 57.4. Si l'on se place dans un circuit série RLC soumis à une tension $e(t)$, alors l'intensité $i(t)$ induite par cette différence de potentiel vérifie l'équation :

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(u)\,\mathrm{d}u = e(t). \tag{57.1}$$

Si le signal e est dérivable, on peut dériver cette équation et l'on obtient l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants suivante :

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}(t) + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{C}i(t) = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}(t).$$

ou, si l'on reprend les notations mathématiques :

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) = e'(t).$$

Remarques 57.5.

1. Si le signal e n'est pas dérivable, la démarche précédente ne peut s'appliquer. La théorie des distributions, qui contourne cet obstacle, permet de s'en sortir mais elle est hors programme. L'utilisation de la transformation de Laplace, dans ce cas-là, se révélera fort utile.
2. Si e est périodique, une autre manière de s'affranchir de sa non-dérivabilité est de lui substituer une somme de Fourier l'approchant. Celle-ci est non seulement dérivable, mais aussi sa simplicité permet de résoudre explicitement l'équation différentielle (de manière approchée).

2 Equations différentielles linéaires du premier ordre

2 1 Définitions et structure des solutions

Définition 57.6. *Une* équation différentielle linéaire d'ordre 1 *est une équation* (E) *de la forme :*

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \tag{E}$$

où a, b *et* c *sont des fonctions continues sur un intervalle* I*, avec* $a(t) \neq 0$ *sur* I*.*

Définition 57.7 (Equation homogène)**.** *L'*équation homogène *associée à* (E) *est l'équation sans second membre* (E^*) *:*

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0. \tag{E^*}$$

Théorème 57.8. *La* solution générale *de* (E) *est obtenue en ajoutant une solution particulière de* (E) *à la solution générale de* (E^*)*.*

2 2 Résolution de l'équation homogène

Coefficients constants On suppose ici que les deux fonctions a et b sont constantes avec $a \neq 0$. Dans ce cas l'équation (E^*) s'écrit $ay' + by = 0$, et l'intervalle d'étude est $\mathbb{R}$ car a est une constante. Supposons que y ne s'annule pas. On peut alors écrire $\frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}$. Ensuite, puisque y ne s'annule pas, elle ne change pas de signe, et on peut supposer par exemple qu'elle est toujours strictement positive. Ainsi, nous pouvons primitiver notre relation en $\ln|y(t)| = \ln y(t) = -\frac{b}{a}t + k$, où k est une constante. Ceci montre alors que

$$y(t) = \exp\left(-\frac{b}{a}t + k\right).$$

Et si, pour finir, on note $K = \mathrm{e}^k$, alors $y(t) = K\mathrm{e}^{-(b/a)t}$.

Théorème 57.9. *Les solution de* $ay' + by = 0$ *sont de la forme* $K\mathrm{e}^{-(b/a)t}$*, où* K *est une constante réelle.*

Exemple 57.10. Les solutions de l'équation $2x' + x = 0$ sont de la forme $K\mathrm{e}^{-t/2}$.

Cas général Dans ce cas, l'équation (E^*) s'écrit :

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0.$$

On peut, pour tout $t \in I$, écrire

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{b(t)}{a(t)},$$

en supposant que y ne s'annule pas sur I. Notons $F(t)$ une primitive de $\frac{b(t)}{a(t)}$. Si y est strictement positive, on a comme dans le cas constant, $\ln y(t) = -F(t) + k$, et ainsi

$$y(t) = \exp(-F(t) + k).$$

Si l'on note $K = \mathrm{e}^k$, alors $y(t) = K\mathrm{e}^{-F(t)}$.

Théorème 57.11. *Les solutions de* $a'(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ *sont de la forme* $K\mathrm{e}^{-F(t)}$*, où* K *est une constante réelle et* $F(t)$ *une primitive de* $\frac{b(t)}{a(t)}$*.*

Pour la démonstration, on pourra s'inspirer de la démonstration du théorème 57.9.

Exemple 57.12. Soit l'équation, définie sur $I =]-1\,,+\infty[$, par

$$(t+1)w' + (t-1)w = 0.$$

On a ici :

$$\frac{b(t)}{a(t)} = \frac{t-1}{t+1} = \frac{t+1-2}{t+1} = 1 - \frac{2}{t+1}.$$

Une primitive sur I est donnée par

$$F(t) = t - 2\ln|t+1| = t - 2\ln(t+1).$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme

$$w(t) = K\mathrm{e}^{-t+2\ln(t+1)} = K\mathrm{e}^{-t}(t+1)^2.$$

2 3 Recherche d'une solution particulière et solution générale

Il nous reste donc à trouver une solution particulière de (E), dans le cas où $c(t)$ est un polynôme ou un polynôme trigonométrique.

Le second membre est un polynôme On cherche une solution particulière d'un polynôme de même degré que $c(t)$.

Exemple 57.13. Soit l'équation

$$y'(x) - y(x) = x^2 - x - 1. \tag{E}$$

1. L'équation homogène est
$$y' - y = 0 \tag{E^*}$$
et ainsi les solutions sont de la forme $y^*(x) = K\mathrm{e}^x$.
2. ici $c(t) = x^2 - x - 1$, polynôme du second degré. On cherche donc une solution particulière y_1 sous la forme d'un polynôme du second degré $y_1(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. On remplace dans ($E$) :
$$\begin{aligned} y_1'(x) - y_1(x) = x^2 - x - 1 &\Leftrightarrow 2\alpha x + \beta - \alpha x^2 - \beta x - \gamma = x^2 - x - 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha = 1 \\ 2\alpha - \beta = -1 \\ \beta - \gamma = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$
Ainsi $y_1(x) = -x^2 - x$ est une solution particulière de (E).
3. La solution générale de (E) est donc donnée par
$$y(x) = y^*(x) + y_1(x) = K\mathrm{e}^x - x^2 - x,$$
où K est une constante réelle (qui ne pourra être déterminée qu'avec une condition initiale).

Le second membre est un polynôme trigonométrique On rappelle qu'un polynôme trigonométrique de degré n est un polynôme de la forme :

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx).$$

Exemple 57.14. Soit l'équation

$$y'(t) - 2y(t) = 13\sin 3t \tag{E}$$

sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$.

1. L'équation homogène est
$$y' - 2y = 0, \tag{E^*}$$
et ainsi ses solutions sont de la forme $y^*(x) = K\mathrm{e}^{2t}$.
2. Ici $c(t) = 13 \sin 3t$, polynôme trigonométrique possédant une seule fréquence. On cherche donc une solution particulière y_1 sous la forme d'un polynôme trigonométrique de même fréquence fondamentale $y_1(t) = A \cos 3t + B \sin 3t$. On remplace dans ($E$) :
$$y_1'(t) - 2y_1(t) = 13 \sin 3t \Leftrightarrow -3A \sin 3t + 3B \cos 3t - 2A \cos 3t - 2B \sin 3t = 13 \sin 3t$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3A - 2B = 13 \\ 3B - 2A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -3 \\ B = -2 \end{cases}$$
Ainsi $y_1(t) = -3 \cos 3t - 2 \sin 3t$ est une solution particulière de (E).
3. La solution générale de (E) est donc donnée par
$$y(t) = y^*(x) + y_1(x) = K\mathrm{e}^{2t} - 3 \cos 3t - 2 \sin 3t$$
où K est une constante réelle (qui ne pourra être déterminée qu'avec une condition initiale).

2 4 Utilisation d'une condition initiale

La donnée d'une condition initiale permet de déterminer exactement la solution de (E) + condition initiale.

Théorème 57.15. *Etant donnée une condition initiale sur les solutions, une équation différentielle linéaire du premier ordre possède une* unique solution.

Exemple 57.16. On cherche la solution de l'équation de l'exemple 57.14 vérifiant $y(0) = 1$. On remplace cette condition initiale dans la solution générale de (E) :
$$1 = y(0) = K\mathrm{e}^0 - 3 \cos 0 - 2 \sin 0,$$
ce qui donne $1 = K - 3$ ou encore $K = 4$. Finalement la solution du problème de Cauchy est
$$y(t) = 4\mathrm{e}^{2t} - 3 \cos 3t - 2 \sin 3t.$$

3 Equations différentielles linéaires du second d'ordre à coefs constants

3 1 Définitions et structure des solutions

Définition 57.17. *Une* équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants *est une équation* (E) *de la forme :*
$$ay''(t) + by(t) + cy(t) = d(t), \tag{E}$$
où a, b et c sont des constantes, avec $a \neq 0$.

Définition 57.18 (Equation homogène)**.** *L'équation homogène associée à* (E) *est l'équation sans second membre :*
$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0. \tag{E^*}$$

Théorème 57.19. *La solution* générale *de* (E) *est obtenue en ajoutant une solution particulière de* (E) *à la solution générale de* (E^*).

3 2 Résolution de l'équation homogène

Espace des solutions

Théorème 57.20. *Si f et g sont deux solutions non proportionnelles de (E^*), alors* l'ensemble des solutions *de (E^*) est composé des fonctions de la forme $C_1 f + C_2 g$, où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.*

Remarque 57.21. Ainsi, si l'on trouve deux fonctions solutions non proportionnelles, on obtient *toutes* les solutions par combinaison linéaire de ces deux fonctions.

Equation caractéristique En se souvenant des fonctions solutions des équations différentielles du premier ordre, on est amené à chercher si des fonctions exponentielles sont solutions de (E^*). Posons donc $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$ et supposons que cette fonction soit solution. On remplace dans (E^*) et on obtient

$$ar^2\mathrm{e}^{rt} + br\mathrm{e}^{rt} + c\mathrm{e}^{rt} = 0,$$

soit

$$\mathrm{e}^{rt}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Puisqu'une exponentielle n'est jamais nulle, ceci signifie que $ar^2 + br + c = 0$.

Définition 57.22 (Equation caractéristique)**.** *L'équation du second degré $ar^2+br+c = 0$ est appelée* équation caractéristique *de l'équation homogène (E^*).*

Résolution de l'équation caractéristique et formes des solutions Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique.

- Si $\Delta > 0$, il y a donc deux solutions réels r_1 et r_2. Les deux fonctions $f_1(t) = \mathrm{e}^{r_1 t}$ et $f_2(t) = \mathrm{e}^{r_2 t}$ sont deux solutions de (E^*) qui ne sont pas proportionnelles car le rapport suivant n'est pas constant :

$$\frac{f_1(t)}{f_2(t)} = \frac{\mathrm{e}^{r_1 t}}{\mathrm{e}^{r_2 t}} = \mathrm{e}^{r_1 t - r_2 t} = \mathrm{e}^{(r_1 - r_2)t}.$$

  Ainsi, les solutions de (E^*) sont de la forme

$$C_1\mathrm{e}^{r_1 t} + C_2\mathrm{e}^{r_2 t},$$

  où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.
- Si $\Delta = 0$, il y a une seule solution réelle double $r = -\frac{b}{2a}$, qui fournit déjà une solution $f_1(t) = \mathrm{e}^{rt}$ de (E^*). On cherche une deuxième solution sous la forme

$$f_2(t) = w(t)f_1(t) = w(t)\mathrm{e}^{rt}.$$

  On remplace dans (E^*) :

$$\begin{aligned}
&y_2 \text{ solution de } (E^*)\\
\Leftrightarrow &ay_2''(t) + by_2'(t) + cy_2(t) = 0\\
\Leftrightarrow &a[w''(t)\mathrm{e}^{rt} + 2w'(t)r\mathrm{e}^{rt} + w(t)r^2\mathrm{e}^{rt}] + b[w'(t)\mathrm{e}^{rt} + w(t)r\mathrm{e}^{rt}] + cw(t)\mathrm{e}^{rt} = 0\\
\Leftrightarrow &a[w''(t) + 2w'(t)r + w(t)r^2] + b[w'(t) + w(t)r] + cw(t) = 0\\
\Leftrightarrow &aw''(t) + (2ar + b)w'(t) + (ar^2 + br + c)w(t) = 0\\
\Leftrightarrow &aw''(t) = 0
\end{aligned}$$

  car $r = -\frac{b}{2a}$ est solution de l'équation caractéristique

$$\Leftrightarrow w'(t) = 0$$

car $a \neq 0$. Ainsi, on peut prendre $w(t) = t$, et $f_2(t) = w(t)f_1(t) = t\mathrm{e}^{rt}$. On vérifie aisément que f_1 et f_2 ne sont pas proportionnelles car le rapport $\frac{f_2(t)}{f_1(t)} = t$ n'est pas constant. Par conséquent, les solutions de (E^*) sont de la forme

$$C_1\mathrm{e}^{rt} + C_2t\mathrm{e}^{rt} = \mathrm{e}^{rt}(C_1 + C_2t)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

– Si $\Delta < 0$, il y a deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$, où α et β sont deux réels avec $\beta \neq 0$. Les fonctions $g_1(t) = \mathrm{e}^{r_1 t}$ et $g_2(t) = \mathrm{e}^{r_2 t}$ sont solutions de (E^*) à valeurs complexes. On obtient d'autres solutions par combinaison linéaire *complexe*, en particulier :

$$\begin{cases} f_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{r_1 t} + \mathrm{e}^{r_2 t}) \\ f_2(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{r_1 t} - \mathrm{e}^{r_2 t}). \end{cases}$$

Ces deux nouvelles fonctions solutions sont à valeurs réelles et ne sont pas proportionnelles car leur rapport n'est pas une constante. Ainsi les solutions de (E^*) sont de la forme :

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t),$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

Conclusion

Théorème 57.23. *Les solutions de l'équation $ay'' + by' = cy = 0$ avec $a \neq 0$ sont :*
- *Si $\Delta > 0$, $C_1\mathrm{e}^{r_1 t} + C_2\mathrm{e}^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les deux solutions ;*
- *Si $\Delta = 0$, $\mathrm{e}^{rt}(C_1 + C_2 t)$ où r est la solution double ;*
- *Si $\Delta < 0$, $\mathrm{e}^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t)$ où α et β sont les parties réelle et imaginaire des solutions.*

Remarque 57.24. Si l'on pose $C = \sqrt{C_1 + C_2}$ alors

$$\left(\frac{C_1}{C}\right)^2 + \left(\frac{C_2}{C}\right)^2 = 1$$

et on peut donc trouver un nombre φ tel que $\frac{C_1}{C} = \sin\varphi$ et $\frac{C_2}{C} = \cos\varphi$. Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t) &= C\mathrm{e}^{\alpha t}\left(\frac{C_1}{C}\cos\beta t + \frac{C_2}{C}\sin\beta\right) \\ &= C\mathrm{e}^{\alpha t}(\sin\varphi\cos\beta t + \cos\varphi\sin\beta t) \\ &= C\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t + \varphi). \end{aligned}$$

qui est une forme assez commode pour l'expression des solutions dans le cas $\Delta < 0$.

Exemple 57.25. Revenons à notre circuit série RLC, dont l'équation homogène est $Li'' + Ri' + \frac{1}{C}i = 0$. Le discriminant de l'équation cartéristique est $\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C}$, et ainsi il s'annule lorsque $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

3 3 Recherche d'une solution particulière et solution générale

Le second membre est un polynôme On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de même degré que $d(t)$. On procède exactement de la même manière que dans l'exemple 57.13, par identification des coefficients du polynôme-candidat.

Le second membre est un polynôme trigonométrique Dans ce cas également, la méthode est identique à celle de l'exemple du premier degré. On cherche la solution sous la forme d'un polynôme trigonométrique semblable à $d(t)$.

Le second membre est une fonction exponentielle-polynôme Ici $d(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}P(t)$, où P est un polynôme. On cherche les solutions sous la forme $\mathrm{e}^{\lambda t}Q(t)$ où Q est un polynôme de degré celui de P plus 1. On procède ensuite par identification des coefficients de Q comme dans les cas précédents.

3 4 Utilisation d'une condition initiale

La donnée d'une condition initiale (généralement au temps $t_0 = 0$) permet de déterminer la solution de (E) + condition initiale (appelé problème de Cauchy) :

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t) \\ \begin{cases} y(t_0) \text{ fixé} \\ y'(t_0) \text{ fixé} \end{cases} \end{cases}.$$

Théorème 57.26. *Etant données une condition initiale sur les solutions et une sur leurs dérivées, une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants possède une* unique solution.

Exemple 57.27. Considérons l'équation

$$i''(t) - 2i'(t) + 5i(t) = 5\cos t \tag{E}$$

sur l'intervalle $I = [0\,, +\infty[$. On suppose de plus que $i(0) = i'(0) = 0$.

1. L'équation homogène associée est
$$i'' - 2i' - 5i = 0 \tag{E^*}$$
Ici, $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$. Les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique sont $1 \pm 2\mathrm{i}$. Ainsi les solutions de l'équation (E^*) sont de la forme :
$$i^*(t) = \mathrm{e}^t(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t).$$
2. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $i_1(t) = A\cos t + B\sin t$ (polynôme trigonométrique). On obtient les équations
$$\begin{cases} 4A - 2B = 5 \\ 4B + 2A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$
et finalement
$$i_1(t) = \cos t - \frac{1}{2}\sin t.$$
3. La solution générale de (E) est donc
$$i(t) = \cos t - \frac{1}{2}\sin t + \mathrm{e}^t(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t).$$
On doit avoir $i(0) = 0$ donc $0 = 1 + C_1$ soit $C_1 = -1$. De plus, $i'(0) = 0$, ce qui donne $0 = -\frac{1}{2} + C_1 + 2C_2$ soit $C_2 = \frac{3}{4}$.
4. La solution du problème de Cauchy est donc
$$i(t) = \cos t - \frac{1}{2} + \mathrm{e}^t\left(-\cos 2t + \frac{3}{4}\sin 2t\right).$$

Compléments

Démonstration du théorème 57.8. Soit y_1 une solution particulière de (E). Elle vérifie donc

$$a(t)y_1'(t) + b(t)y_1(t) = c(t).$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}
y \text{ est une solution de } (E) &\Leftrightarrow a(t)y'(t)+b(t)y(t)=c(t)\\
&\Leftrightarrow a(t)y'(t)+b(t)y(t)=a(t)y_1'(t)+b(t)y_1(t)\\
&\Leftrightarrow a(t)(y'(t)-y_1'(t))+b(t)(y(t)-y_1(t))=0\\
&\Leftrightarrow a(t)(y-y_1)'(t)+b(t)(y-y_1)(t)=0\\
&\Leftrightarrow y^*=y-y_1 \text{ est solution de } (E^*).
\end{aligned}$$

Ainsi, étant données la solution particulière y_1 de (E) et la solution générale de (E^*), la solution générale de (E) est bien de la forme $y=y^*+y_1$. □

Démonstration du théorème 57.9. Soit $y(t)=K\mathrm{e}^{-(b/a)t}$. On vérifie aisément que y est solution de (E^*) :

$$ay'(t)+by(t)=-\frac{b}{a}aK\mathrm{e}^{-(b/a)t}+bK\mathrm{e}^{-(b/a)t}=-bK\mathrm{e}^{-(b/a)t}+bK\mathrm{e}^{-(b/a)t}=0.$$

Réciproquement, supposons que y soit solution de (E), ce qui signifie que $ay'+by=0$. Posons $f(t)=y(t)\mathrm{e}^{(b/a)t}$. Cette fonction est dérivable, et :

$$f'(t)=y'(t)\mathrm{e}^{(b/a)t}+y(t)\frac{b}{a}\mathrm{e}^{(b/a)t}(ay'+by)(t)=0.$$

Ainsi f est une constante K sur l'intervalle $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $f(t)=K$, ou encore $y(t)=K\mathrm{e}^{-(b/a)t}$. □

Démonstration du théorème 57.15. On rappelle que les solutions de (E) sont données par

$$y(t)=K\mathrm{e}^{-F(t)}+y_1(t),$$

où $F(t)$ est une primitive de $\frac{b(t)}{a(t)}$ et y_1 une solution particulière de (E). Il s'agit donc de fixer K grâce à la condition initiale $y(t_0)=y_0$. On remplace :

$$y_0=y(t_0)=K\mathrm{e}^{-F(t_0)}+y_1(t_0)\Leftrightarrow K=\frac{y_0-y_1(t_0)}{\mathrm{e}^{-F(t_0)}}.$$

Ainsi la constante K est déterminer de manière unique. □

Démonstration du théorème 57.20. Si f et g sont deux solutions, il est facile de vérifier que C_1f+C_2g est encore solution. Réciproquement, toute solution est de cette forme (admis). □

Démonstration du théorème 57.26. On se place dans le cas où $t_0=0$. Supposons par exemple que l'équation caractéristique possède deux solutions réelles r_1 et r_2 (cas $\Delta>0$). Les solutions de (E) sont données par

$$y(t)=y_1(t)+C_1\mathrm{e}^{r_1t}+C_2\mathrm{e}^{r_2t},$$

où y_1 est une solution particulière. Il s'agit donc de déterminer exactement C_1 et C_2. Les conditions initiales donnent

$$\begin{cases} C_1+C_2=y(0)-y_1(0)\\ r_1C_1+r_2C_2=y'(0)-y_1'(0)\end{cases}$$

Ce système possède toujours une solution unique car son déterminant est $r_2-r_1\neq 0$ car r_1 et r_2 sont différentes. Les cas $\Delta=0$ et $\Delta<0$ se traitent de la même manière. □

LEÇON

58

Problèmes conduisant à la résolution d'équations différentielles

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S

Prérequis Résolution d'une équation différentielle

Références [140]

Contenu de la leçon

1 Du double au triple

Exercice 58.1. Une grandeur (non nulle) y évolue à une vitesse proportionnelle à elle-même. On sait que cette grandeur double tous les dix ans. Combien de temps lui faut-il pour tripler ?

2 Loi de refroidissement de Newton

Exercice 58.2. La loi de refroidissement de Newton s'énonce ainsi : « *la vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant.* » On suppose que la température de l'air ambiant est constante égale à $25\,^\circ\mathrm{C}$. Dans ces conditions, la température d'un corps passe de $100\,^\circ\mathrm{C}$ à $70\,^\circ\mathrm{C}$ en 15 minutes. Au bout de combien de temps se trouvera-t-il à $40\,^\circ\mathrm{C}$?

3 Dissolution d'une substance

Exercice 58.3. Une substance se dissout dans l'eau. On admet que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute. À l'instant $t = 0$ (t en minutes), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau. Sachant que les dix premiers gramme se dissolvent en cinq minutes, donner une expression de la quantité dissoute $f(t)$, en grammes, en fonction de t.

4 Taux d'alcoolémie

Exercice 58.4. Le taux d'alcoolémie $f(t)$ (en gL^{-1}) d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie, sur $\mathbb{R}_+$, l'équation différentielle :

$$y' + y = a\mathrm{e}^{-t} \tag{E}$$

où t est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures), et a une constante qui dépend des conditions expérimentales.

1. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:
$$g(t) = f(t)\mathrm{e}^t.$$
Démontrer que g est une fonction affine.
2. Exprimer $f(t)$ en fonction de t et de a.
3. Dans cette question, on suppose que $a = 5$.
   (a) Etudier les variations de f et tracer sa courbe. Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.
   (b) Donner une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à $0{,}5\,\mathrm{gL}^{-1}$.

5 Décharge d'un condensateur

Exercice 58.5. On considère un circuit électrique constitué d'un condensateur (de capacité C) se déchargent dans une résistance R. On note $u_C(t)$ la tension au borne du condensateur (en Volts) à l'instant t (en secondes). À l'instant $t = 0$, on sait que $u_C(0) = 3\,\mathrm{V}$. Exprimer $u_C(t)$ en fonction de t.

6 Vitesse d'un parachutiste

Exercice 58.6. Un parachutiste tombe à une vitesse de $55\,\mathrm{ms}^{-1}$ au moment où son parachute s'ouvre. On fixe l'origine du temps ($t = 0$, en secondes) à ce moment là. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on note $v(t)$ la vitesse (en ms^{-1}) du parachutiste à l'instant t. On admet que la résistance de l'air est donnée par

$$R = \frac{Pv^2}{25}$$

où P est le poids du parachutiste avec son équipement ($P = mg$, $m =$ masse et $g = 9{,}81\,\mathrm{ms}^{-2}$).

1. Déterminer que v est solution, sur $\mathbb{R}_+$, de l'équation différentielle :

$$v' = g\left(1 - \frac{v^2}{25}\right). \tag{E}$$

2. On suppose que $v > 5$ sur $\mathbb{R}_+$, on pose sur $\mathbb{R}_+$:

$$z = \frac{1}{v-5}.$$

   Déterminer une équation différentielle satisfaite par z sur $\mathbb{R}_+$ et la résoudre.
3. En déduire une expression de $v(t)$ en fonction de t et préciser sa limite lorsque t tend vers $+\infty$.

Solutions des problèmes

1 Du double au triple

Solution. Par hypothèse, on a : $y' = ay$ où a est le coefficient de proportionnalité. On note t le temps (en années). On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont de la forme :

$$y(t) = C\mathrm{e}^{at}$$

où C est une constante (non nulle, sinon y serait nulle). Comme la grandeur double tous les dix ans, on a :

$$y(t+10) = 2y(t) \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{a(t+10)} = 2C\mathrm{e}^{at}.$$

En simplifiant par $C\mathrm{e}^{at}$, on a : $\mathrm{e}^{10a} = 2$, d'où :

$$a = \frac{\ln 2}{10}.$$

On a donc :

$$y(t) = C\mathrm{e}^{(\ln 2/10)t} = C2^{t/10}.$$

Cherchons maintenant le temps T pour lequel, on a :

$$y(t+T) = 3y(t) \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{a(t+T)} = 3C\mathrm{e}^{at} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{aT} = 3$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{\ln 3}{a} = \frac{10\ln 3}{\ln 2} \simeq 15,85 \quad \text{à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Il faut donc attendre 15 ans, 10 mois et 6 jours (au jour près) pour que cette quantité triple. □

2 Loi de refroidissement de Newton

Solution. Notons $f(t)$ la température du corps à l'instant t (en minutes). Selon la loi de refroidissement de Newton, on a :

$$f'(t) = a(25 - f(t)).$$

Les solutions, sur $\mathbb{R}_+$, de cette équation différentielle sont de la forme :

$$f(t) = C\mathrm{e}^{-at} + 25.$$

A l'instant $t = 0$, le corps est à une température de $100\,^{\circ}\mathrm{C}$:

$$f(0) = 100 \Leftrightarrow C + 25 = 100 \Leftrightarrow C = 75.$$

D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f(t) = 75\mathrm{e}^{-at} + 25.$$

On sait que 15 minutes plus tard, le corps est à $70^{\circ}C$, ce qui permet de calculer a :

$$f(15) = 70 \Leftrightarrow 75\mathrm{e}^{-15a} + 25 = 70 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-15a} = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow -15a = \ln\left(\frac{3}{5}\right) = \ln 3 - ln5 \Leftrightarrow a = \frac{\ln 5 - \ln 3}{15} \simeq\simeq 0{,}034 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Déterminons maintenant le temps t à partir duquel le corps se trouve à une température de $40\,^{\circ}\mathrm{C}$. On résout l'équation :

$$f(t) = 40 \Leftrightarrow 75\mathrm{e}^{-at} + 25 = 40 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-at} = \frac{1}{5}$$

d'où

$$t = \frac{\ln 5}{a} = 15\frac{ln5}{\ln 5 - \ln 3} \simeq 47{,}26 \text{ à } 10^{-1} \text{ près.}$$

Il faut attendre 47 minutes (et 16 secondes, à la seconde près) que le corps atteigne la température de $40\,^{\circ}\mathrm{C}$. □

3 Dissolution d'une substance

Solution. Comme la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f'(t) = a(20 - f(t)).$$

Les solutions sont de la forme, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f(t) = C\mathrm{e}^{-at} + 20.$$

À l'instant initial, il n'y a pas encore de quantité dissoute donc :

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow C + 20 = 0 \Leftrightarrow C = -20.$$

Comme les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes, on a :

$$f(5) = 10 \Leftrightarrow -20\mathrm{e}^{-5a} + 20 = 10 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-5a} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\ln 2}{5} \simeq 0,14 \quad \text{à } 10^{-2} \text{ près.}$$

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f(t) = 20\left(1 - \mathrm{e}^{-((\ln 2)/5)t}\right) = 20\mathrm{e}^{1-2^{-t/5}}.$$

□

4 Taux d'alcoolémie

Solution. 1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (les fonction f et l'exponentielle le sont) et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$g'(t) = f'(t)\mathrm{e}^t + f(t)\mathrm{e}^t = (f'(t) + f(t))\mathrm{e}^t$$

et comme f est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$, $g'(t) = a$, d'où :

$$g(t) = at + b.$$

La fonction g est bien affine (sur $\mathbb{R}_+$).

2. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f(t) = (at + b)\mathrm{e}^{-t}.$$

Or, à l'instant $t = 0$, l'alcool n'est pas encore dans le sang donc $f(0) = 0$:

$$b\mathrm{e}^{-t} = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

D'où $f(t) = at\mathrm{e}^{-t}$.

3. (a) Etudions les variations de f. Comme f est solution de (E), on a :

$$f'(t) = 5\mathrm{e}^{-t} - f(t) = 5\mathrm{e}^{-t} - 5t\mathrm{e}^{-t} = 5\mathrm{e}^{-t}(1 - t).$$

D'où :

$$f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 1.$$

La fonction f est croissante sur $[0\,,1]$ et décroissante sur $[1\,,+\infty[$. Elle admet donc un maximum en 1 et :

$$f(1) = \frac{5}{\mathrm{e}} \simeq 1{,}84 \quad \text{à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Le taux d'alcoolémie maximal est de $1{,}84\,\mathrm{gL}^{-1}$ atteint au bout d'une heure.

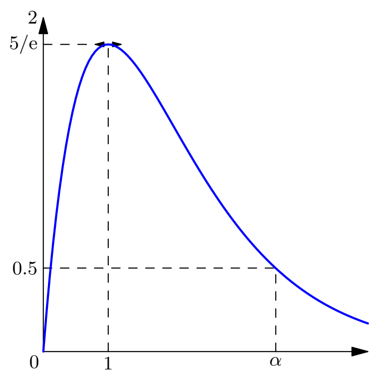


FIGURE 58.1 – Représentation graphique de la fonction f

(b) Nous devons résoudre l'inéquation :

$$f(t) \leq 0,5 \Leftrightarrow 5t\mathrm{e}^{-t} \leq 0,5 \Leftrightarrow t\mathrm{e}^{-t} \leq 0,1.$$

Ceci n'est pas possible formellement. Cependant, la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1\,,+\infty[$ et on a :

$$f(1) = \frac{5}{\mathrm{e}} > 0,5 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} 5t\mathrm{e}^{-t} = 0.$$

Le théorème de bijection assure qu'il existe un unique réel α de $[1\,,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0,5$. Le graphique permet de conjecturer :

$$\alpha \in]3\,,4[.$$

Ce qui peut se contrôle à la calculatrice :

$$f(3) \simeq 0{,}75 (> 0{,}5) \quad \text{et} \quad f(4) \simeq 0{,}37 (< 0{,}5).$$

On a donc bien $\alpha \in]3\,,4[$. Il faudra attendre 4 heures (à l'heure près par excès) pour pouvoir, par exemple, reprendre le volant...

□

5 Décharge d'un condensateur

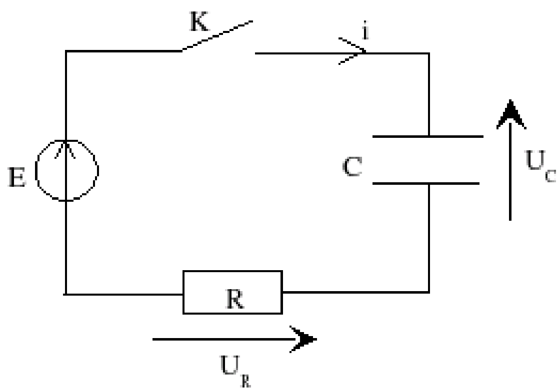


FIGURE 58.2 – Circuit RC

Solution. D'après la loi d'additivité des tensions, on a :

$$u_C + u_R = 0$$

(u_C et u_R désignent respectivement la tension aux bornes du condensateur et de la résistance). Notons $i(t)$ l'intensité du courant électrique dans le circuit à l'instant t. On sait que :

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} \quad \text{et} \quad u_R(t) = Ri(t) = R\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}.$$

D'où :

$$u'_C(t) = \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{RC}u_R(t) = -\frac{1}{RC}u_C(t).$$

On en déduit :

$$u_C(t) = K\mathrm{e}^{-t/RC} \quad (K \in \mathbb{R}).$$

La condition initiale $u_C(0) = 3$ nous donne $K = 3$, d'où :

$$u_C(t) = 3\mathrm{e}^{-t/RC}.$$

□

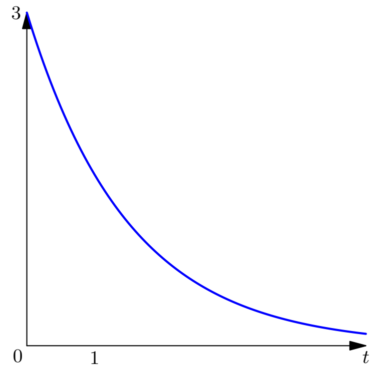


FIGURE 58.3 – Représentation graphique de u_C

6 Vitesse d'un parachutiste

Solution. 1. D'après la relation fondamentale de la dynamique, on a :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}.$$

En projetant les vecteurs sur un axe vertical, il vient :

$$mg - \frac{mgv^2}{25} = mv'.$$

On s'aperçoit que le problème est indépendant de la masse m du parachutiste avec son équipement.

$$v' = g\left(1 - \frac{v^2}{25}\right) = \frac{g}{25}(25 - v^2).$$

La fonction v est donc bien solution, sur $\mathbb{R}_+$, de l'équation différentielle :

$$v' = g\left(1 - \frac{v^2}{25}\right). \qquad (E)$$

2. La fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (car v l'est) et on a :

$$z' = -\frac{v'}{(v-5)^2} = \frac{g}{25}\frac{(v^2-25)}{(v-5)^2} = \frac{g}{25}\frac{v+5}{v-5} = \frac{gz(v+5)}{25}.$$

Or,

$$v = \frac{1}{z} + 5 \Leftrightarrow v + 5 = \frac{1}{z} + 10.$$

D'où :

$$z' = \frac{gz(\frac{1}{z}+10)}{25} = \frac{g}{25}(10z+1).$$

On en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$z(t) = C\mathrm{e}^{2gt/5} - \frac{1}{10}.$$

La condition initiale $z(0) = \frac{1}{50}$ donne $C - \frac{1}{10} = \frac{1}{50} \Leftrightarrow C = \frac{3}{25}$.

3. D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$v(t) = \frac{1}{\frac{3}{25}\mathrm{e}^{2gt/5} - \frac{1}{10}} + 5.$$

Comme $g > 0$, on a :

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{2gt/5} = +\infty,$$

d'où :

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = 5.$$

La vitesse du parachutiste se stabilise rapidement vers $5\,\mathrm{ms}^{-1}$.

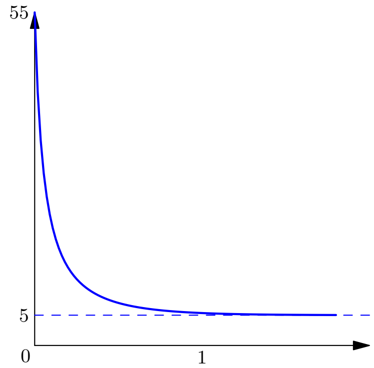


FIGURE 58.4 – Représentation graphique de v

□

LEÇON 59

Problèmes conduisant à l'étude de fonctions

Niveau, prérequis, références

Niveau Lycée

Prérequis Notions de fonctions, dérivées, limites, continuité, étude du signe d'une fonction

Références [141, 142, 143]

Contenu de la leçon

1 Plan d'étude d'une fonction

1.1 Domaine de définition, domaine d'étude

S'il n'est pas donné dans l'énoncé, il faut chercher le domaine (ou ensemble) de définition de la fonction à étudier. Ce peut être $\mathbb{R}$, un intervalle, ou une réunion d'intervalles.

- Les fonctions polynômes, sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse est définie sur $]-\infty\,,0[\,\cup\,]0\,,+\infty[$.
  Si l'expression de la fonction présente un dénominateur, celui-ci doit être *non nul*. En conséquence, les fonctions rationnelles sont définie pour toutes les valeurs qui n'annulent pas leur dénominateur.
- La fonction tangente $x \mapsto \tan x$ est définie sur $]-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\frac{\pi}{2}+2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$.
- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0\,,+\infty[$. Si l'expression de la fonction présente un radical, l'expression situé sous le radical doit être *positif ou nul*.
- La fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln x$ est définie sur $]0\,,+\infty[$. Si l'expression de la fonction présente un *logarithme*, l'expression situé dans le logarithme doit être *strictement positive*.
- La fonction exponentielle $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Chacune de ces conditions, ou contraintes, peut entraîner la résolution d'une équation ou d'une inéquation. Ces conditions ou contraintes peuvent se cumuler.

1.2 Parité, périodicité, conséquences graphiques

Des informations sur la parité/périodicité d'une fonction peuvent s'avérer intéressante pour éventuellement restreindre le domaine d'étude de la fonction. Même si le texte ne le précise pas, il est essentiel d'avoir procédé à une telle étude.

Parité *Si le domaine de définition n'est pas symétrique par rapport à* 0*, il est inutile de chercher à étudier la parité de* f*, car l'existence de* $f(x)$ *et de* $f(-x)$ *n'est pas simultanément assurée pour tout* x *de l'ensemble de définition.*

Pour trouver la parité d'une fonction :

- Calculer $f(-x)$ en remplaçant dans l'expression de la fonction f, x par $-x$.
- Simplifier (notamment avec les puissances (exemple : $(-x)^2 = x^2$, $(-x)^3 = -x^3$,...)).
- Si on aboutit à l'expression de $f(x)$, alors la fonction est *paire*.
- Sinon, regarder si on n'aboutit pas à l'expression de $-f(x)$ (le calculer éventuellement). Si c'est le cas, alors la fonction est *impaire*.
- Sinon, f *n'est ni paire ni impaire*.

En cas de parité ou d'imparité, il suffit d'étudier f seulement sur l'intervalle $[0\,,+\infty[$ ou $]-\infty\,,0]$, et de compléter son étude :

- par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées en cas de parité ;
- par symétrie par rapport à l'origine en cas d'imparité.

Périodicité Le caractère périodique de la fonction proviendra essentiellement du caractère périodique des fonctions trigonométriques (sinus, cosinus, tangente sont périodiques de période 2π), si l'expression de f en contient.

Pour démontrer que f est périodique de période T, calculer $f(x+T)$ en remplaçant dans l'expression de la fonction f, x par $x+T$ et montrer que l'on aboutit à l'expression de $f(x)$.
En cas de périodicité de la fonction f, si T est la période alors il suffira d'étudier f sur un intervalle d'amplitude T (de la forme $[x\,,x+T[$), de ne tracer qu'un « morceau » de la courbe représentative de f, et de compléter cette étude (respectivement ce tracé), par translations successives de vecteur $T\vec{\imath}$.

1 3 Limites et asymptote

Calculs de limites C'est *aux bornes* (finies ou infinies) de l'ensemble de définition de f que l'on étudie ses limites. Interviennent alors :
- les limites « usuelles » (tableau des limites usuelles) ;
- les opérations entre limites (limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée).

En cas de *forme indéterminée*, on utilise souvent les résultats :
- La limite en $\pm\infty$ d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré.
- La limite en $\pm\infty$ d'une fraction rationnelle (quotient de 2 polynômes) est celle du quotient simplifié des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.
- Pour les expressions faisant intervenir les radicaux (racines carrées), les méthodes employées suivent :
  - la factorisation par le terme du plus haut degré d'un polynôme figurant sous une racine carrée, ceci dans le but de « sortir de la racine » ce terme ;
  - la factorisation entre des termes « avec radicaux » et des termes « sans radicaux » ;
  - la multiplication par la quantité conjuguée en cas de forme indéterminée.

Asymptotes Connaître le comportement asymptotique d'une fonction aux bornes de son ensemble de définition permet d'aider à tracer sa courbe représentative.

asymptotes verticales S'il existe un nombre a de l'ensemble de définition tel que $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$. Il est alors essentiel d'étudier les limites de f « à droite et à gauche » de a ($\lim_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim_{x\to a^-} f(x)$). Les résultats diffèrent souvent.

asymptotes horizontales S'il existe un réel ℓ tel que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$, alors la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, $-\infty$ ou les deux.

asymptote oblique S'il existe deux nombres a et b tels que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$, alors la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, $-\infty$ ou les deux.

Enfin, si l'écriture de f se présente sous la forme $f(x) = ax+b+\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to\pm\infty} \varepsilon(x) = 0$ (c'est le cas dans l'exemple ci-dessus), alors puisque $f(x) - (ax+b) = \varepsilon(x)$, on a $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$, donc on peut affirmer que la droite d'équation $y = ax+b$ est *une asymptote oblique* à la courbe représentative de f.

Position de la courbe par rapport aux asymptotes Soit Δ une droite d'équation $y = ax+b$ asymptote (horizontale si $a = 0$ ou oblique si $a \neq 0$) à la courbe représentative de la fonction $\mathcal{C}_f$. Pour étudier la position relative de Δ et de $\mathcal{C}_f$, on doit étudier le signe de la différence $f(x) - (ax+b)$ (qui est le signe de $\varepsilon(x)$ dans le cas d'une asymptote oblique), signe qui dépend en général de x.
- Pour les valeurs de x telles que $f(x) - (ax+b) > 0$, c'est-à-dire $f(x) > (ax+b)$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de Δ...
- Pour les valeurs de x telles que $f(x) - (ax+b) < 0$, c'est-à-dire $f(x) < (ax+b)$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de Δ...

1 4 Variations de la fonction

On doit chercher les *intervalles* de $\mathcal{D}_f$ sur lesquels f est strictement croissante ou décroissante (voire constante).

Sans utiliser le calcul différentiel Certains résultats généraux permettent de conclure sur le sens de variations des fonctions :

- La somme de deux fonctions croissantes sur un même intervalle I est croissante sur cet intervalle I.
- La somme de deux fonctions décroissantes sur un même intervalle I est décroissante sur cet intervalle I.
- Si $f : I \to J$ et $g : J \to K$ ont même sens de variation, alors la composée $g \circ f$ est croissante. Si f et g ont des sens de variations contraires, alors leur composée est décroissante.

En utilisant les dérivées Déterminer les sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$ sur lesquels f est dérivable. Les polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$, les fonctions rationnelles sur chaque intervalle de leur ensemble de définition, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0\,,+\infty[$, les fonctions sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$.

Pour calculer la dérivée de f :

- En utilisant les résultats concernant les dérivées des fonctions usuelles (tableau des dérivées usuelles)
- En utilisant les résultats concernant les dérivées de somme, produit, quotient, compositions de fonctions...
- Dans le calcul de dérivée d'un quotient

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

on se retrouve avec un dénominateur strictement positif (quel que soit x appartenant à l'intervalle de dérivabilité, $(v(x))^2 > 0$). Alors la dérivée de f est du signe de $u'v - uv'$.

On essaiera de factoriser au maximum l'expression de $f'(x)$, le but étant d'en étudier le signe. On étudie le signe de $f'(x)$ en utilisant un tableau de signe et pour utiliser le théorème suivant :

Théorème 59.1. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :*
- *si la dérivée est positive sur I, alors la fonction est croissante sur I ;*
- *si la dérivée est négative sur I, alors la fonction est décroissante sur I ;*
- *si la dérivée est nulle en toute valeur de I, alors la fonction est constante sur I.*

On cherche les extrema locaux parmi les valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule en changeant de signe.

1 5 Tableau de variation

On consigne tous les résultats obtenus jusqu'à présent en un tableau de variations de f. Ce tableau comporte sur la première ligne :

- les bornes de l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$
- les valeurs pour lesquelles f n'est pas définie, discontinue ou non dérivable
- les valeurs pour lesquelles $f'(x)$ s'annule ou change de signe.

Sur la deuxième ligne figure le signe de $f'(x)$ (« + » ou « - ») sur les intervalles ou $f'(x)$ est de signe constant (en précisant par un « 0 » les valeurs pour lesquelles elle s'annule).

Sur la troisième ligne, et dans chacun des intervalles le sens de variation de la fonction, indiqué par une flèche ascendante $\nearrow$ si f est strictement croissante et descendante $\searrow$ si f est strictement décroissante.

On doit inscrire les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

On tracera une double barre verticale à cheval sur les 2e et 3e lignes, sous une valeur de la première ligne, pour indiquer que ni f ni f' ne sont définies en cette valeur.

Cependant, si f est définie en cette valeur, mais non dérivable, on se serait contenté de tracer cette double barre sur la ligne de f' (à savoir la 2e).

On peut préciser quelques points remarquables (extrema, valeurs particulières).

x	$-\infty$		-1			1			3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$\|\|$		$-$	0	$+$	
$f(x)$			$0{,}5$			$\|\|$	$+\infty$				$-\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\|\|$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$+\infty$	$\|\|$			$4{,}5$		

TABLE 59.1 – Exemple de tableaux de variations

1 6 Equations des tangentes

L'équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f au point de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(a, f(a))$ est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Remarque 59.2. Le *coefficient directeur* de la tangente au point a est la valeur du nombre dérivé $f'(a)$.

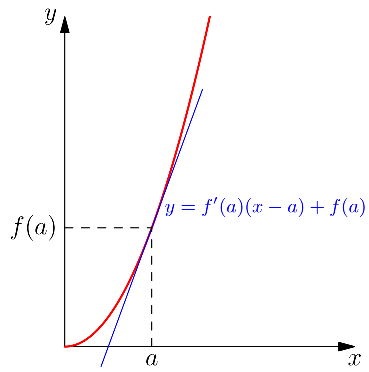


FIGURE 59.1 – Tangente à la fonction f au point a

1 7 Tracé de la courbe

Le repère, les axes Doivent toujours apparaître :
- les axes ;
- les vecteurs unitaires (attention à l'unité !) ;
- les flèches au bout des axes ;
- les noms des axes.

Si l'étude de f a montré par exemple que $f(x) > 0$ pour tout x appartenant à $\mathcal{D}_f$, alors seule la partie « des y positifs » nous intéresse. On fera donc coïncider l'axe des abscisses avec le bas de la page.

Tableau de valeurs Il est très utile de dresser un petit tableau des différentes valeurs de $f(x)$ pour différentes valeurs de x, ceci aidant à la précision du tracé de $\mathcal{C}_f$. Pour cela, il peut être utile d'employer une calculatrice.

Tracé des tangentes et des asymptotes Les tangentes et les asymptotes (si elles existent) aident au tracé de $\mathcal{C}_f$.

1 8 Résolution d'équations $f(x) = 0$

Il peut être demandé dans l'énoncé de démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et de donner un encadrement de α. Pour répondre à cette question, il faut faire figurer :

– La *continuité* de la fonction f sur l'intervalle considéré. Cette continuité peut découler de la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle considéré.
– La stricte monotonie (croissance ou décroissance) de la fonction f sur l'intervalle considéré, afin d'assurer l'*unicité* de la solution.
– L'appartenance de 0 à l'intervalle d'arrivée, ce qui assure l'existence de la solution α.

Pour trouver un encadrement de la solution α de l'équation $f(x) = 0$, on peut utiliser la fonction `ZOOM` d'une calculatrice graphique, ou des tableaux de valeurs « de plus en plus précis » (jusqu'à obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} (par exemple)).

Un exemple :

```
X      | Y_1
31     | -7509
32     | -5732
33     | -3763
34     | -1596
35     | 775
36     | 3356
37     | 6153
```

puis

```
X      | Y_1
34.2 | -1138
34.3 | -906.4
34.4 | -672.4
34.5 | -436.4
34.6 | -198.3
34.7 | 41.923
34.8 | 284.19
```

$f(34{,}6) < 0$ et $f(34{,}7) > 0$ donc

$$34,6 < \alpha < 34,7.$$

2 Problèmes conduisant à l'étude de fonctions

Exercice 59.3. La partie I est l'étude d'une fonction auxiliaire g nécessaire à l'étude de la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1 + \ln x}{x}.$$

L'étude de la fonction f fait l'objet de la partie II. La partie III est l'étude de deux suites numériques associées.

Partie I On considère la fonction numérique g définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 2\ln x.$$

1. Etudier le sens de variation de g.
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,,+\infty[$.

Partie II On considère la fonction numérique f définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1 + \ln x}{x}.$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm)

1. Déterminer la limite f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2. (a) Déterminer la limite f en $+\infty$.

   (b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

   (c) Déterminer la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) sur $]0\,, +\infty[$. Montrer en particulier que (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ en un point A que l'on déterminera.

3. Etudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.

4. Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe $(\mathcal{C})$ où la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ est parallèle à (Δ). Préciser les coordonnées de B.

5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α. Justifier l'encadrement :

$$0{,}34 < \alpha < 0{,}35.$$

6. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites (Δ) et (T).

Partie III On considère la suite numérique (x_n) définie par $x_n = \mathrm{e}^{(n-2)/2}$ pour tout nombre entier naturel n.

1. (a) Montrer que (x_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

   (b) Montrer que (x_n) est une suite croissante.

2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$a_n = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

   (a) Donner une interprétation géométrique de a_n.

   (b) Montrer que $a_n = \frac{2n+1}{2}$ pour tout nombre entier naturel n. En déduire que (a_n) est une suite arithmétique.

Exercice 59.4. Une entreprise fabrique et vend un liquide L. Une étude a permis de modéliser le coût moyen de production par :

$$f(x) = 0{,}5x + \frac{8}{x}, \qquad \text{où } x > 0.$$

Le coût moyen $f(x)$ est exprimé en milliers d'euros et la quantité produite x en hectolitres. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan (unité 1 cm).

1. **Etude de la fonction coût moyen**

   (a) Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,, +\infty[$.

   (b) Déterminer les limites en f en 0 et en $+\infty$.

   (c) Donner le tableau de variations de f.

   (d) Montrer que la droite D d'équation $y = 0{,}5x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$. Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à D.

   (e) Construire $\mathcal{C}$ ainsi que D.

2. **Seuils de rentabilité pour l'entreprise**

   L'entreprise ne peut être bénéficiaire que si le prix de vente de l'hectolitre est supérieur au coût moyen de fabrication. Le prix de vente de l'hectolitre $p(x)$ est fonction de la quantité x vendue :

$$p(x) = \begin{cases} -0{,}8x + 10 & \text{si } x \in \,]0\,, 10[\\ 2 & \text{si } x \in [10\,, +\infty] \end{cases}$$

   où $p(x)$ est exprimé en milliers d'euros et x en hectolitres.

   (a) On note P la représentation graphique de la fonction p. Tracer P dans le repère précédent. La fonction p est-elle une fonction continue ? (Justifier à partir du graphique).

(b) Déterminer graphiquement l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise soit bénéficiaire.

(c) Confirmer le résultat précédent par le calcul (on pourra se ramener à une inéquation du second degré).

Exercice 59.5. **Partie A** Soit g la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - 1200x - 100.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$. Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[20\,,40]$. Donner, en justifiant, une valeur approchée de α à l'unité près.
3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (on prendra 1 cm pour 5 unités en abscisse et 1 cm pour 20 unités en ordonnée).

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que pour tout x de $]0\,,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

   où g est la fonction définie dans la partie A.
3. Etudier les variations de f.
4. Montrer que la droite D d'équation $y = x + 50$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
5. Construire $\mathcal{C}$ et D sur le même graphique.
6. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 130$. On donnera des valeurs approchées des solutions à l'unité près.

Partie C Le coût total de fabrication d'une quantité x d'un produit, exprimée en centaines d'unités, est définie sur $]0\,,100[$ par :

$$C(x) = \frac{x^3 + 50x^2 + 1200x + 50}{x}$$

$C(x)$ étant exprimé en centaines d'euros. Le coût moyen de fabrication par centaines d'objets est donc défini par :

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

1. Déterminer la quantité d'objets, à la centaine près, à fabriquer pour avoir un coût moyen minimum.
2. On suppose que le prix de vente d'une centaine d'objets est égale à 13000 €. Déterminer graphiquement, à la centaine près, le nombre minimum et le nombre maximum d'objets que l'entreprise doit fabriquer pour être rentable.

Exercice 59.6. Le but de cet exercice est d'étudier la fonction tangente et d'en établir quelques propriétés.

1. Résoudre, sur $]-\pi\,,\pi]$ l'équation :

$$\cos x = 0.$$

   En déduire toutes les solutions, sur $\mathbb{R}$, de cette équation.

2. On considère la fonction tangente, notée $\tan$, définie par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{pour } x \in D \text{ où } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

(a) Etudier la parité de cette fonction.

(b) Démontrer que la fonction tangente est π-périodique.

(c) Expliquer pourquoi on peut se contenter d'étudier la fonction tangente sur l'intervalle $I = [0\,, \frac{\pi}{2}[$.

3. Etudier les limites de la fonction tangente en 0^+ et en $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$. En déduire que la courbe C admet une asymptote Δ dont on précisera la nature et l'équation.

4. Compléter le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan x$				

5. Montrer que, pour tout $x \in I$:

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2 x.$$

En déduire le tableau de variations de la fonction tangente sur l'intervalle I.

6. (a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

(b) Démontrer que, pour tout $x \in I$, on a :

$$\tan x \geq x$$

(pour cela, on pourra étudier les variations de la fonction g définie sur I par $g(x) = \tan x - x$).

(c) En déduire la position relative de la courbe C par rapport à sa tangente T.

7. Tracer les droites Δ et T puis la courbe C (on se placera entre les bornes -2π et 2π).

8. On rappelle que pour tous réels a et b, on a les formules d'additions suivantes :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

En déduire une formule liant $\tan(a+b)$ à $\tan a$ et $\tan b$ (pour des réels a et b tels que $a \in D, b \in D$ et $a+b \in D$).

9. Démontrer que pour tout $a \in]0\,, \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\tan a = \frac{1 - \cos(2a)}{\sin(2a)}$$

En déduire la valeur exacte de $\tan \frac{\pi}{8}$ et de $\tan \frac{\pi}{12}$.

Compléments

Solution à l'exercice 59.3. **Partie I** g est la fonction numérique définie sur $]0\,, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 2\ln x.$$

1. g est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et on a :

$$g'(x) = 2x - 2 \times \frac{1}{x} = 2\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{2(x^2-1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}.$$

   Comme $x \in\ ]0\,,+\infty[$, on a $x > 0$ et $x+1 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $(x-1)$. On en déduit que $g'(x) < 0$ pour $x \in\ ]0\,,1[$ et $g'(x) > 0$ pour $x]1\,,+\infty[$. Donc : g est décroissante sur $]0\,,1[$ et croissante sur $]1\,,+\infty[$.
2. On a $g(1) = 1^2 - 2\ln 1 = 1$. D'après le sens de variation de g, on a alors $g(x) \geq 1$ pour tout $x > 0$. Donc $g(x) > 0$ pour tout $x \in\ ]0\,,+\infty[$.

Partie II f est la fonction numérique définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}.$$

$(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).

1. On peut écrire

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}(1+\ln x).$$

   On sait que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{donc} \lim_{x\to 0^+} 1+\ln x = -\infty,$$

   d'autre part

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{donc} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}(1+\ln x) = -\infty.$$

   De plus $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2} = 0$ et par conséquent :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2} + \frac{1}{x}(1+\ln x) = -\infty.$$

   On peut en déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ a pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 0$ (Axe Oy).
2. (a) On peut écrire :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}.$$

   On sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0\ ; \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty.$$

   Donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = +\infty.$$

   (b) On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0.$$

   Donc : la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

   (c) On a

$$f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1+\ln x}{x}.$$

   Donc :

$$f(x) = \frac{x}{2} \Leftrightarrow 1+\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1}.$$

Donc : (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ au point A d'abscisses e^{-1} et d'ordonnée $\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}$. $x \in]0\,,+\infty[$ donc $f(x) - \frac{x}{2}$ est du signe $1 + \ln x$. La fonction $\ln$ étant strictement croissante, on a alors :

$$1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-1}$$

et

$$1 + \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow x < \mathrm{e}^{-1}.$$

On en déduit que $f(x) > \frac{x}{2}$ pour $x > \mathrm{e}^{-1}$ et $f(x) < \frac{x}{2}$ pour $x < \mathrm{e}^{-1}$. Sur $]0\,,\mathrm{e}^{-1}[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessous de (Δ) et sur $]\mathrm{e}^{-1}\,,+\infty[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (Δ).

3. Pour tout $x \in]0\,,+\infty[$, on a

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1 + \ln x}{x}.$$

f est donc la somme et le quotient de fonctions dérivables sur $]0\,,+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{x}x - (1 + \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 2\ln x}{2x^2}.$$

Donc $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$. D'après la partie I, on sait que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0\,,+\infty[$ donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0\,,+\infty[$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$. On peut donner le tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
f	$\|\|$		$+\infty$
	$\|\|$	$\nearrow$	
	$\|\|$ $-\infty$		

4. La tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisses b a pour coefficient directeur $f'(b)$. Cette tangente est parallèle à (Δ) si et seulement si elle a le même coefficient que (Δ).

$$f(b) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{b^2 - 2\ln b}{2b^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b^2 - 2\ln b = b^2 \Leftrightarrow \ln b = 0 \Leftrightarrow b = 1.$$

Il existe donc un point B et un seul où la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ est parallèle à (Δ). B a pour abscisse 1 et pour ordonnée $f(1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

5. f est une fonction continue et strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$. Donc pour tout réel k dans l'intervalle $]\beta\,,\gamma[$ où

$$\beta = \lim_{x\to 0^+} f(x) \quad \text{et} \quad \gamma = \lim_{x\to+\infty} f(x),$$

l'équation $f(x) = k$ a une solution unique. Comme $0 \in]\beta\,,\gamma[= \mathbb{R}$, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α. La calculatrice donne $f(0,34) \approx -0,06$ donc $f(0,34) < 0$ et $f(0,35) \approx 0,03$ donc $f(0,35) > 0$. On en déduit que $f(0,34) < f(\alpha) < f(0,35)$ et comme f est strictement croissante : $0,34 < \alpha < 0,35$.

6. Voir la figure 59.2

Partie III La suite numérique (x_n) est définie par $x_n = \mathrm{e}^{(n-2)/2}$ pour tout nombre entier naturel n.

1. (a) On peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \exp{(n + 1 - 2)/2} = \mathrm{e}^{(n-2)/2+1/2} = \mathrm{e}^{(n-2)/2} \times \mathrm{e}^{1/2} = x_n \times \mathrm{e}^{1/2}.$$

On en déduit que (x_n) est une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{1/2}$. Son premier terme est $x_0 = \mathrm{e}^{(0-2)/2}$ donc $x_0 = \mathrm{e}^{-1}$.

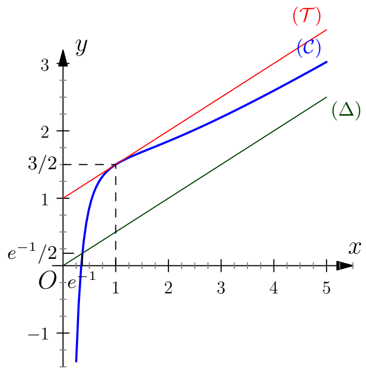


FIGURE 59.2 – Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$ et tangentes

(b) (x_n) est une suite géométrique de premier terme positif et de raison positive, donc (x_n) est une suite à termes positifs. On a $\mathrm{e}^{1/2} \geq 1$ donc $x_n \times \mathrm{e}^{1/2} \geq x_n$, c'est-à-dire $x_{n+1} \geq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite (x_n) est une suite croissante.

2. Pour tout entier naturel n, on a :

$$a_n = 4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2} \right) \mathrm{d}x.$$

(a) D'après la partie II, on sait que $f(x) - \frac{x}{2} \geq 0$ pour $x \geq \mathrm{e}^{-1}$. Comme la suite (x_n) est croissante, on a :

$$\mathrm{e}^{-1} \leq x_n \leq x_{n+1}.$$

Donc $\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2} \right) \mathrm{d}x$ est l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équations $x = x_n$ et $x = x_{n+1}$. L'unité du repère étant 2 cm, l'unité d'aire est 4 cm^2.

$$a_n = 4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2} \right) \mathrm{d}x$$

est l'aire, en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équation $x = x_n$ et $x = x_{n+1}$.

(b)

$$a_n = 4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2} \right) \mathrm{d}x = 4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\frac{1 + \ln x}{x} \right) \mathrm{d}x = 4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \ln x \right) \mathrm{d}x$$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour primitive $x \mapsto \ln x$. D'autre part, $\frac{1}{x} \times \ln x$ est de la forme $u'(x) \times u(x)$ donc $\frac{1}{x} \ln x$ a pour primitive $\frac{1}{2} u(x)^2 = \frac{1}{2} (\ln x)^2$. On a donc :

$$a_n = \left[4 \ln x + 2 (\ln x)^2 \right]_{x_n}^{x_{n+1}} = 4 \ln x_{n+1} + 2 (\ln x_{n+1})^2 - 4 \ln x_n - 2 (\ln x_n)^2.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
a_n &= 4 \ln \mathrm{e}^{(n-1)/2} + 2 \left(\ln \mathrm{e}^{(n-1)/2} \right)^2 - 4 \ln \mathrm{e}^{(n-2)/2} - 2 \left(\ln \mathrm{e}^{(n-2)/2} \right)^2 \\
&= 4 \times \frac{n-1}{2} + 2 \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 - 4 \times \frac{n-2}{2} - 2 \left(\frac{n-2}{2} \right)^2 \\
&= 2n - 2 + \frac{n^2 - 2n + 1}{2} - 2n + 4 - \frac{n^2 - 4n + 4}{2} \\
&= 2 + \frac{n^2 - 2n + 1 - n^2 + 4n - 4}{2} = 2 + \frac{2n - 3}{2} = \frac{4 + 2n - 3}{2}
\end{aligned}$$

donc $a_n = \frac{2n+1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $a_n = n + \frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$a_{n+1} = n + 1 + \frac{1}{2} = n + \frac{1}{2} + 1 = a_n + 1, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que (a_n) est une suite arithmétique de raison 1.

$\square$

Solution à l'exercice 59.4. 1. **Etude de la fonction coût moyen**

(a) La fonction f est une fonction rationnelle, elle est dérivable sur $]0\,,+\infty[$. On sait que $f(x) = 0,5x + \frac{8}{x}$ donc :

$$f'(x) = 0,5 - \frac{8}{x^2} = \frac{0,5x^2 - 8}{x^2} = \frac{0,5(x^2 - 16)}{x^2} = \frac{0,5(x-4)(x+4)}{x^2}$$

$x^2 > 0$ pour tout réel x dans $]0\,,+\infty[$, le signe de $f'(x)$ est donc le signe du trinôme $0,5(x-4)(x+4)$. On a donc $f'(x) < 0$ pour tout $x \in\,]0\,,4[$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in\,]4\,,+\infty[$. Donc : f est strictement décroissante sur $]0\,,4[$ et strictement croissante sur $]4\,,+\infty[$.

(b) $\lim_{x\to 0} 0,5x = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{8}{x} = +\infty$ donc :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 0,5x + \frac{8}{x} = +\infty.$$

De plus $\lim_{x\to+\infty} 0,5x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{8}{x} = 0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 0,5x + \frac{8}{x} = +\infty.$$

(c) On a

$$f(4) = 0,5 \times 4 + \frac{8}{4} = 2 + 2 = 4.$$

On peut donner le tableau de variations de f :

x	0			4		1
$f'(x)$	$\|\|$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$\|\|$	$+\infty$				$+\infty$
	$\|\|$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$\|\|$			4		

(d) On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 0,5x = \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{x} = 0.$$

Donc : la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 0,5x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ quand x tend vers $+\infty$. Pour tout réel x dans $]0\,,+\infty[$, on a $x > 0$ donc $\frac{8}{x} > 0$ donc $f(x) - 0,5x > 0$ donc $f(x) > 0,5x$. On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ se trouve au-dessus de la droite $\mathcal{D}$.

(e) Voir la figure 59.3.

2. **Seuils de rentabilité pour l'entreprise**

(a) P étant la représentation graphique de la fonction ρ, elle est constituée par
– le segment de droite d'équation $y = -0,8x + 10$ pour $x \in\,]0\,,10[$ (on peut tracer ce segment en utilisant les points $A(0,10)$ et $B(10,2)$).
– la demi-droite d'équation $y = 2$ pour $x \in [10\,,+\infty[$.
La représentation graphique de ρ peut être tracée d'un seul trait (sans lever le crayon de la feuille), on en déduit que la fonction ρ est une fonction continue.

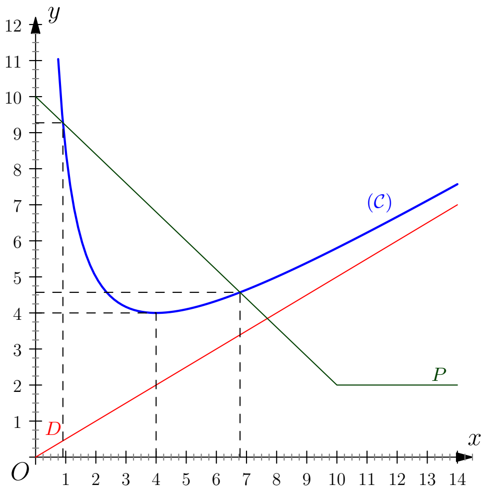


FIGURE 59.3 – Représentation graphique

(b) L'entreprise est bénéficiaire lorsque le prix est supérieur au coût moyen, c'est-à-dire lorsque la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la courbe P. On obtient graphiquement que l'entreprise est bénéficiaire lorsque $x \in [0.9\,,6.8]$.

(c) Le tableau de variations de f justifie que $f(x) > 2$ pour tout $x \in \left]0\,,+\infty\right[$. Comme $\rho(x) = 2$ pour tout $x \geq 10$, l'entreprise ne peut pas être bénéficiaire lorsque $x \geq 0$. Pour $x \in \left]0\,,10\right[$, on peut écrire :

$$f(x) \leq \rho(x) \Leftrightarrow 0,5x + \frac{8}{x} \leq -0,8x + 10 \Leftrightarrow 1,3x - 10 + \frac{8}{x} \leq 0.$$

Sachant que x est strictement positif, on obtient, en multipliant par x :

$$1,3x^2 - 10x + 8 \leq 0$$

$1,3x^2 - 10x + 8$ est un trinôme du second degré dont le discriminant est :

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1,3 \times 8 = 100 - 41,6 = 58,4$$

On a donc $\Delta > 0$. On en déduit que ce trinôme a deux racines qui sont :

$$\alpha = \frac{10 - \sqrt{58,4}}{2,6} \approx 0,9 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{10 + \sqrt{58,4}}{2,6} \approx 6,8.$$

Ces deux racines étant dans l'intervalle $\left]0\,,10\right[$, on peut conclure que : $f(x) \leq \rho(x)$ pour $x \in [\alpha\,,\beta]$. On a donc confirmé par le calcul le résultat de la question précédente.

□

Solution à l'exercice 59.5. **Partie A** g est définie sur $\left[0\,,+\infty\right[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1200x - 100.$$

1. La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré. Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty.$$

g est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\left[0\,,+\infty\right[$:

$$g'(x) = 3x^2 - 1200 = 3(x^2 - 400) = 3(x - 20)(x + 20)$$

$3x^2 - 1200$ est un trinôme du second degré dont les racines sont -20 et 20. On peut donner son signe en utilisant la règle du signe du trinôme. On en déduit que g est strictement décroissante sur $[0\,,20]$ et strictement croissante sur $[20\,,+\infty[$. On peut alors donner le tableau de variations de g :

x	0		20		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	-100	$\searrow$	$g(20)$	$\nearrow$	$+\infty$

On a :

$$g(0) = -100 \quad \text{et} \quad g(20) = 8000 - 24000 - 100 = -16100.$$

2. On a :

$$g(20) = -16100 \quad \text{et} \quad g(40) = 15900.$$

g est continue et strictement croissante sur $[20\,,40]$ et prend ses valeurs dans $[-16100\,,15900]$. Comme $0 \in [-16100\,,15900]$, on en déduit que l'équation $g(x) = 0$ a une solution α dans $[20\,,40]$.
En utilisant une calculatrice, on peut remarquer :

$$g(34) = -1596 \quad \text{et} \quad g(35) = 775.$$

g est strictement croissante sur $[20\,,40]$: $g(34) < 0$ et $g(35) > 0$ donc $34 < \alpha < 35$. α a pour valeur approchée 34 à l'unité près.

3. Sur l'intervalle $[0\,,20]$, g est strictement décroissante et $g(0) = -100$ donc $g(0) < 0$. On en déduit que $g(x) < 0$ pour tout $x \in [0\,,20]$. Sur l'intervalle $[20\,,+\infty[$, g est strictement croissante et $g(\alpha) = 0$. Donc si $20 \leq x < \alpha$, on a $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, on a $g(x) > 0$. Donc $g(x) < 0$ pour $x \in [0\,,\alpha[$, $g(x) = 0$ pour $x = \alpha$ et $g(x) > 0$ pour $x \in]\alpha\,,+\infty[$.

Partie B f est définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2}.$$

1. $\lim_{x\to 0^+} 1200x + 50 = 50$ et $\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$ par valeurs supérieurs ($x^2 > 0$). Donc :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1200x + 50}{x^2} = +\infty.$$

D'autre part, $\lim_{x\to 0^+} x + 50 = 50$, donc

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$

De plus :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1200x + 50}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1200x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1200}{x} = 0.$$

D'autre part, $\lim_{x\to+\infty} x + 50 = +\infty$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2. f est une fraction rationnelle, donc elle est dérivable sur son ensemble de définition. $f(x) = x + 50 + \frac{1200x+50}{x^2}$, donc :

$$f'(x) = 1 + \frac{1200 \times (x^2) - (1200x + 50)(2x)}{(x^2)^2} = 1 + \frac{x(1200x - 2400x - 100)}{x^4} = 1 + \frac{-1200x - 100}{x^3}$$

donc, pour tout $x \in]0\,,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{x^3 - 1200x - 100}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}.$$

3. Pour tout $x \in]0\,,+\infty[$, on a $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. En utilisant les résultats de la partie A, on obtient le signe de $f'(x)$ et on peut donner le tableau de variations de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

On sait que $\alpha = 34$ donc $f(\alpha) \approx f(34) \approx 119$.

4. On a $f(x) = x + 50 + \frac{1200x+50}{x^2}$ et on a vu que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1200x + 50}{x^2} = 0.$$

On en déduit que la droite D d'équation $y = x + 50$ est asymptote à $\mathcal{C}$ quand x tend vers $+\infty$.

5. Voir la figure 59.4

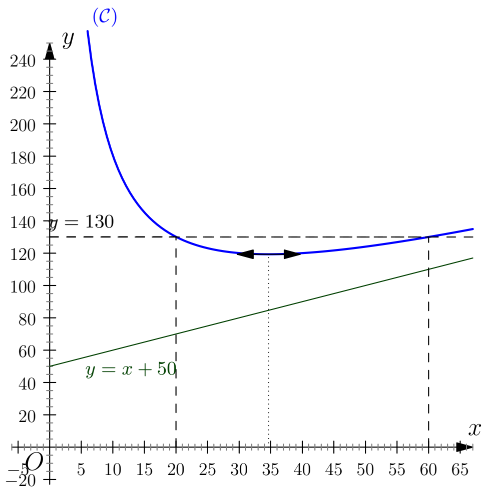


FIGURE 59.4 – Représentation graphique de f et asymptote D

Les solutions de l'équation $f(x) = 130$ sont les abscisses des points de la droite d'équation $y = 130$ et de la courbe $\mathcal{C}$. On observe graphiquement que l'équation $f(x) = 130$ a deux solutions qui sont environ 20 et 60.

Partie C 1. Pour $x \in]0\,,100[$, on a :

$$C(x) = \frac{x^3 + 50x^2 + 1200x + 50}{x}$$

et

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^3 + 50x^2 + 1200x + 50}{x^2} = x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2} = f(x).$$

D'après les variations de la fonction f obtenues dans la partie B, le coût moyen minimum est obtenu pour α centaines objets. Sachant que $\alpha = 34$, on en déduit que, pour avoir un coût moyen minimum, il faut fabriquer environ 3400 objets.

2. On suppose que le prix de vente d'une centaine d'objets est 13000 €, c'est-à-dire 130 centaine d'euros. Pour que l'entreprise soit bénéficiaire, il faut que le coût moyen de chaque centaine d'objets soit inférieur à 130 centaines d'euros, c'est-à-dire $C_M(x) \leq 130$ ou encore $f(x) \leq 130$. D'après le graphique de la partie B, $f(x) \leq 130$, pour $x \in [20\,,60]$. Les quantités étant exprimées en centaines d'objets, on en déduit que l'entreprise est rentable lorsqu'elle fabrique au maximum 2000 objets et au maximum 6000 objets.

□

Solution à l'exercice 59.6. 1. On a :

$$S_{]-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}.$$

D'où :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Ce que l'on peut encore écrire :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. (a) D est un ensemble symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in D$, on a :

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$

Ce qui prouve que la fonction tangente est impaire sur D.

(b) Pour tout $x \in D$, on a $x + \pi \in D$ et :

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

La fonction tangente est donc π-périodique.

(c) Comme la fonction tangente est π-périodique, on peut se contenter de l'étudier sur une période par exemple $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$. Comme elle est, de plus, impaire, on peut encore couper l'intervalle d'étude en deux et ne l'étudier que sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$. L'étude sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,0\right]$ s'en déduira par rapport à l'origine du repère.

3. On sait que :

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$$

Donc, par quotient :

$$\lim_{x\to 0^+} \tan x = 0$$

On sait que :

$$\lim_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sin x = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \cos x = 0$$

avec $\cos x > 0$. Donc, par quotient :

$$\lim_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty.$$

La courbe C admet donc une asymptote verticale Δ d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.

4. D'après les valeurs remarquables de sinus et de cosinus, on a :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

5. La fonction $\tan$ est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u = \sin$ et $v = \cos$. Sa dérivée $\tan'$ sera donc égale à $\frac{u'v - uv'}{v^2}$, ce qui donne pour $x \in I$:

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}.$$

Et comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, il vient :

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Par ailleurs,

$$1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

D'où :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2 x.$$

Sens de variation puisque $\frac{1}{\cos^2 x}$ est strictement positif pour tout réel x de I, on en déduit que la fonction tangente est strictement croissante sur I :

x	0 $\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
signe de $\tan'$	$+$
variations de $\tan$	$0 \nearrow +\infty$

6. (a) Une équation de la tangente à une courbe représentant une fonction f dérivable en x_0 est donnée par :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Avec $x_0 = 0$, cela donne : $y = f'(0)x + f(0)$. Ici, nos avons $\tan 0 = 0$ et $\tan' 0 = 1$ d'où :

$$T : y = x.$$

(b) La fonction g est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x.$$

Donc g est strictement croissante sur I.

(c) En conséquence, la courbe C est au dessus de sa tangente T sur I.

7. A partir de la courbe de la fonction tangente sur I, on complète par symétrie (par rapport à O) pour obtenir la courbe sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ puis par translation de vecteur $k\pi\vec{\imath}$ ($k \in \mathbb{Z}$) pour obtenir les autres morceaux.

8. On a, pour tous réels a et b tels que $a + b \in D$:

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}.$$

Comme $a \in D$ et $b \in D$, on peut diviser numérateur et dénominateur par $\cos a \cos b$ (qui est non nul) :

$$\tan(a+b) = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

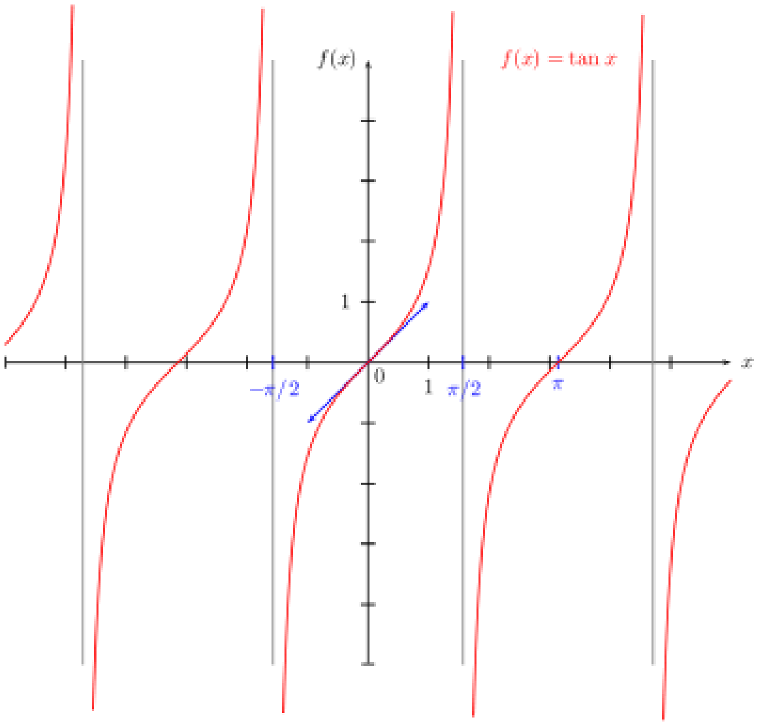


FIGURE 59.5 – Représentation graphique de $x \mapsto \tan x$

9. Partons du membre de droite. D'après les formules d'additions appliquées avec $b = a$, on obtient :

$$\frac{1-\cos(2a)}{\sin(2a)} = \frac{1-(\cos^2 a - \sin^2 a)}{2\sin a\cos a} = \frac{(1-\cos^2 a)+\sin^2 a}{2\sin a\cos a} = \frac{2\sin^2 a}{2\sin a\cos a} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a.$$

En particulier avec $a = \frac{\pi}{8}$, cela donne :

$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}-1$$

et avec $a = \frac{\pi}{12}$, cela donne :

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2-\sqrt{3}.$$

$\square$

LEÇON

60 Développements limités

Niveau, prérequis, références

Niveau BTS

Prérequis Dérivée d'une fonction

Références [144, 145]

Contenu de la leçon

1 Introduction

1.1 Dérivée

Remarque 60.1. Nous cherchons à approcher, localement, une fonction par un polynôme.

La définition suivante nous rappelle que nous savons déjà le faire en degré 1.

Théorème 60.2. *Soit I un intervalle, soit $f : I \to \mathbb{R}$, et soit x_0 un point intérieur à I. On dit que f est* dérivable *en x_0 s'il existe un nombre a et une fonction ε vérifiant :*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + ah + h\varepsilon(h)$$

où $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Remarque 60.3. Ici le polynôme d'approximation est $P(h) = ah$ et le reste est $h\varepsilon(h)$. Graphiquement, ceci signifie que l'on approche au voisinage de x_0 la courbe de f par sa tangente en x_0.

1.2 Compléments

Définition 60.4 (Classe)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est* de classe $\mathcal{C}^n$ *si f est n fois dérivable sur I et si ses n premières dérivées sont continues sur I.*

Remarque 60.5. Dans la définition précédente, n peut prendre la valeur ∞, avec une signification évidente.

Proposition 60.6. *Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polynôme. Alors P est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, noté $P \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, et l'on a la formule de Taylor des polynômes :*

$$P(x) = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots + P'(0) + P(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

2 Formules de Taylor

2.1 Formules de Taylor avec reste intégral

Théorème 60.7. *Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors :*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Définition 60.8 (Partie principale, reste intégral)**.** *Le polynôme*

$$f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

est appelé partie principale, *et l'intégrale* $\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$ *est appelée* reste intégral *d'ordre* n*.*

2 2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 60.9. *Soit* $f\colon [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *une application de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$*, et soit* M *le maximum de* $\left|f^{(n+1)}\right|$ *sur* $[a\,,b]$*. Alors :*

$$\left| f(a) - \left[f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right] \right| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Remarque 60.10. Cette formule permet de contrôler l'erreur commise lors de l'approximation de $f(b)$ par la partie principale (polynôme).

2 3 Formule de Taylor-Young

Théorème 60.11. *Soit* $I = [\alpha\,,\beta]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$*, soit* a *un point intérieur à* I*, et soit* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *une application de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$*. Alors :*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!} + h^n\varepsilon(h) \quad \textit{avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0.$$

Remarque 60.12. Dans cette formule, on ne connaît pas explicitement le reste $h^n\varepsilon(h)$. On sait juste qu'il tend plus vite vers 0 que h^n, ce qui signifie que si h est petit, ce reste est négligeable.

Définition 60.13 (Développement limité)**.** *Lorsqu'on a écrit une fonction grâce à la formule du théorème 60.11, on dit que l'on a effectué un* développement limité *(DL) de* f *en* a *d'ordre* n*.*

Remarques 60.14.

1. Le DL d'une fonction est unique.
2. Le $\varepsilon(h)$ du reste est une notation générique : il signifie « une fonction qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0 ». Ce ε ne sera pas forcément le même d'une fonction à l'autre !
3. On veut souvent le DL d'une fonction en 0 : la formule du théorème 60.11 devient alors :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

3 Opérations sur les développements limités

On peut obtenir assez facilement des DL de fonctions en les décomposant. On se contente de traiter des DL en 0.

3 1 Somme

Elle se fait naturellement. Par exemple, si

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 - 5x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad g(x) = -x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

alors

$$f(x) + g(x) = 1 + 3x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

On ne peut obtenir qu'un DL d'ordre le plus faible des deux (ici d'ordre 2, alors que celui de f est d'ordre 3).

3.2 Produit

Il suffit de multiplier classiquement les deux DL, en mettant dans le reste les termes de degrés supérieurs au plus faible des deux ordres. Prenons un exemple :

$$f(x) = x + x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 2x + x\varepsilon(x).$$

On obtient :

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (x + x^2 + x^2\varepsilon(x))(2x + x\varepsilon(x)) \\ &= 2x^2 + x^2\varepsilon(x) + 2x^3 + x^3\varepsilon(x) + 2x^3\varepsilon(x) + x^3\varepsilon(x)\varepsilon(x) = 2x^2 + x^2\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Attention ! Les ε ne sont pas les mêmes ! On ne développe pas les termes de degrés supérieurs à 2.

3.3 Quotient

Au niveau BTS, cette méthode n'est pas exigible sans indications. Il faut effectuer une division par puissances croissantes des parties principales des deux DL. Voir le DL de la fonction tangente pour un exemple.

3.4 Intégration

On intègre terme par terme. Plus précisément, si

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n\varepsilon(x)$$

et si F est une primitive de f, alors

$$F(x) = F(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x).$$

Voir le DL de la fonction logarithme pour un exemple. La preuve de cette affirmation se fait simplement en effectuant le DL de F par la formule de Taylor-Young.

3.5 Composition

Au niveau BTS, cette méthode n'est pas exigible sans indications. Pour obtenir un DL de $f \circ g$, on substitue le DL de g dans celui de f. Voir la remarque sur $(\ln \circ \exp)$ dans le DL de la fonction logarithme pour un exemple.

4 Développements limités usuels

Ce sont les DL en 0 qui sont au programme.

4.1 Exponentielle

Comme $\exp' = \exp$ et $\mathrm{e}^0 = 1$, la formule de Taylor-Young donne (pour tout n) :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

4.2 Logarithme

On rappelle que :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(x).$$

On intègre tout ça et on obtient (en se souvenant que $\ln(1+0)=0$) :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$$

On remarque que

$$\ln\left[1+\left(t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+t^n\varepsilon(t)\right)\right] = \cdots = t + t^n\varepsilon(t)$$

en remplaçant x par $\left(t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+t^n\varepsilon(t)\right)$ dans la formule précédente (évident car $\ln(\mathrm{e}^t)=t$).

4 3 Puissance

On peut calculer que :

$$[(1+x)^\alpha]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

La formule de Taylor-Young donne :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x).$$

4 4 Fonctions trigonométriques

Les dérivées successives du (co)sinus, sont, soit un sinus, soit un cosinus. La formule de Taylor-Young donne :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x),$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x).$$

Remarquons que :

1. en intégrant $\cos(x)$, on obtient bien $\sin(x)$;
2. le DL de $\sin(x)$ ne comporte que des puissances impaires (le sinus est impair !) ;
3. le DL de $\cos(x)$ ne comporte que des puissances paires (le cosinus est pair !) ;
4. on retrouve la formule bien connue $\sin(x) \simeq x$ si x est petit ;
5. on pourrait retrouver ces DL à partir des formules d'Euler complexes.

Ensuite, par division euclidienne par puissances croissantes de $\sin(x)$ et $\cos(x)$, on trouve :

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + x^8\varepsilon(x).$$

Les calculs dans cette formule deviennent vite complexes…

5 Un exercice de BTS

Exercice 60.15. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$ par

$$f(x) = (x-1)^2 + 2\ln x.$$

1. Déterminer, en posant $X = x - 1$, le développement limité de $f(x)$, d'ordre 3, au voisinage de $x = 1$.

2. (a) Déterminer, au voisinage de $x = 1$, une équation de la tangente T à la courbe représentative C de la fonction f au point d'abscisse 1.
   (b) Etudier la position relative de la courbe C et de la tangente T au voisinage de $x = 1$.
3. Etudier, la position relative de la courbe C et de la parabole P d'équation :

$$y = (x-1)^2.$$

4. Représenter graphiquement la courbe C, la tangente T et la parabole P dans un repère orthonormal.

Compléments

Démonstration de la proposition 60.6. Un polynôme est dérivable, et sa dérivée est encore un polynôme. Ainsi tout polynôme est $\mathcal{C}^\infty$. De plus, il est facile de voir que $P^{(k)}(0) = k! a_k$. □

Démonstration du théorème 60.7. On procède par récurrence.

Si $n = 0$ alors la formule devient :

$$f(b) = f(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^0}{0!} f^{(1)}(t)\,\mathrm{d}t = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(a) + [f(b) - f(a)],$$

et ainsi elle est vérifiée.

Hérédité Supposons maintenant que la formule soit vraie pour un n donné, et que f soit de classe $\mathcal{C}^{n+2}$. On peut alors intégrer par parties le reste d'ordre n :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{n!(n+1)} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^{n+1}}{n!(n+1)} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons bien la formule de Taylor avec un ordre supplémentaire.

□

Démonstration du théorème 60.9. La formule de Taylor avec reste intégral permet de démarrer :

$$\begin{aligned}\left|f(a) - \left[f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)\right]\right| &\leq \left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b \left|\frac{(b-t)^n}{n!}\right| \left|f^{(n+1)}(t)\right|\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{M}{n!}\int_a^b (b-t)^n\,\mathrm{d}t \leq \frac{M}{n!}\left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b \\ &\leq \frac{M}{n!}\frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} \leq M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Ce qui était bien la majoration recherchée. □

Démonstration du théorème 60.11. On écrit d'abord la formule de Taylor avec reste intégral pour $b = a + h$:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^{a+h} \frac{(a+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ensuite, on note M le maximum de $f^{(n+1)}$ sur I, et on s'occupe du reste en reprenant la preuve du théorème 60.9 :

$$\left|\int_a^{a+h} \frac{(a+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq M\frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ceci signifie bien que :

$$\varepsilon(h) := \frac{1}{h^n}\left(f(a+h) - \left[f(a) + f'(a)h + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!}\right]\right)$$

tend vers 0 quand h tend vers 0, puisque

$$|\varepsilon(h)| \leq \frac{1}{|h|^n} M \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{(n+1)!}\,|h|\,.$$

□

Correction de l'exercice 60.15. 1. En posant $X = x - 1$, soit $x = X + 1$, on obtient :

$$(x-1)^2 + 2\ln x = X^2 + 2\ln(1+X).$$

Quand x tend vers 1 alors X tend vers 0 et le cours donne, au voisinage de 0, le développement limité d'ordre 3 suivant :

$$\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + X^3\varepsilon(X) \text{ avec } \lim_{X\to 0}\varepsilon(X) = 0,$$

on en déduit

$$f(x) = g(X) = X^2 + 2\left[X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3}\right] + 2X^3\varepsilon(X) \text{ avec } \lim_{X\to 0}\varepsilon(X) = 0$$

$$f(x) = g(X) = 2X + \frac{2X^3}{3} + 2X^3\varepsilon(X) \text{ avec } \lim_{X\to 0}\varepsilon(X) = 0.$$

On revient à la variable initiale x :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - 2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 + 2(x-1)^3\varepsilon'(x-1) \quad \text{ avec } \lim_{x\to 1}\varepsilon'(x-1) = 0 \\ &= 2x - 2 + \frac{2}{3}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 2(x-1)^3\varepsilon'(x-1) \\ &= -\frac{8}{3} + 4x - 2x^2 + \frac{2}{3}x^3 + 2(x-1)^3\varepsilon'(x-1) \quad \text{ avec } \lim_{x\to 1}\varepsilon'(x-1) = 0. \end{aligned}$$

2. (a) Il suffit d'appliquer le cours pour déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $X = 0$: $y = 2X$, soit, en revenant à la variable initiale :

$$y = 2x - 2.$$

(b) Au voisinage de 0, étudier la position relative de la courbe représentative de la fonction f et de la tangente à cette courbe en $X = 0$ revient à étudier le signe du premier terme qui succède à $2X$ dans le développement limité précédent, c'est-à-dire le signe de $\frac{X^3}{3} = \frac{(x-1)^3}{3}$. Au voisinage de 1,
   - la courbe est en dessous de la tangente si $x < 1$;
   - la courbe est au dessus de la tangente si $x > 1$.

3. Pour déterminer la position relative de la courbe et de la parabole donnée dans le texte, il suffit d'étudier le signe de la différence $f(x) - (x-1)^2 = 2\ln x$. La méthode ici est générale et pas seulement au voisinage de 1. Même au voisinage de 1, elle serait plus simple que celle d'utiliser le développement limité et permet, peut-être, d'éviter des erreurs de calculs.
   - Si $x \in \,]0\,,1[$, $\ln x < 0$, la courbe est en dessous de la parabole ;
   - si $x \in \,]1\,,+\infty[$, $\ln x > 0$, la courbe est au dessus de la parabole ;
   - si $x = 1$, $\ln x = 0$, la courbe et la parabole se coupent.

4. On appelle C la courbe représentative de la fonction f, P la parabole et T la tangente à C au voisinage de $x = 1$.

□

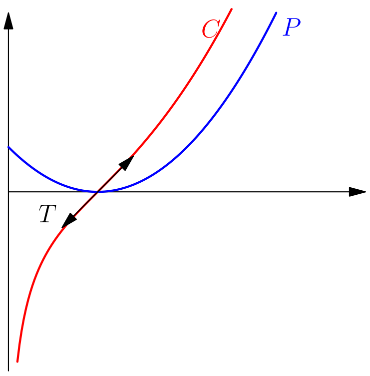


FIGURE 60.1 – Représentation graphique de C, T et P

LEÇON

61 Séries numériques

Niveau, prérequis, références

Niveau BTS

Prérequis Suites numériques, intégrales, primitives.

Références [146, 147]

Contenu de la leçon

1 Généralités

1.1 Définition d'une série

Définition 61.1 (Séries numériques). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formée des sommes partielles*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1.2 Convergence

Définition 61.2 (Convergence d'une série numérique). *Si la suite (S_n) converge, on dit que la série* converge, *et on note :*

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

1.3 Condition nécessaire de convergence

Théorème 61.3. *Si une série converge, alors son terme général tend vers 0.*

Remarque 61.4. La contraposée de ce théorème est : « si le terme général ne tend pas vers 0 alors la série diverge ». C'est sous cette forme que le théorème est le plus souvent utilisé. Les séries dont le terme général ne tend pas vers 0 sont dites *grossièrement divergentes*. Par exemple, $\sum_n \sin n$ est une série qui diverge grossièrement.

2 Séries de références

2.1 Séries géométriques

Définition 61.5 (Série géométrique). *Une* série géométrique *est une série dont le terme général est une suite géométrique.*

Proposition 61.6. *Une série géométrique converge, si et seulement si, la suite géométrique dont elle est issue converge (vers 0).*

2.2 Séries de Riemann

Définition 61.7 (Séries de Riemann). *Une* série de Riemann *est une série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel fixé.*

Théorème 61.8. *Une série de Riemann converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.*

3 Critères de convergence

3.1 Séries à termes positifs

Soient (u_n) et (v_n) deux suites *à termes positifs*.

Théorème 61.9. *Si $u_n \leq v_n$, à partir d'un certain rang, alors :*

1. *si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge ;*
2. *si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.*

Définition 61.10. *On dit que u_n est* équivalent *à v_n, noté $u_n \sim v_n$, si le quotient $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers 1.*

Théorème 61.11. *Si $u_n \sim v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (convergente ou divergente).*

Théorème 61.12 (Critère de d'Alembert)**.** *Supposons que $L = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe.*

1. *Si $L < 1$ alors $\sum u_n$ converge ;*
2. *si $L > 1$ alors $\sum u_n$ diverge ;*
3. *si $L = 1$ alors on ne peut rien affirmer.*

3.2 Séries à termes de signe quelconque

Définition 61.13 (Série alternée)**.** *Une série est dite* alternée *si le signe de son terme général est alternativement positif et négatif.*

Proposition 61.14. *Une série alternée $\sum u_n$, telle que $(|u_n|)$ décroit vers 0, converge.*

Définition 61.15 (Absolue convergence)**.** *Une série $\sum u_n$ est dite* absolument convergente *si $\sum |u_n|$ converge.*

Proposition 61.16. *Une série absolument convergente est convergente, mais la réciproque est fausse.*

4 Exercices type BTS

Exercice 61.17.

1. Montrer que la série de terme général $a_n = \frac{1}{2^n}$ est convergente.
2. On considère les séries de terme général :
$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}\cos(nx)}{2^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^{n+1}\sin(nx)}{2^n} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$
Les séries précédentes sont-elles convergentes ?
3. Montrer que la série de terme général $S_n = u_n + \mathrm{i}v_n$ est une série géométrique. Cette série est-elle convergente ?
4. Déterminer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} S_n$, en déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

Exercice 61.18.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout entier n strictement supérieur à 2 :
$$\frac{4n-3}{n(n^2-4)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n-2}.$$
2. La série de terme général $u_n = \frac{4n-3}{n(n^2-4)}$ est-elle convergente ?
3. Déterminer la somme
$$S_n = \sum_{p=3}^{p=n} \frac{4p-3}{p(p^2-4)}.$$
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{167}{96}$.

Démonstration du théorème 61.3. Si (S_n) est une série convergente de terme général u_n, alors les suites (S_{n-1}) et (S_n) convergent vers la même. Ainsi, leur différence tend vers 0. Or $S_n - S_{n-1} = u_n$. □

Démonstration de la proposition 61.6. Pour démontrer la proposition, on peut utiliser l'égalité bien connue :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

puis faire tendre n vers l'infini. □

Démonstration du théorème 61.8. L'idée est de comparer une série de Riemann à une intégrale de la fonction $\frac{1}{x^\alpha}$. □

Démonstration du théorème 61.9. Dans le premier cas, on utilise le fait qu'une suite croissante et majorée converge. La deuxième assertion n'est que la contraposée de la première. □

Solution de l'exercice 61.17.

1. La série de terme général a_n est géométrique, de raison $\frac{1}{2}$, cette raison vérifie $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$. La série géométrique de terme général a_n converge.
2. Une propriété de la fonction cosinus indique $0 \leq |\cos(nx)| \leq 1$, on en déduit :

$$0 \leq |u_n| \leq \frac{1}{2^n}, \qquad \text{c'est-à-dire } 0 \leq |u_n| \leq a_n.$$

   On applique un théorème de comparaison : la série de terme général a_n converge alors la série de terme général $|u_n|$ converge c'est-à-dire la série de terme général u_n est absolument convergente. Ainsi, la série de terme général u_n converge.
   Par le même raisonnement, on peut en déduire que la série de terme général v_n converge.
3.

$$S_n = u_n + \mathrm{i}v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}(\cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = -\frac{(-1)^n}{2^n}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n = -\left(\frac{-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}\right)^n.$$

   On reconnaît une écriture de la forme $S_n = aq^n$ avec $a = -1$ et $q = \frac{-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}$. La série de terme général S_n est géométrique. Le module de toute exponentielle complexe étant égal à 1,

$$\left|\frac{-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

   $|q| < 1$: la série géométrique de terme général S_n est convergente.
4. D'après le cours, la série géométrique de terme général S_n converge vers :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} S_n = \frac{S_1}{1-q} = \frac{u_1 + \mathrm{i}v_1}{1 + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2\left(1 + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}\right)} = \frac{\cos x + \mathrm{i}\sin x}{2 + \cos x + \mathrm{i}\sin x}.$$

   D'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} S_n = \frac{\cos x + \mathrm{i}\sin x}{2 + \cos x + \mathrm{i}\sin x}.$$

   $S_n = u_n + \mathrm{i}v_n$ donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \mathrm{i}\sum_{n=1}^{+\infty} v_n.$$

   $\sum v_n$ et $\sum v_n$ sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la somme déterminée à la question précédente :

Méthode trigonométrique Multiplions numérateur et dénominateur du quotient $\frac{\cos x+\mathrm{i}\sin x}{(2+\cos x)+\mathrm{i}\sin x}$ par la quantité conjuguée $(2+\cos x)-\mathrm{i}\sin x$ du dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{\cos x+\mathrm{i}\sin x}{(2+\cos x)+\mathrm{i}\sin x} &= \frac{(\cos x+\mathrm{i}\sin x)(2+\cos x-\mathrm{i}\sin x)}{[(2+\cos x)+\mathrm{i}\sin x](2+\cos x-\mathrm{i}\sin x)}\\ &= \frac{2\cos x+\cos^2 x-\mathrm{i}\sin x\cos x+2\mathrm{i}\sin x+\mathrm{i}\sin x+\mathrm{i}\sin x\cos x+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2+\sin^2 x}\\ &= \frac{2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x+\mathrm{i}(2\sin x)}{(2+\cos x)^2+\sin^2 x}\\ &= \frac{2\cos x+1+2\mathrm{i}\sin x}{4+4\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{2\cos x+1+2\mathrm{i}\sin x}{5+4\cos x}\end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\cos x+1}{5+4\cos x} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} v_n=\frac{2\sin x}{5+4\cos x}.$$

Méthode exponentielle Dans le calcul suivant on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué de $2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ qui est $2+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} S_n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}(2+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})}{(2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})(2+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})}=\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+1}{4+2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})+1}.$$

On peut utiliser la formule d'Euler $\cos x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$, il vient alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} S_n=\frac{2\cos x+2\mathrm{i}\sin x+1}{5+4\cos x},$$

on retrouve la même partie réelle et la même partie imaginaire que précédemment.

□

Solution de l'exercice 61.18. 1. Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 2 :

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n+2}+\frac{c}{n-2}=\frac{a(n^2-4)-bn(n-2)+cn(n+2)}{n(n^2-4)}=\frac{an^2-4a+bn^2-2bn+cn^2+2cn}{n(n^2-4)}=\frac{4n-3}{n(n^2-4)}.$$

En comparant les coefficients respectifs des deux numérateurs, pour que l'égalité soit vraie pour tout entier $n>2$:

$$\begin{cases}a+b+c=0\\ -2(b-c)=4\\ -4a=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{3}{4}\\ b+c=-\frac{3}{4}\\ b-c=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{3}{4}\\ b=-\frac{11}{8}\\ c=\frac{5}{8}.\end{cases}$$

D'où :

$$\frac{4n-3}{n(n^2-4)}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{n}-\frac{11}{8}\times\frac{1}{n+2}+\frac{5}{8}\times\frac{1}{n-2}=\frac{3}{4n}-\frac{11}{8(n+2)}+\frac{5}{8(n-2)}.$$

2. A l'infini, on peut écrire $u_n\approx\frac{4n}{n^3}$ soit $u_n\approx\frac{4}{n^2}$. Il s'agit d'une série de Riemann avec $\alpha=2$, c'est-à-dire $\alpha=1$. La série de terme général u_n est convergente.
3. En utilisant la première question, la somme S_n peut s'écrire :

$$S_n=\sum_{p=3}^{p=n}\frac{4n-3}{n(n^2-4)}=\left|\frac{3}{4}\times\frac{1}{p}-\frac{11}{p}\times\frac{1}{p+2}+\frac{5}{8}\times\frac{1}{p-2}\right|=\frac{3}{4}\sum_{p=3}^{p=n}\frac{1}{p}-\frac{11}{8}\sum_{p=3}^{p=n}\frac{1}{p+2}+\frac{5}{8}\sum_{p=3}^{p=n}\frac{1}{p-2}.$$

En posant $p+2=k$ et $p-2=r$ dans les deux dernières sommes :

$$S_n = \frac{3}{4}\sum_{p=3}^{p=n}\frac{1}{p} - \frac{11}{8}\sum_{p=3}^{p=n}\frac{1}{k} + \frac{5}{8}\sum_{p=3}^{p=n}\frac{1}{r},$$

cette somme s'écrit alors :

$$S_n = \frac{3}{4}\sum_{p=3}^{p=n}\frac{1}{p} - \frac{11}{8}\sum_{p=5}^{p=n+2}\frac{1}{p} + \frac{5}{8}\sum_{p=1}^{p=n-2}\frac{1}{p}.$$

On en déduit, en mettant en évidence la somme $\sum_{p=5}^{p=n-2}\frac{1}{p}$ commune aux trois expressions :

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{3}{4}\sum_{p=5}^{p=n+2}\frac{1}{p} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right) - \frac{11}{8}\sum_{p=5}^{p=n-2}\frac{1}{p} - \frac{11}{8}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) \\
&\qquad + \frac{5}{8}\sum_{p=5}^{p=n-2}\frac{1}{p} + \frac{5}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) \\
&= \left(\frac{3}{4}-\frac{11}{8}+\frac{5}{8}\right)\sum_{p=5}^{p=n-2}\frac{1}{p} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right) - \frac{11}{8}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) \\
&\qquad + \frac{5}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right).
\end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned}
S_n &= 0 + \frac{3}{4}\left(\frac{7}{12}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right) - \frac{11}{8}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) + \frac{5}{8}\times\frac{25}{12} \\
&= \frac{21}{48} + \frac{125}{96} - \frac{5}{8}\times\frac{1}{n-1} - \frac{5}{8}\times\frac{1}{n} - \frac{11}{8}\times\frac{1}{n+1} - \frac{11}{8}\times\frac{1}{n+2} \\
&= \frac{167}{96} - \frac{5}{8}\times\frac{1}{n-1} - \frac{5}{8}\times\frac{1}{n} - \frac{11}{8}\times\frac{1}{n+1} - \frac{11}{8}\times\frac{1}{n+2}.
\end{aligned}$$

D'où, en passant par la limite quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{167}{96}.$$

□

LEÇON

62 Séries de Fourier

Niveau, prérequis, références

Niveau BTS

Prérequis Séries numériques

Références [148]

Contenu de la leçon

1 Introduction

1.1 Joseph Fourier

FIGURE 62.1 – Joseph Fourier

Joseph FOURIER (1768-1830), étudia à l'Ecole Royale Militaire d'Auxerre, et dès l'âge de treize ans, manifesta un intérêt certain pour les mathématiques, mais hésita à devenir prête (il entra à Saint-Benoît-sur-Loir, qu'il quitta en 1789). En 1793, il se joint à un comité révolutionnaire mais, sous la Terreur, faillit être guillotiné (la mort de Robespierre lui permit d'en réchapper). Il eut, à l'Ecole Normale Supérieure, Lagrange et Laplace comme professeurs, obtint un poste à l'Ecole Centrale de Travaux Publics, puis enseigna à l'Ecole Polytechnique. Il participa à la campagne d'Egypte sous Napoléon, fut nommé préfet de l'Isère et, là, étudia la théorie de la propagation de la chaleur, ce qui le mena à la décomposition des fonctions périodiques.

1.2 Première approche

Considérons les fonctions indexées par n définies par :

$$S_n(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}\sin[(2k+1)2\pi t].$$

Considérons ensuite le signal en créneau f de période 1 (voir la figure 62.2) :

Ce signal est discontinu, donc a fortiori non dérivable. Nous allons l'approcher par ses *sommes de Fourier* S_n, qui sont des fonctions sinusoïdales (polynômes trigonométriques, infiniment dérivables et commodes pour les calculs). Traçons donc quelques unes de ces sommes, et observons leurs allures (voir la figure 62.3)

Nous pouvons déjà noter que, pus n est grand, plus la somme de Fourier semble se rapprocher du signal en créneau. Plus précisément, S_n *converge* vers f en tout point de continuité de f. Cela dit, près d'une discontinuité de f, il reste toujours une « crête », de plus en plus proche de la discontinuité, mais d'amplitude constante (environ 9% du saut de discontinuité). C'est le *phénomène de Gibbs* (Josiah Willard Gibbs, américain, 1839-1903). Ceci conduit à faire des moyennes de Césaro des sommes de Fourier (appelées sommes de Fejér), rendant la convergence bien meilleure (mais c'est hors programme).

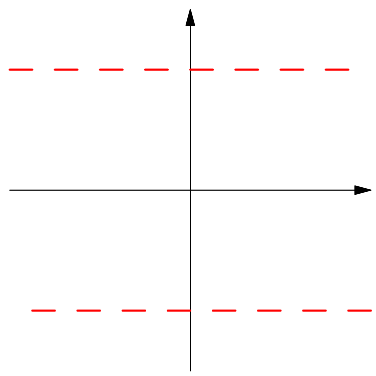


FIGURE 62.2 – Signal f en créneau de période 1

2 Coefficients de Fourier

Dans cette partie, nous allons définir la somme de Fourier $S_N(f)$ d'une fonction périodique f : nous étudierons la convergence de cette somme vers f dans la prochaine section (mais il faut garder à l'idée que $S_N(f)$ est une approximation de f).

2 1 Formes exponentielle et réelle ; somme de Fourier

Dans la suite, soit f une fonction T-périodique continue par morceaux, et soit $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Définition 62.1 (Coefficients de Fourier complexes). *Pour n dans $\mathbb{Z}$, on définit les nombres complexes :*

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega nt}\,\mathrm{d}t.$$

Ces nombres sont appelés les coefficients de Fourier complexes *de f.*

Remarque 62.2. Vu que $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega nt}$ est aussi T-périodique, on pouvait l'intégrer sur n'importe quel intervalle de longueur T, par exemple $[-T/2\,,T/2]$. Le choix est purement pratique et dépend du signal considéré.

Définition 62.3 (Somme de Fourier). *Soit $N \in \mathbb{N}$. La* somme de Fourier *d'ordre N de f est la fonction définie par :*

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega nx}.$$

Proposition 62.4. *Soit n dans $\mathbb{N}$. On a les résultats suivants :*

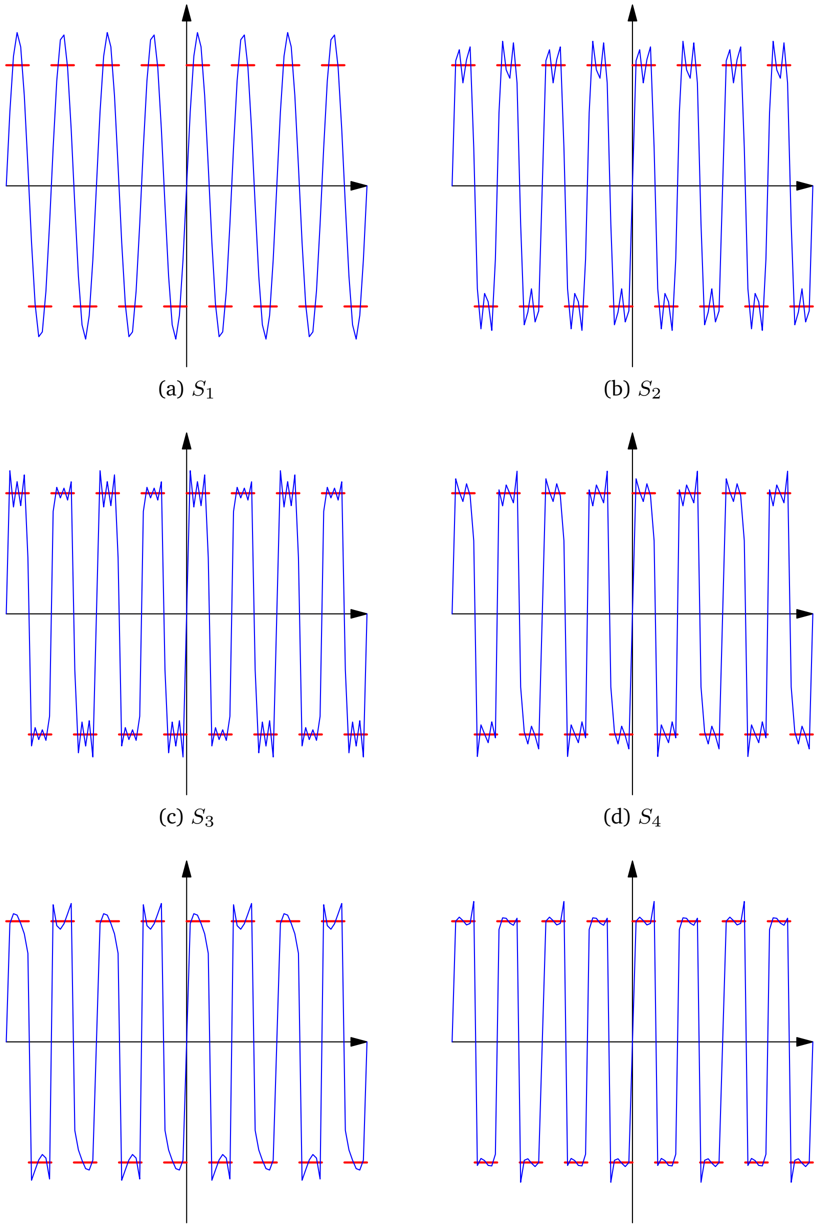
1. $c_n(f) + c_{-n}(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega nt)\,\mathrm{d}t$;
2. $\mathrm{i}(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega nt)\,\mathrm{d}t$.

On définit, pour n dans $\mathbb{N}^*$, des nombres réels (appelés *coefficients de Fourier réels*) par :

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t;$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega nt)\,\mathrm{d}t;$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega nt)\,\mathrm{d}t.$$



(a) S_1 (b) S_2 (c) S_3 (d) S_4 (e) S_5 (f) S_{11}

FIGURE 62.3 – Approximation du signal f avec les sommes de Fourier

Corollaire 62.5. *Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On en déduit les égalités fondamentales suivantes :*

$$c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega nx} + c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega nx} = a_n(f)\cos(\omega nx) + b_n(f)\sin(\omega nx);$$
$$c_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = a_0(f).$$

Remarque 62.6. Le coefficient $c_0(f) = a_0(f)$ est la *valeur moyenne* de f.

Soit N dans $\mathbb{N}^*$. On obtient le résultat fondamental suivant :

$$S_N(f)(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{N}[a_n(f)\cos(\omega nx) + b_n(f)\sin(\omega nx)] \tag{62.1}$$

et en particulier $S_N(f)$ est une fonction *à valeurs réels* (ce qui n'était a priori pas évident).

Définition 62.7 (Fondamental et harmonique)**.** *Le terme $a_1(f)\cos(\omega x) + b_1(f)\sin(\omega x)$ est appelé* le fondamental *(de fréquence $\frac{1}{T}$). Pour $b \geq 2$, le terme $a_n(f)\cos(\omega nx) + b_n(f)\sin(\omega nx)$ est appelé* harmonique *de rang n (c'est un signe de fréquence $\frac{n}{T}$, multiple du fondamental).*

2 2 Propriété des coefficients

Proposition 62.8. *On retrouve les coefficients complexes à partir des coefficients réels grâce aux formules, valables pour n dans $\mathbb{N}^*$:*

$$c_n(f) = \frac{1}{2}[a_n(f) - \mathrm{i}b_n(f)];$$
$$c_{-n}(f) = \frac{1}{2}[a_n(f) + \mathrm{i}b_n(f)].$$

Pour la preuve, on pourra se servir de la proposition 62.4.

Proposition 62.9. *Les coefficients complexes d'indices opposés sont conjugués :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}.$$

Proposition 62.10 (Energie de l'harmonique)**.** *L'*énergie *de l'harmonique de rang $n \geq 1$ est (par définition) le nombre :*

$$E_n(f) = |c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 = \frac{a_n(f)^2 + b_n(f)^2}{2}.$$

Définition 62.11 (Spectre des fréquences)**.** *Le* spectre des fréquences *de f s'obtient en représentant les fréquences $\frac{n}{T}$ des harmonique en abscisse et*

$$|c_n(f)| + |c_{-n}(f)| = \sqrt{a_n(f)^2 + b_n(f)^2}$$

en ordonnée.

Théorème 62.12 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** *Les coefficients de Fourier tendent vers 0 à l'infini :*

$$\lim_{n\to+\infty}|c_n(f)| = \lim_{n\to-\infty}|c_n(f)| = \lim_{n\to+\infty}a_n(f) = \lim_{n\to+\infty}b_n(f) = 0.$$

La démonstration de ce théorème est hors programme et admise.

Remarques 62.13.
1. Ainsi, lorsque n est grand, l'harmonique de rang n est négligeable (son amplitude est petite). Mais attention, ceci ne veut pas dire que l'importance des harmoniques va forcément en décroissant (une harmonique de rang élevé peut-être dominante).

2. En pratique, on va négliger les termes de rangs « élevés » de la somme de Fourier. Tout dépend du degré de précision souhaité. En général, on fait un spectre des fréquences, et par une application pifométrique du plus bel effet, on oublie les harmoniques qui représentent un « faible » pourcentage de l'énergie totale.
3. En fait, plus f est régulière (c'est-à-dire dérivable), plus on est assuré de la décroissance rapide des coefficients de Fourier (l'idée est de comparer $c_n(f)$ et $c_n(f')$, puis par extension, $c_n(f)$ et $c_n(f^{(k)})$)x.

Proposition 62.14 (Parité du signal)**.** *1. Si f est une fonction paire, alors ses coefficients $b_n(f)$ sont nuls, et donc ses sommes de Fourier ne sont composées que de cosinus.*

2. Si f est une fonction impaire, alors ses coefficients $a_n(f)$ sont nuls, et donc ses sommes de Fourier sont composées que de sinus.

Exemple 62.15. Les sommes de Fourier du signal en créneau considéré dans l'introduction ne sont composées que de sinus, puisque ce signal est impair.

3 Théorème de convergence

3 1 Egalité de Bessel-Parseval

Définition 62.16 (Norme euclidienne)**.** *La* norme euclidienne *de f est le nombre réel :*

$$\|f\| = \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Remarques 62.17. 1. Les coefficients de Fourier sont en fait définis grâce à un produit scalaire (hors programme) sur l'espace des fonctions T-périodiques continues par morceaux, et la norme de f est issue de ce produit scalaire, d'où son qualificatif « euclidienne ».

2. La norme euclidienne de f est la *valeur efficace* du signal f sur une période.
3. Le carré de la valeur efficace de f est l'*énergie* du signal f sur une période : $E(f) = \|f\|^2$.

Théorème 62.18 (Egalité de Bessel-Parseval)**.** *On a l'égalité fondamentale suivante :*

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = a_0(f)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(f)^2 + b_n(f)^2}{2}.$$

Remarques 62.19. 1. On récupère au passage le lemme de Riemann-Lebesgue. En effet, puisque les séries considérées convergent, leurs termes généraux tendent vers 0.

2. Cette égalité nous permettra de calculer la somme de quelques séries usuelles, l'idée étant de créer un signal périodique dont les coefficients de Fourier sont « semblables » aux termes de la série étudiée.

Remarque 62.20. En termes physiques, l'énergie d'un signal périodique f est la somme des énergies des harmoniques et du carré de la valeurs moyenne :

$$E(f) = a_0(f)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n(f).$$

3 2 Convergence des séries de Fourier

Définition 62.21 ($\mathcal{C}^1$ par morceaux)**.** *On dit que f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux s'il existe une subdivision $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = T$ de l'intervalle $[0\,,T]$ telle que, pour $0 \leq i \leq p-1$, la restriction de f à $]x_i\,,x_{i+1}[$ est prolongeable par continuité sur $[x_i\,,x_{i+1}]$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.*

Théorème 62.22 (Dirichlet)**.** *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors, quel que soit x, la série de Fourier $S_N(f)(x)$ converge vers la demi-somme des limites à droites et à gauche de f en x. Formellement :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = \frac{f(x^+) - f(x^-)}{2}.$$

La preuve de ce théorème est hors programme et admise.

Corollaire 62.23. *Si f est continue en x, alors $S_N(f)(x)$ converge vers $f(x)$ lorsque N tend vers l'infini.*

Remarques 62.24.

1. La vérification systématique des conditions du théorème de Dirichlet n'est pas un objectif du programme du BTS. On retiendra que tout honnête signal périodique les satisfait...
2. Le théorème confirme, sous certaines conditions, que les sommes de Fourier de f en sont des approximations. Mais encore une fois attention, si f n'est pas continue, la convergence est simple (c'est-à-dire se traite pour un x donné), mais pas uniforme (c'est-à-dire partout de la même manière). En effet, il se produit le phénomène de Gibbs aux discontinuités. Par contre, si f est continue, alors il n'y a pas de phénomène de Gibbs, et la convergence de la série de Fourier de f est uniforme.

4 Sommes de Fourier de signaux usuels

On détermine ici les sommes de Fourier de deux signaux électriques classiques.

4 1 Signal en créneau

Description du signal C'est le signal qu'on a étudié dans l'introduction.

Calcul des coefficients On calcule les coefficients de Fourier de f :

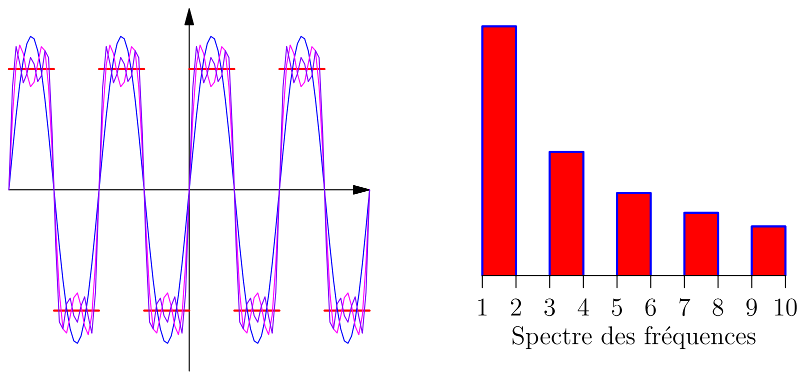
$$\begin{aligned}
a_n &= 0 \quad \text{car } f \text{ est impaire ;}\\
b_n &= \frac{2}{1}\int_{-1/2}^{1/2} f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{1}nt\right)\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{1/2} f(t)\sin(2\pi nt)\,\mathrm{d}t \quad \text{par parité de la fonction intégrée}\\
&= 4\int_0^{1/2}\sin(2\pi nt)\,\mathrm{d}t = 4\left[-\frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n}\right]_{t=0}^{t=1/2}\\
&= \frac{4}{2\pi n}(-\cos(\pi n) + \cos 0) = \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n) \quad \text{car } \cos(\pi n) = (-1)^n\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair}\\ \frac{4}{\pi n} & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on trouve :

$$S_N(x) = \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{N} \frac{4}{\pi n}\sin(2\pi nx),$$

ce qui correspond bien à la formule de l'introduction. Puisque f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux mais pas continue, sa somme de Fourier converge simplement (théorème de Dirichlet).

Représentations graphiques Voir la figure 62.4.



(a) f, S_1, S_2, S_3 (b) Spectre des fréquences

FIGURE 62.4 – Représentations graphiques des séries de Fourier et du spectre des fréquences du signal créneau

4 2 Signal en triangle

Description du signal On considère le signal 2π-périodique f, défini sur $[-\pi\,,\pi]$ par $f(t) = |t|$. Il faut observer immédiatement que :

1. la fonction f est paire, donc ses coefficients b_n sont nuls ;
2. la fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue, ce qui assure une convergence uniforme de sa série de Fourier.

Calcul des coefficients Calculons :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\,\mathrm{d}t = 2\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} |t|\,\mathrm{d}t \text{ par parité de la fonction valeur absolue} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}t \quad \text{par parité de la fonction intégrée} \\ &= \frac{2}{\pi}\left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{t=0}^{t=\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t \quad \text{en intégrant par parties} \\ &= -\frac{2}{\pi n}\left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_{t=0}^{t=\pi} \quad \text{car } \sin(n\pi) = 0 \\ &= \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

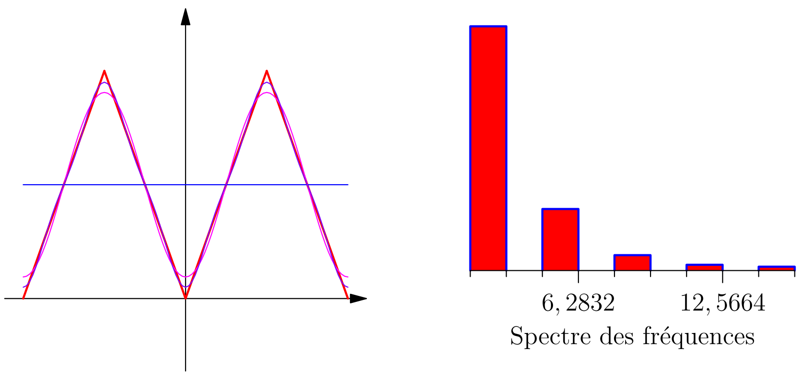
Ainsi, on trouve :

$$S_N(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{N} \frac{4}{\pi n^2}\cos(nx).$$

Représentations graphiques Voir la figure 62.5

Energies et approximation L'énergie du signal f sur une période est :

$$E = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$



(a) f, S_1, S_2, S_3 (b) Spectre des fréquences

FIGURE 62.5 – Représentations graphiques des séries de Fourier et du spectre des fréquences du signal triangle

L'énergie de l'harmonique de rang n est nulle si n est pair. Si n est impair, elle vaut :

$$E_n = \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{\pi n^2}\right)^2 = \frac{8}{n\pi^2 n^4}.$$

La formule de Parseval appliquée à f donne :

$$\frac{\pi}{3} = E = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{\pi^2 n^4}.$$

(on note au passage que cette égalité permet de calculer la somme d'une série numérique). Ce qui nous intéresse, c'est de savoir où tronquer la série de Fourier. Pour cela, on calcule :

$$\begin{aligned}
E &= \frac{\pi^2}{3} \simeq 3{,}289\,9; \\
a_0^2 &= \frac{\pi^2}{4} \simeq 2{,}467\,4 \quad \text{soit 75\% de } E; \\
a_0^2 + E_1 &= \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \simeq 3{,}278\,0 \quad \text{soit environ 99,64\% de } E; \\
a_0^2 + E_1 + E_3 &= \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} + \frac{8}{81\pi^2} \simeq 3{,}288\,0 \quad \text{soit environ 99,94\% de } E.
\end{aligned}$$

On peut donc raisonnablement approcher f par la valeur moyenne et le fondamental, c'est-à-dire S_1.

Compléments

Démonstration de la proposition 62.4. 1.

$$\begin{aligned}
c_n(f) + c_{-n}(f) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega nt}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega nt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega nt} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)2\cos(\omega nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega nt)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}(c_n(f)+c_{-n}(f)) &= \mathrm{i}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n t}\,\mathrm{d}t - \mathrm{i}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega n t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\mathrm{i}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega n t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n t})\,\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)2\mathrm{i}\sin(\omega n t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega n t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

On conclut à chaque fois grâce aux formules d'Euler. □

Démonstration du corollaire 62.5. On calcule directement, en utilisant la relation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$, et en n'oubliant pas que $\cos(-t) = \cos t$:

$$
\begin{aligned}
c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega n x} + c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n x} &= c_n(f)[\cos(\omega n x)+\mathrm{i}\sin(\omega n x)] + c_{-n}(f)[\cos(\omega n x)-\mathrm{i}\sin(\omega n x)] \\
&= [c_n(f)+c_{-n}f]\cos(\omega n x) + \mathrm{i}[c_n(f)-c_{-n}(f)]\sin(\omega n x) \\
&= a_n(f)\cos(\omega n x) + b_n(f)\sin(\omega n x).
\end{aligned}
$$

Ensuite :

$$
c_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}0\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = a_0(f).
$$

□

Justification de l'équation (62.1). On calcule directement :

$$
S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega n x} = c_0(f) + \sum_{n=1}^{N}[c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega n x} + c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n x}].
$$

ce qui mène directement au résultat en utilisant le corollaire précédent. □

Démonstration de la proposition 62.14. On prouve la deuxième assertion. On peut calculer les coefficients de Fourier de f en intégrant sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Ensuite puisque $t \mapsto \cos(\omega n t)$ est paire, on remarque $t \mapsto f(t)\cos(\omega n t)$ est impaire ; ainsi son intégrale, sur un intervalle symétrique comme $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, est nulle. Ce qui signifie que $a_n(f) = 0$. □

LEÇON

63 Transformation de Laplace

Niveau, prérequis, références

Niveau BTS

Prérequis Notion de fonctions, intégrales, intégration par parties

Références [149, 150, 151]

Contenu de la leçon

1 Introduction à la leçon

Définition 63.1 (Fonction causale)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est causale si, pour tout $t < 0$, on a $f(t) = 0$.*

Exemple 63.2. La fonction *échelon unité* qu'on notera $\mathcal{U}$ définie par :

$$t \mapsto \begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0, & \text{si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

est une fonction causale. On donne une représentation graphique en figure 63.1

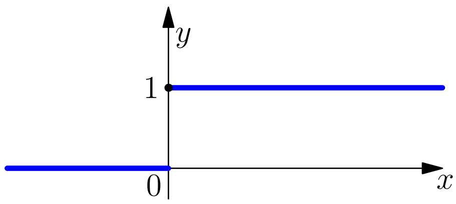


FIGURE 63.1 – Fonction échelon unité

Définition 63.3 (Intégrale généralisée)**.** *Soit f une fonction définie sur $[a, +\infty[$. Si $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est un réel A, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on a :*

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = A.$$

Si $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ne converge pas vers un réel (pour $x \to +\infty$) alors on dit qu'elle diverge.

2 Transformée de Laplace de fonctions usuelles

Définition 63.4 (Transformée de Laplace d'une fonction causale)**.** *Soit f une fonction causale à valeurs réelles. On appelle* transformée de Laplace *de f, la fonction F de la variable réelle (ou complexe) p définie par :*

$$\mathcal{L}(f)(p) = \mathcal{L}(t \mapsto f(t))(p) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 63.5. La notation utilisée confère à la transformation de Laplace un rôle d'opérateurs de fonction. Si on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et qui ont une croissance au plus exponentielle[1] et $\mathcal{C}^\infty(0)$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ qui tendent vers 0 ainsi que toutes leurs dérivées en $+\infty$ alors :

$$\begin{array}{rcccl} \mathcal{L} & : & \mathcal{E} & \to & \mathcal{C}^\infty(0) \\ & & f & \mapsto & \mathcal{L}(f) \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rcccl} \mathcal{L}(f) & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & p & \mapsto & \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \end{array}.$$

Proposition 63.6 (Table de transformée de Laplace). *Le tableau 63.1 fournit une table de transformée de Laplace de fonctions usuelles.*

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(p)$	Domaine de validité de p
$\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p}$	$p > 0$
$t^n\mathcal{U}(t)$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$p > 0$
$\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)$, $a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{p+a}$	$p + a > 0$
$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$, $\omega \in \mathbb{R}$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$p > 0$
$\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$, $\omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$p > 0$

TABLE 63.1 – Table de transformée de Laplace de fonctions usuelles

3 Propriétés de la transformée de Laplace

Propriété 63.7 (Linéarité de $\mathcal{L}$). *L'opérateur des transformées de Laplace est linéaire, c'est-à-dire soient f et g deux fonctions admettant des transformées de Laplace et λ et μ deux réels, on a :*

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g)(p) = \lambda\mathcal{L}(f)(p) + \mu\mathcal{L}(g)(p).$$

Proposition 63.8 (Transformée de $f(\alpha t)\mathcal{U}(t)$). *Soient f admettant une transformée de Laplace F et $\alpha > 0$ réel. On a alors :*

$$\mathcal{L}(t \mapsto f(\alpha t)\mathcal{U}(t))(p) = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Proposition 63.9 (Transformée de $f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)$). *Soient f admettant une transformée de Laplace F et $a \in \mathbb{R}$. On a alors :*

$$\mathcal{L}(t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t))(p) = F(p+a).$$

Proposition 63.10 (Translation). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ causale admettant une transformée de Laplace F. Alors :*

$$\mathcal{L}(t \mapsto f(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau))(p) = F(p)\mathrm{e}^{-\tau p}.$$

4 Intégration et dérivation de transformée de Laplace

On va dans cette section que la transformée de Laplace transforme l'intégration et la dérivation en division et multiplication par une variable réelle p.

1. c'est-à-dire

$$\forall f \in \mathcal{E},\ \exists M_f, r_f,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\quad |f(x)| \leq M_f\mathrm{e}^{r_f x}.$$

Proposition 63.11 (Transformation d'intégrales)**.** *Soient f une fonction admettant F comme transformée de Laplace et a un réel. Alors :*

$$\mathcal{L}(t \mapsto \mathcal{U}(t) \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u)(p) = \frac{F(p)}{p},$$

$$\mathcal{L}(t \mapsto \mathcal{U}(t) \int_a^t f(u)\,\mathrm{d}u)(p) = \frac{F(p)}{p} + \frac{1}{p}\int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La démonstration est admise.

Proposition 63.12 (Dérivée de la transformée de la Laplace)**.** *Soit f une fonction admettant F comme transformée de Laplace. Alors*

$$\mathcal{L}(t \mapsto t^n f(t))(p) = (-1)^n F^{(n)}(p).$$

La démonstration est aussi admise.

Proposition 63.13 (Transformation de dérivées premières et secondes)**.** *Soient f admettant F comme transformée de Laplace et f deux fois dérivable. Alors*

1. $\mathcal{L}(t \mapsto f'(t)\mathcal{U}(t))(p) = pF(p) - f(0^+)$
2. $\mathcal{L}(t \mapsto f''(t)\mathcal{U}(t))(p) = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$

où $f(0^+) = \lim_{x \to 0, x>0} f(x)$.

5 Applications

5.1 Résolution d'équations différentielles

Comme dit dans l'introduction du cours, la transformation de Laplace permet de ramener la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants à la résolution d'équations affines (dont les solutions sont des fonctions rationnelles de p). Avant d'appliquer les transformées de Laplace pour la résolution d'équations différentielles, on va donner une méthode pour la recherche d'original de fonctions.

Définition 63.14 (Original d'une fonction)**.** *Soit f une fonction causale qui admet comme transformée de Laplace F. On dit que f est l'*original *de F.*

Proposition 63.15 (Méthode de recherche d'original d'une fonction)**.** *Si la fonction est de la forme $\frac{A(p)}{B(p)}$, la méthode la plus utilisée est de décomposer la fraction rationnelles en éléments simples et ensuite on utilise les formules suivantes (f est l'original de F) :*

1. *On utilise la table 63.1 en reconnaissant $f(t)$ par $F(p)$.*
2. *On peut aussi utiliser les propriétés de la section précédente.*

Exemples 63.16. 1. Soit à trouver l'original de la fonction

$$p \mapsto F(p) = \frac{2}{(p+1)(p+2)}.$$

$\frac{2}{(p+1)(p+2)}$ peut se décomposer sous la forme $\frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+2}$.

$$\frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+2} = \frac{(a+b)p + 2a + b}{(p+1)(p+2)}$$

d'où en identifiant avec l'expression de $F(p)$:

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ 2a+b &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}.$$

D'où :

$$F(p) = \frac{2}{p+1} - \frac{2}{p+2}.$$

Si on note f son original, on obtient :

$$f(t) = 2\mathrm{e}^{-t}\mathcal{U}(t) - 2\mathrm{e}^{-2t}\mathcal{U}(t).$$

2. Soit à trouver l'original de

$$F(p) = \frac{p+1}{(p^2+2)(p+2)}.$$

$\frac{p+1}{(p^2+2)(p+2)}$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{ap+b}{p^2+2} + \frac{c}{p+2} = \frac{(a+c)p^2 + (2a+b)p + 2b + 2c}{(p^2+2)(p+2)}$$

d'où

$$\begin{cases} a+c &= 0 \\ 2a+b &= 1 \\ 2b+2c &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{2}{3} \\ c = -\frac{1}{6} \end{cases}.$$

Donc

$$F(p) = \frac{1}{6}\frac{p}{p^2+2} + \frac{2}{3}\frac{1}{p^2+2} - \frac{1}{6}\frac{1}{p+2}$$

que l'on peut écrire pour faire apparaître la forme $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$:

$$F(p) = \frac{1}{6}\frac{p}{p^2+2} + \frac{2}{3\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{p^2+2} - \frac{1}{6}\frac{1}{p+2}.$$

Si on note $f(t)$ l'original de $F(p)$, on a :

$$f(t) = \left(\frac{1}{6}\cos\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{3}\sin\sqrt{2}t - \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2t}\right)\mathcal{U}(t).$$

3. Soit à chercher l'original de la fonction

$$F(p) = \frac{p}{p^2+4p+5}.$$

On va tout d'abord mettre sous forme canonique p^2+4p+5. On a : $p^2+4p+5 = (p+2)^2+1$, donc $F(p) = \frac{p}{(p+2)^2+1}$ soit en transformant en éléments simples

$$F(p) = \frac{p+2}{(p+2)^2+1} - \frac{2}{(p+2)^2+1}.$$

$\frac{p+2}{(p+2)^2+1}$ est de la forme $G(p+2)$ avec $G(p) = \frac{p}{p^2+1}$. On obtient donc :

$$g(t) = \cos(t)\mathcal{U}(t).$$

De même $\frac{1}{(p+2)^2+1}$ est de la forme $H(p+2)$ avec $H(p) = \frac{1}{p^2+1}$ et donc :

$$h(t) = \sin t\mathcal{U}(t).$$

Ainsi, on aboutit à :

$$f(t) = \cos t\mathrm{e}^{-2t}\mathcal{U}(t) - 2\sin(t)\mathrm{e}^{-2t}\mathcal{U}(t).$$

4. Soit à chercher l'original de :
$$F(p) = \frac{p}{p^2+1}\mathrm{e}^{-2p}.$$
$\frac{p}{p^2+1}$ est la transformée de Laplace de $\cos t\mathcal{U}(t)$. $F(p)$ est donc de la forme $H(p)\mathrm{e}^{-\tau p}$ avec $h(t) = \cos t\mathcal{U}(t)$ et $\tau = 2$. On obtient donc :
$$f(t) = \cos(t-2)\mathcal{U}(t-2).$$

FIGURE 63.2 – Le graphe de la fonction $t \mapsto \cos(t-2)\mathcal{U}(t-2)$ et $t \mapsto \cos(t)\mathcal{U}(t-2)$. On dit que $t \mapsto \cos(t-2)\mathcal{U}(t-2)$ est « *en retard* » sur $\cos(t)\mathcal{U}(t)$ (en pointillé sur le graphe de gauche)

Exemple 63.17. On veut résoudre l'équation différentielle suivante :
$$\frac{1}{2}i''(t) + i'(t) + i(t) = (t+1)\mathcal{U}(t) \qquad (E)$$
où i est une fonction causale, continue et deux fois dérivables sur $]0, +\infty[$, vérifiant $i(0^+) = 1$ et $i'(0^+) = 0$. On va, tout d'abord, trouver la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto f(t) = (t+1)\mathcal{U}(t)$. On par linéarité :
$$\mathcal{L}(t \mapsto f(t))(p) = \mathcal{L}(t \mapsto (t+1)\mathcal{U}(t))(p) = \mathcal{L}(t \mapsto t\mathcal{U}(t))(p) + \mathcal{L}(t \mapsto \mathcal{U}(t))(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}.$$
On va ensuite, à l'aide de la transformée de Laplace I de i, trouver celle de la fonction
$$t \mapsto \frac{1}{2}i''(t) + i'(t) + i(t).$$
On pose $I(p) := \mathcal{L}(tt \mapsto i(t))(p)$. D'après les formules de dérivées, on a :
$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t \mapsto i'(t))(p) &= pI(p) - i(0^+) = pI(p) - 1, \\ \mathcal{L}(t \mapsto i''(t))(p) &= p^2 I(p) - pi(0^+) - i'(0^+) = p^2 I(p) - p. \end{aligned}$$
D'où :
$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t \mapsto \tfrac{1}{2}i''(t) + i'(t) + i(t))(p) &= \frac{1}{2}\mathcal{L}(t \mapsto i''(t))(p) + \mathcal{L}(t \mapsto i'(t))(p) + \mathcal{L}(t \mapsto i(t))(p) \\ &= \frac{1}{2}I(p) + \frac{1}{2}p + pI(p) - 1 + I(p) \\ &= I(p)\left(1 + p + \frac{1}{p^2}\right) - \left(\frac{1}{2}p + 1\right). \end{aligned}$$
On va enfin calculer $I(p)$ en se servant de l'équation différentielle (E) :
$$\frac{1}{2}i''(t) + i'(t) + i(t) = (t+1)\mathcal{U}(t).$$
Comme $\mathcal{L}$ est un opérateur injectif (on l'admettra) :
$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(t \mapsto \frac{1}{2}i''(t) + i'(t) + i(t))(p) = \mathcal{L}(t \mapsto (t+1)\mathcal{U}(t))(p) \\ \Leftrightarrow\ & I(p)\left(1 + p + \frac{1}{2}p^2\right) - \left(\frac{1}{2}p + 1\right) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} \\ \Leftrightarrow\ & I(p)\left(1 + p + \frac{1}{2}p^2\right) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{2}p + 1 \end{aligned} \qquad (63.1)$$

Dans le membre de droite, on met sous même dénominateur de la forme p^2.

$$\begin{aligned}(63.1) \Leftrightarrow I(p)\left(1+p+\frac{1}{2}p^2\right) &= \frac{1}{p^2}+\frac{p}{p^2}+\frac{1}{2}\frac{p^3}{p^2}+1\frac{p^2}{p^2}\\ \Leftrightarrow I(p)\left(1+p+\frac{1}{2}p^2\right) &= \frac{1}{p^2}\left(1+p+\frac{p^3}{2}+p^2\right)\end{aligned} \tag{63.2}$$

On peut maintenant exprimer $I(p)$ en fonction de p :

$$\begin{aligned}(63.2) \Leftrightarrow I(p) = &\frac{1}{\frac{2+2p+p^2}{2}}\frac{1}{p^2}\left(1+p+p^2+\frac{p^3}{2}\right)\\ &= \left(\frac{2}{2+2p+p^2}\right)\frac{1}{p^2}\left(\frac{2+2p+2p^2+p^3}{2}\right)\\ &= \frac{1}{p^2(p^2+2p+2)}(2+2p+2p^2+p^3)\end{aligned}$$

En faisant la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{2+2p+2p^2+p^3}{p^2(p^2+2p+2)}$, on observe que :

$$\frac{2+2p+2p^2+p^3}{p^2(p^2+2p+2)} = \frac{1}{p^2}+\frac{p+1}{p^2+2p+2}.$$

On a alors :

$$I(p) = \frac{1}{p^2}+\frac{p+1}{p^2+2p+2}.$$

Enfin, on calcule l'expression de $i(t)$ grâce à l'expression de $I(p)$, cela revient à trouver l'original de la fonction $I(p)$:

$$I(p) = \frac{1}{p^2}+\frac{p+1}{p^2+2p+2}$$

donc

$$i(t) = t\mathcal{U}(t)+\cos t e^{-t}\mathcal{U}(t) = (t+\cos t e^{-t})\mathcal{U}(t).$$

5 2 Résolution de systèmes différentiels

Exemple 63.18. Soit à résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 3x+2y \\ y' = x+2y \end{cases} \tag{S}$$

avec conditions initiales $x(0)=3$ et $y(0)=0$. On supposera que les fonctions x et y du système sur $[0,+\infty[$ sont prolongées par la fonction nulle sur $]-\infty,0[$, elles deviennent ainsi des fonctions causales que l'on note toujours x et y. On suppose que les fonctions x et y admettent respectivement les transformées de Laplace X et Y.

On va tout d'abord calculer $X(p)$ et $Y(p)$. On aura

$$\begin{cases} pX(p)-3 = 3X(p)+2Y(p) \\ pY(p) = X(p)+2Y(p) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(p)(p-3)-2Y(p) = 3 \\ X(p)+(2-p)Y(p) = 0 \end{cases}.$$

On résout par substitution :

$$\begin{cases} X(p) = (p-2)Y(p) \\ (p-2)(p-3)Y(p)-2Y(p) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(p) = (p-2)Y(p) \\ Y(p) = \frac{3}{(p-2)(p-3)-2} \end{cases}.$$

D'où :

$$Y(p) = \frac{3}{p^2-5p+4} = \frac{3}{(p-1)(p-4)}$$

et

$$X(p) = \frac{3(p-2)}{(p-1)(p-4)}.$$

On va enfin trouver $x(t)$ et $y(t)$ par recherche des originaux de $X(p)$ et $Y(p)$. On décompose en éléments simplex :

$$\frac{a}{p-1} + \frac{b}{p-4} = \frac{p(a+b) - 4a - b}{(p-1)(p-4)}.$$

En identifiant avec l'expression de $X(p)$, on obtient

$$\begin{cases} a+b=3 \\ -4a-b=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

et

$$X(p) = \frac{1}{p-1} + \frac{2}{p-4}.$$

En identifiant avec l'expression de $Y(p)$, on obtient :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -4a-b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

et

$$Y(p) = \frac{-1}{p-1} + \frac{1}{p-4}.$$

De ces résultats, on peut tirer $x(t)$ et $y(t)$:

$$x(t) = (\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{4t})\mathcal{U}(t) \quad \text{et} \quad y(t) = (-\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{4t})\mathcal{U}(t).$$

5 3 Application en physique, théorie du signal

Avant d'introduire un dernier exemple qui est une application physique de la transformée de Laplace, on a besoin de quelques concepts de base de la théorie des signaux.

Définition 63.19 (Signal)**.** *On appelle* signal*, une grandeur physique contenant de l'information et évoluant généralement dans le temps.*

Mathématiquement, un signal peut être représenté par une fonction du temps, $x(t)$ à valeurs réels ou complexes (voir figure 63.3).

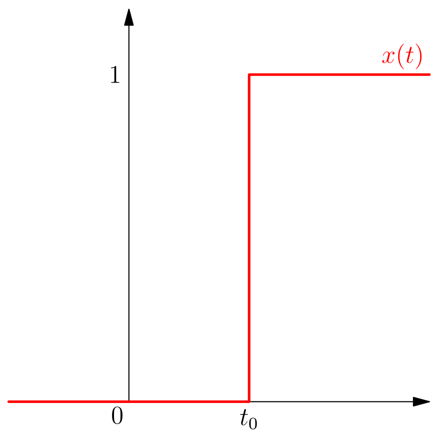


FIGURE 63.3 – Exemple de signal

Exemples 63.20. – Un courant circulant dans une branche d'un circuit électrique.
– La position ou vitesse d'un mobile au cours du temps.

Définition 63.21 (Système physique)**.** *On appelle* système physique*, un dispositif physique qui fournit des signaux de sortie à partir de signaux d'entrée.*

Le système physique à une entrée et une sortie (qu'on appelle aussi *système « entrée-sortie »* peut être représenté par le schéma figure 63.4.

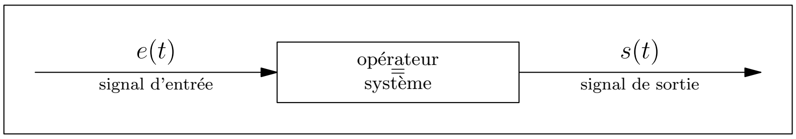


FIGURE 63.4 – Système « entrée sortie »

Exemples 63.22. – Un circuit électrique transforme un courant ou une tension en un autre courant ou une autre tension, les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent être différentes.
– Un haut-parleur est un système dit électro-acoustique transformant une tension électrique d'entrée en un signal acoustique.

Exemple 63.23 (Système « entrée-sortie » ; fonction de transfert)**.** Soit un système « entrée-sortie » où le signal d'entrée $t \mapsto e(t)$ et le signal de sortie $t \mapsto s(t)$ sont des fonctions causales. On suppose que les fonctions e et s admettent des transformées de Laplace E et S. On définit la fonction de transfert H du système par $S(p) = H(p)E(p)$ (représentant le rapport entre la transformée de Laplace de la fonction de sortie et celle d'entrée). Ici, on supposera que $H(p) = \frac{1}{1+2p}$. La fonction e est définie par $t\mathcal{U}(t)$. On va définir $S(p)$. On fait la transformée de Laplace de e.

$$\mathcal{L}(e)(p) = E(p) = \frac{1}{p^2}.$$

On en déduit donc que

$$S(p) = \frac{1}{1+2p}\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2(1+2p)}.$$

On décompose $\frac{1}{p^2(1+2p)}$ en éléments simples. Pour cela, on cherche des constantes A, B et C tels que pour tout $p \geq 0$,

$$\frac{1}{p^2(1+2p)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{2p+1}.$$

On a :

$$\begin{aligned}\frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{2p+1} &= \frac{A(2p+1) + Bp(2p+1) + Cp^2}{p^2(2p+1)} \\ &= \frac{p^2(2B+C) + p(2A+B) + A}{p^2(2p+1)}.\end{aligned}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} 2B + C &= 0 \\ 2A + B &= 0 \\ A &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \\ C = 4 \end{cases}.$$

Donc

$$S(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + \frac{4}{2p+1}.$$

Maintenant, on peut en déduire $s(t)$ par recherche d'originaux :

$$S(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + \frac{4}{2(p+\frac{1}{2})} = \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + 2\frac{1}{p+\frac{1}{2}}.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} S(t) &= t\mathcal{U}(t) - 2\mathcal{U}(t) + 2\mathrm{e}^{-t/2}\mathcal{U}(t) \\ &= (t - 2 + 2\mathrm{e}^{-t/2})\mathcal{U}(t). \end{aligned}$$

Compléments

Justification de l'existence de la transformation de Laplace. On suppose que $f \in \mathcal{E}$, c'est-à-dire f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall f \in \mathcal{E},\ \exists M_f, r_f,\ \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f(x)| \leq M_f \mathrm{e}^{r_f x}.$$

On montre que $\mathcal{L}(f)(p)$ existe si $p > r_f$: la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x$$

est absolue [2] si $p > r_f$ puisque

$$\left|f(x)\mathrm{e}^{-px}\right| \leq M_f \mathrm{e}^{(r_f - p)x} \quad \text{et} \quad r_f - p < 0$$

et $\mathrm{e}^{(r_f-p)x}$ est d'intégrale absolument convergente dès que $r_f - p < 0$.

□

Etablissement des transformées de Laplace.

– Soit $p > 0$. On considère sur $[0\,,+\infty[$ la fonction échelon-unité $\mathcal{U}(t)$ qui vaut 1 sur $\mathbb{R}_+$, donc on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t \mapsto \mathcal{U}(t))(p) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\mathrm{e}^{-pt}}{-p}\right]_0^x = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{-px}}{-p} + \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

– On veut démontrer que $\mathcal{L}(t \mapsto t^n\mathcal{U}(t))(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (même pour $n \in \mathbb{N}$, si on considère que $0! = 1$). Pour cela, on fait une démonstration par récurrence.

Initialisation On considère la fonction f_1 définie par $f_1(t) = t\mathcal{U}(t)$. On obtient :

$$\mathcal{L}(t \mapsto f_1(t))(p) = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

On va intégrer par parties en considérant $u(t) = t$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-pt}$. On obtient $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}$ d'où

$$\begin{aligned} \int_0^x t\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-t\mathrm{e}^{-pt}}{p}\right]_0^x + \frac{1}{p}\int_0^x \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{-t}{p}\mathrm{e}^{-pt} - \frac{1}{p}\frac{\mathrm{e}^{-pt}}{p}\right]_0^x = \mathrm{e}^{-px}\left(-\frac{x}{p} - \frac{1}{p^2}\right). \\ \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\to+\infty}\left[\mathrm{e}^{-px}\left(\frac{-x}{p} - \frac{1}{p^2}\right) + \frac{1}{p^2}\right] = \frac{1}{p^2}. \end{aligned}$$

2. On rappelle que la convergence absolue d'une intégrale si $\int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge quand $x \to +\infty$

Hérédité On suppose que pour $f_n : t \mapsto t^n \mathcal{U}(t)$, $\mathcal{L}(f_n)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$ pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$. On montre que $f_{n+1} : t \mapsto t^{n+1}\mathcal{U}(t)$ a pour transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}(f_{n+1})(p) = \frac{(n+1)!}{p^{n+2}}.$$

On considère :

$$\mathcal{L}(f_{n+1})(p) = \int_0^{+\infty} t^{n+1}\mathcal{U}(t)\,\mathrm{d}t$$

On va faire une intégration par parties, en posant $u(t) = t^{n+1}$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-pt}$ d'où $u'(t) = (n+1)t^n$ et $v(t) = -\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}$. On obtient :

$$\int_0^x t^{n+1}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^{n+1}\mathrm{e}^{-pt}}{p}\right]_0^x + \frac{n+1}{p}\int_0^x t^n\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\mathcal{L}(f_n)(p) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^n\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{p+1}$$

et, de plus, par croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{t^{n+1}\mathrm{e}^{-pt}}{p}\right]_0^x = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^{n+1}\mathrm{e}^{-pt}}{p} = 0.$$

D'où :

$$\mathcal{L}(f_{n+1})(p) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^{n+1}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{n+1}{p}\frac{n!}{p^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{p^{n+2}}.$$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{L}(f_n)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

– On pose $g : t\mapsto \mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)$. On veut calculer $\mathcal{L}(g)(p)$ pour $a\in\mathbb{R}$.

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{(-a+p)t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{a+p}\mathrm{e}^{-(a+p)t}\right]_0^x,$$

donc pour[3] p tel que $p+a>0$, on obtient :

$$\mathcal{L}(g)(p) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{a+p}\mathrm{e}^{-(a+p)x} + \frac{1}{p+a}\right) = \frac{1}{p+a}.$$

– Soit $p>0$. On pose $c : t\mapsto \cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$ et $s : t\mapsto \sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$. On considère :

$$I_C = \int_0^x \cos\omega t\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I_s = \int_0^x \sin\omega t\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

On calcule I_C par intégration par parties en posant $u(t) = \cos\omega t$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-pt}$ d'où $u'(t) = -\omega\sin\omega t$ et $v(t) = -\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}$ et :

$$I_C = \left[-\frac{1}{p}\cos\omega t\mathrm{e}^{-pt}\right]_0^x - \frac{\omega}{p}I_S = -\frac{1}{p}\cos\omega x\mathrm{e}^{-px} + \frac{1}{p} - \frac{\omega}{p}I_S.$$

3. Si $p+a<0$ alors

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \mathrm{e}^{-(p+a)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{-(p+a)}\mathrm{e}^{-(p+a)t}\right]_0^x \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-(p+a)x}}{-(p+a)} + \frac{1}{p+a} = \frac{1}{p+a}(\mathrm{e}^{-(p+a)x}+1).\end{aligned}$$

Or $p+a<0$ donc $-(p+a)x>0$, d'où

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-(p+a)x} = +\infty$$

et donc $\mathcal{L}(g)(p)$ n'est pas convergente pour $p+a<0$.

On calcule I_S de la même manière en posant $u(t) = \sin \omega t$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-pt}$. On obtient $u'(t) = \omega \cos \omega t$ et $v(t) = -\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}$ donc :

$$I_S = \left[-\frac{1}{p}\sin \omega t \mathrm{e}^{-pt}\right]_0^x + \frac{\omega}{p} I_C = -\frac{1}{p}\sin \omega x \mathrm{e}^{-px} + \frac{\omega}{p} I_C.$$

On remplace maintenant I_S dans l'expression de I_C, on obtient :

$$I_C = -\frac{1}{p}\cos \omega x \mathrm{e}^{-px} + \frac{1}{p} - \frac{\omega}{p}\left(-\frac{1}{p}\sin \omega x \mathrm{e}^{-px} + \frac{\omega}{p} I_C\right)$$

donc :

$$\left(1 + \frac{\omega^2}{p^2}\right) I_C = -\frac{1}{p}\cos \omega x \mathrm{e}^{-px} + \frac{\omega}{p^2}\sin \omega x \mathrm{e}^{-px} + \frac{1}{p}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, pour $p > 0$, $\cos \omega x \mathrm{e}^{-px}$ et $\sin \omega x \mathrm{e}^{-px}$ tendent vers 0 (car $\cos$ et $\sin$ sont bornées) et donc :

$$\mathcal{L}(c)(p) = \int_0^{+\infty} \cos \omega t \mathrm{e}^{-pt} \,\mathrm{d}t = \frac{1/p}{1 + (\omega^2/p^2)} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

On pourrait calculer I_S en utilisant les calculs précédents, on obtiendrait :

$$\mathcal{L}(s)(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

□

Démonstration de la propriété 63.7. Pour montrer la linéarité de $\mathcal{L}$, on n'utilise juste la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\lambda f + \mu g)(p) &= \int_0^{+\infty} (\lambda f + \mu g)\mathrm{e}^{-pt} \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} [\lambda f(t)\mathrm{e}^{-pt} + \mu g(t)\mathrm{e}^{-pt}] \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda f(t)\mathrm{e}^{-pt} \,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \mu g(t)\mathrm{e}^{-pt} \,\mathrm{d}t \\
&= \lambda \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt} \,\mathrm{d}t + \mu \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-pt} \,\mathrm{d}t = \lambda\mathcal{L}(f)(p) + \mu\mathcal{L}(g)(p).
\end{aligned}$$

□

Démonstration de la proposition 63.8. On calcule :

$$\mathcal{L}(t \mapsto f(\alpha t)\mathcal{U}(t))(p) = \int_0^{+\infty} f(\alpha t)\mathrm{e}^{-pt} \,\mathrm{d}t.$$

On fait un changement de variable $\alpha t = u$, on obtient $\alpha \,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ soit $\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{d}u$. De plus, pour $t = 0$, on a $u = 0$, et pour t tendant vers $+\infty$, u tend vers $+\infty$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t \mapsto f(\alpha t)\mathcal{U}(t))(p) &= \int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{(-pu)/\alpha}\frac{1}{\alpha} \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-\frac{p}{\alpha}u} \,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

□

Démonstration de la proposition 63.9. On a :

$$\mathcal{L}(t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t))(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-pt} \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(a+p)t} \,\mathrm{d}t = F(p+a).$$

□

Démonstration de la proposition 63.10. On calcule :

$$\mathcal{L}(t \mapsto f(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau))(p) = \int_0^{+\infty} f(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

En posant $t-\tau = u$, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-\tau}^{x-\tau} f(u)\mathrm{e}^{-p(u+\tau)}\,\mathrm{d}u.$$

La fonction f étant causale, on peut écrire que u est nul sur $[-\tau, 0]$, d'où :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^{x-\tau} f(u)\mathrm{e}^{-pu}\mathrm{e}^{-p\tau}\,\mathrm{d}u\\ &= \mathrm{e}^{-p\tau}\lim_{x\to+\infty}\int_0^{x-\tau} f(u)\mathrm{e}^{-pu}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-p\tau}F(p).\end{aligned}$$

□

Démonstration de la proposition 63.13. On calcule :

$$\mathcal{L}(t \mapsto f'(t)\mathcal{U}(t))(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

Pour cela, on intègre par parties en posant $u'(t) = f'(t)$ et $v(t) = \mathrm{e}^{-pt}$, on obtient :

$$\mathcal{L}(t \mapsto f'(t)\mathcal{U}(t))(p) = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\mathrm{e}^{-pt}\right]_0^x + p\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

En admettant que $\lim_{x\to+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-px} = 0$, on obtient :

$$\mathcal{L}(t \mapsto f'(t)\mathcal{U}(t))(p) = -f(0^+) + pF(p).$$

Si on applique ce résultat à $f''(t)\mathcal{U}(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t \mapsto f''(t)\mathcal{U}(t))(p) &= -f'(0^+) + p\mathcal{L}(t \mapsto f'(t)\mathcal{U}(t))(p)\\ &= -f'(0^+) + p[-f(0^+) + pF(p)] = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+).\end{aligned}$$

□

LEÇON

64 Courbes de Bézier

Niveau, prérequis, références

Niveau BTS

Prérequis Aucun

Références [152, 153, 154]

Contenu de la leçon

1 Barycentres

Définition 64.1 (Barycentre de deux points pondérés). *Soient A et B des points du plan. Soient α et β des nombres réels tels que $\alpha+\beta \neq 0$. Le barycentre des points pondérés $(A,\alpha),(B,\beta)$ est l'unique point G du plan défini par l'égalité :*

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

L'ensemble des points M du plan tels que :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

est :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{MA} + \beta(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}.$$

Cette dernière égalité définit un unique point M dans le plan. On remarquera que le barycentre G de $(A,\alpha),(B,\beta)$ appartient, lorsque $A \neq B$ à la droite (AB), puisque les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Définition 64.2 (Barycentre). *Soit n un nombre entier ≥ 2. Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des points du plan et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$. Le barycentre des points pondérés $(A_1,\lambda_1),(A_2,\lambda_2),\dots,(A_n,\lambda_n)$ est l'unique point G du plan défini par l'égalité :*

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$

On peut montrer, en utilisant la relation de Chasles, que :

$$\overrightarrow{A_1G} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}\sum_{i=2}^n \lambda_i\overrightarrow{A_1A_i}$$

ce qui permet d'obtenir à la fois l'existence et l'unicité.

Définition 64.3 (Isobarycentre). *On dit que G est* l'isobarycentre *des points $A_1, A_2, \dots, A_n$ lorsque G est le barycentre de*

$$(A_1,1),(A_2,1),\dots,(A_n,1).$$

2 Polynômes de Bernstein

Définition 64.4 (Polynômes de Bernstein). *Les polynômes de Bernstein sont définis par les formules suivantes :*

$$B_{i,n}(t) = \mathrm{C}_n^i t^i (1-t)^{n-i} \quad \textit{avec } n \in \mathbb{N},\ i \in \mathbb{N},\ i \leq n.$$

Le coefficient

$$\mathrm{C}_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

est appelé coefficient binomial.

Théorème 64.5. *Soit n un nombre entier naturel. Pour tout t dans $[0\,,1]$:*

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = 1.$$

On peut montrer par récurrence que :

$$B_{0,n} = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \geq 1,\ B_{i,n}(0) = 0$$

ainsi que :

$$B_{i,n}(1) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \leq n-1,\ B_{i,n}(1) = 0.$$

Théorème 64.6. *Pour tout entier naturel n :*

$$B'_{0,n}(0) = -n \quad \textit{et} \quad B'_{n,n}(1) = n.$$

Pour tout $n \geq 1$:

$$B'_{1,n}(0) = n \quad \textit{et} \quad B'_{n-1,n}(1) = -n.$$

Pour tout $n \geq 4$ et tout i vérifiant $2 \leq i \leq n-2$:

$$B'_{i,n}(0) = B'_{i,n}(1) = 0.$$

3 Courbes de Bézier

3 1 La naissance des courbes de Bézier

Dans les années 60, les ingénieurs Pierre BÉZIER et Paul DE CASTELJAU travaillant respectivement chez Renault et Citroën, réfléchissent au moyen de définir de manière la plus concise possible la forme d'une carrosserie.

Le principe a été énoncé par BÉZIER mais l'algorithme de construction par son collègue de la marque aux chevrons qui n'a d'ailleurs été dévoilé que bien plus tard, la loi du secret industriel ayant primé sur le développement scientifique...

Pour la petite histoire, alors que Pierre BÉZIER (diplômé de l'ENSAM et de SUPÉLEC), à l'origine des premières machines à commandes numériques et de la CAO ce qui n'empêcha pas sa direction de le mettre à l'écart : il se consacra alors presque exclusivement aux mathématiques et à la modélisation des surfaces et obtint même un doctorat en 1977.

Paul DE CASTELJAU étant lui un mathématicien d'origine, ancien élève de la Rue d'ULM, qui a un temps été employé par l'industriel automobile.

Aujourd'hui, les courbes de Bézier sont très utilisées en informatique.

Une courbe de Bézier est une courbe paramétrique aux extrémités imposées avec des points de contrôle qui définissent les tangentes à cette courbe à des instants donnés.

FIGURE 64.1 – Pierre Bézier

3 2 Définition et propriétés des courbes de Bézier

Définition 64.7 (Courbe de Bézier). *Soient* $P_0, P_1, \dots, P_n$ *des points du plan* $\mathcal{P}$. *Soient* $B_{0,n}, B_{1,n}, \dots, B_{n,n}$ *les* $n+1$ *polynômes de Bernstein de degré* n. *On appelle* courbe de Bézier *pilotée par les points* $P_0, P_1, \dots, P_n$, *la courbe* Γ *décrite par les points* $M(t)$, *barycentres*[a] *des points pondérés*

$$(P_0, B_{0,n}(t)), (P_1, B_{1,n}(t)), \dots, (P_n, B_{n,n}(t))$$

avec $t \in [0\,,1]$. *En d'autres termes :*

$$\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathcal{P},\ \exists t \in [0\,,1],\ \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\overrightarrow{M(t)P_i} = \vec{0} \right\}.$$

a. Ces barycentres sont bien définis puisque la somme des coefficients vaut 1 pour tout t dans $[0\,,1]$.

Définition 64.8 (Points de contrôle). *Les points* $P_0, \dots, P_n$ *de la définition 64.7 sont les* points de contrôle *de la courbe de Bézier.*

Théorème 64.9. *Soit* O *un point quelconque de* $\mathcal{P}$. *Alors, pour tout* t *dans* $[0\,,1]$ *:*

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\overrightarrow{M(t)P_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\overrightarrow{OP_i}.$$

Ce théorème souligne qu'une courbe de Bézier est une courbe paramétrée, puisque dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'égalité de droite correspond à celle de la définition d'une courbe paramétrée. Les résultats obtenus dans la section précédente permettent d'établir les propriétés suivantes des courbes de Bézier :

Théorème 64.10. *On suppose que $n \geq 2$ et que les points $P_0, P_1, \dots, P_n$ ne sont pas tous confondus. Avec les notations de la définition 64.7, on a :*

1. *$M(0) = P_0$ et $M(1) = P_n$;*
2. *soit k le plus petit des nombres entiers i tels que $P_0 \neq P_i$, alors $\overrightarrow{P_0P_k}$ dirige la tangente à Γ en P_0 ;*
3. *soit p le plus grand des nombres entiers i tels que $P_n \neq P_i$, alors $\overrightarrow{P_pP_n}$ dirige la tangente à Γ en P_n.*

3 3 A quoi ressemble une courbe de Bézier

La figure 64.2 nous donne des exemples de courbes de Bézier pilotées par quatre points : P_0, P_1, P_2 et P_3. On remarquera que même si un seul des quatre points, ici : P_3, est déplacé, toute la courbe s'en trouve affectée.

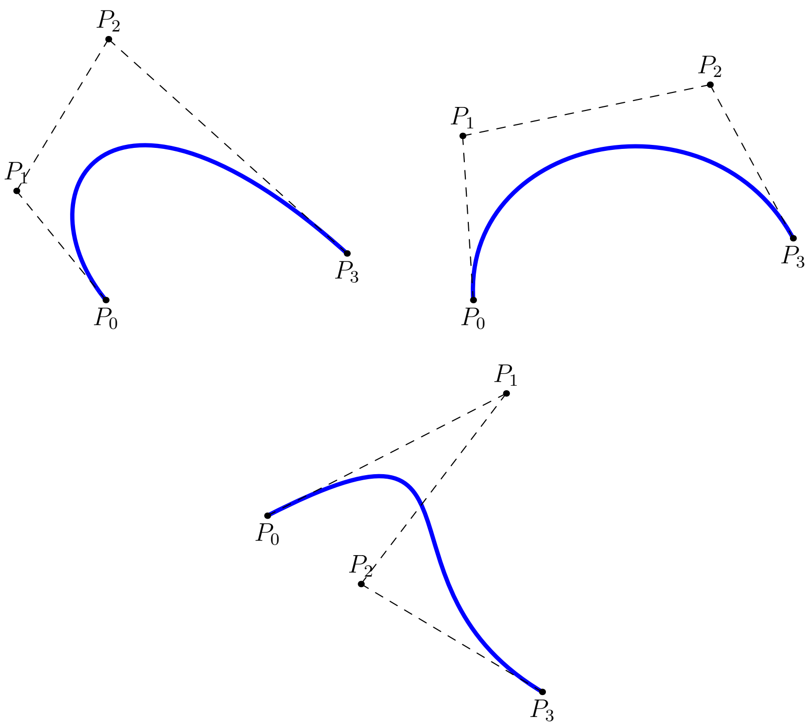


FIGURE 64.2 – Exemple de courbes de Béziers pilotées par quatre points

Les points de contrôle, hormis le premier point et le dernier point, ne sont, en général, pas des points de la courbe de Bézier.

3 4 Construction par barycentres successifs

Théorème 64.11. *Soient $P_0, P_1, \dots, P_n$ des points du plan. On suppose $n \geq 1$. Pour tout t dans $[0\,,1]$, on note $P(t)$ le barycentre de*

$$(P_0, B_{0,n-1}(t)), \dots, (P_{n-1}, B_{n-1,n-1}(t))$$

et on note $Q(t)$ le barycentre de

$$(P_1, B_{0,n-1}(t)), \dots, (P_n, B_{n-1,n-1}(t)).$$

Les points $P(t)$ et $Q(t)$ parcourent les courbes de Bézier pilotées respectivement par $P_0, \dots, P_{n-1}$ et $P_1, \dots, P_n$ quand t parcourt $[0\,,1]$. Alors, pour tout t dans $[0\,,1]$, le point $M(t)$, barycentre de $(P(t), 1-t), (Q(t), t)$ est aussi le barycentre de

$$(P_0, B_{0,n}(t)), \dots, (P_n, B_{n,n}(t))\ ;$$

autrement dit : le barycentre $M(t)$ de $(P(t), 1-t), (Q(t), t)$ parcourt la courbe de Bézier Γ pilotée par les points $P_0, \dots, P_n$ quand t parcourt $[0\,,1]$.

Le théorème 64.11 permet de fabriquer de proche en proche, pour chaque valeur de t dans $[0\,,1]$, le point correspondant de la courbe de Bézier pilotée par $P_0, \dots, P_n$. Par exemple, pour $t = 1/2$, on obtient la figure 64.3.

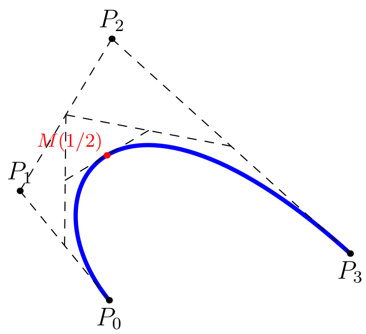


FIGURE 64.3 – Construction de la courbe de Bézier par barycentres successifs

En effet, lorsque $t = 1/2$, $1 - t = 1/2$, et les barycentres successifs correspondent aux milieux. On remarque sur ce dessin que la tangente à la courbe de Bézier au point $M(1/2)$ est $(P(1/2)Q(1/2))$. Ce phénomène n'est pas dû au hasard et résulte du théorème suivant :

Théorème 64.12. *Avec les notations du théorème précédent, on a :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OM(t)} = n\overrightarrow{P(t)Q(t)}.$$

Donc, pour tout t dans $[0\,,1]$ tel que $P(t) \neq Q(t)$, la droite $(P(t)Q(t))$ est tangente à la courbe de Bézier Γ au point $M(t)$.

4 Un exercice type BTS

Exercice 64.13. Soit le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les unités étant $\|\vec{\imath}\| = 2$ cm et $\|\vec{\jmath}\| = 1$ cm. On considère les points

$$A_0 = O(0,0)\ ,\ A_1(0,-4)\ ,\ A_2(1,1) \text{ et } A_3(2,5).$$

1. Montrer que la représentation paramétrique de la courbe de Bézier associée aux points A_0, A_1, A_2, A_3 est :
$$\begin{cases} x(t) = -t^3 + 3t^2 \\ y(t) = -10t^3 + 27t^2 - 12t \end{cases} \quad , \quad t \in [0\,,1].$$
2. (a) Déterminer les variations des fonctions x et y. On dressera le tableau des variations conjointes de x et y. Les calculs seront données à 10^{-1} près.
   (b) Préciser les points où la courbe admet une tangente parallèle à l'un des axes de coordonnées.
   (c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point A_3.
3. Déterminer, à 10^{-1} près, l'abscisse du point d'intersection, autre que O, de la courbe de Bézier, avec l'axe des abscisses.
4. Tracer dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe de Bézier ainsi étudiée.

Compléments

1 Démonstration des théorèmes du cours

Démonstration du théorème 64.5. En utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient :
$$\sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i t^i (1-t)^{n-i} = (t+1-t)^n = 1^n = 1.$$
□

Démonstration du théorème 64.6. $B_{0,n}(t) = \mathrm{C}_n^0 (1-t)^n$. Donc,
$$B'_{0,n}(t) = -n\mathrm{C}_n^0 (1-t)^{n-1} \quad \text{et} \quad B'_{0,n}(0) = n\mathrm{C}_n^0 1^{n-1} = -n$$
$B_{n,n}(t) = \mathrm{C}_n^n t^n$. Donc,
$$B'_{n,n}(t) = n\mathrm{C}_n^n t^{n-1} \quad \text{et} \quad B'_{n,n}(1) = n\mathrm{C}_n^n 1^{n-1} = n.$$
$B_{1,n}(t) = \mathrm{C}_n^1 t(1-t)^{n-1}$. Donc,
$$B'_{1,n}(t) = \mathrm{C}_1^n[(1-t)^{n-1} - (n-1)t(1-t)^{n-2} \quad \text{et} \quad B'_{1,n}(0) = \mathrm{C}_n^1[1^{n-1} = n.$$
$$B'_{i,n} = \mathrm{C}_n^i[it^{i-1}(1-t)^{n-i} - (n-i)t^i(1-t)^{n-i-1}].$$
Dans cette expression, les exposants sont tous strictement positifs. D'où le résultat. □

Démonstration du théorème 64.9. Il suffit d'introduire par relation de Chasles, le point O dans chaque vecteur de l'égalité de gauche, et d'utiliser le fait que $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = 1$, pour obtenir l'égalité de droite. □

Démonstration du théorème 64.11. Comme $M(t)$ est le barycentre de $(P(t), 1-t)$, $(Q(t), t)$, on a :
$$(1-t)\overrightarrow{M(t)P(t)} + t\overrightarrow{M(t)Q(t)} = \vec{0}.$$
On en déduit :
$$\overrightarrow{OM(t)} = (1-t)\overrightarrow{OP(t)} + t\overrightarrow{OQ(t)}.$$

Dans cette dernière égalité, utilisons le fait que les points $P(t)$ et $Q(t)$ sont des points courants de courbes de Bézier. On obtient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM(t)} &= (1-t)\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)\overrightarrow{OP_i} + t\sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1}(t)\overrightarrow{OP_{j+1}} \\
&= (1-t)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} t^k(1-t)^{n-1-k}\overrightarrow{OP_i} + t\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} t^{k-1}(1-t)^{n-1-(k-1)}\overrightarrow{OP_k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^{k} t^k(1-t)^{n-k}\overrightarrow{OP_k} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} t^k(1-t)^{n-k}\overrightarrow{OP_k} \\
&= (1-t)^n\overrightarrow{OP_0} + \left(\sum_{k=1}^{n-1} [\mathrm{C}_{n-1}^{k} + \mathrm{C}_{n-1}^{k-1}] t^k(1-t)^{n-k}\overrightarrow{OP_k}\right) + t^n\overrightarrow{OP_n}
\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_{n-1}^k + \mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$, on en déduit le théorème la dernière expression obtenue pour $\overrightarrow{OM(t)}$.

□

Démonstration du théorème 64.12. En écrivant $\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k t^k(1-t)^{n-k}\overrightarrow{OP_k}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OM(t)} &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (kt^{k-1}(1-t)^{n-k} - (n-k)t^k(1-t)^{n-1-k})\overrightarrow{OP_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k t^{k-1}(1-t)^{n-k}\overrightarrow{OP_k}t - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\mathrm{C}_n^k t^k(1-t)^{n-1-k}\overrightarrow{OP_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} t^{k-1}(1-t)^{n-1-(k-1)}\overrightarrow{OP_k} - \sum_{k=0}^{n-1} n\mathrm{C}_{n-1}^{k} t^k(1-t)^{n-1-k}\overrightarrow{OP_k} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} n\mathrm{C}_{n-1}^{j} t^j(1-t)^{n-1-j}\overrightarrow{OP_{j+1}} - \sum_{k=0}^{n-1} n\mathrm{C}_{n-1}^{k} t^k(1-t)^{n-1-k}\overrightarrow{OP_k} \\
&= n\overrightarrow{OQ(t)} - n\overrightarrow{OP(t)} = n\overrightarrow{P(t)Q(t)}.
\end{aligned}$$

□

2 Solution de l'exercice type BTS

Solution de l'exercice 64.13. 1. On utilise la formule du cours :

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{i=3} \mathrm{C}_3^i t^i(1-t)^{3-i}\overrightarrow{OA_i},$$

on en déduit :

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)^3 \times 0 + 3t(1-t)^2 \times 0 + 3t^2(1-t) \times 1 + t^3 \times 2 \\ y(t) = (1-t)^3 \times 0 + 3t(1-t)^2(-4) + 3t^2(1-t) \times 1 + t^3 \times 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = 3t^2 - 3t^3 + 2t^3 \\ y(t) = -12t(1-2t+t^2) + 3t^2 - 3t^3 + 5t^3 \end{cases}$$

En conclusion, une représentation graphique de la courbe de Bézier demandée est :

$$\begin{cases} x(t) = -t^3 + 3t^2 \\ y(t) = -10t^3 + 27t^2 - 12t \end{cases}.$$

2. (a) Les fonctions x et y sont dérivables sur l'intervalle $[0\,,1]$. On a :

$$x'(t) = -3t^2 + 6t = 3t(-t+2).$$

$x'(t)$ s'annule pour $t = 0$ et $t = 2$. Sur l'intervalle $[0\,,1]$, $3t \geq 0$ et $-t+2 \geq 0$. On en déduit $x'(t) \geq 0$; la fonction x croît sur $[0\,,1]$.
De plus,

$$y'(t) = -30t^2 + 54t - 12 = 6(-5t^2 + 9t - 2).$$

Le polynôme entre parenthèse est un polynôme du second degré dont le discriminant est $\Delta = 81 - 40 = 41$. Donc $y'(t)$ s'annule pour $t' = \alpha = \frac{-9+\sqrt{41}}{-10} \approx 0{,}26$ et $t'' = \frac{-9-\sqrt{41}}{-10} \approx 1,5$. $y'(t)$ est du signe de -5 pour les valeurs de t à l'extérieur des racines et du signe contraire à l'intérieur. On en déduit sur l'intervalle $[0\,,1]$: $y'(t) \leq 0$ sur $[0\,,\alpha]$ et $y'(t) \geq 0$ sur $[\alpha\,,1]$.
On peut dresser le tableau de variations conjointes de x et y.

t	0		α		1
$x'(t)$	0	$+$		$+$	3
$y'(t)$	-12	$-$	0	$+$	12
$x(t)$					2
				$\nearrow$	
			$0,18$		
		$\nearrow$			
	0				
$y(t)$	0				5
		$\searrow$		$\nearrow$	
			$-1,47$		
points	O		B		A_3

(b) Au point O où $t = 0$, la dérivée de x s'annule mais pas celle de y. Un vecteur directeur de la tangente en A_1 à la courbe est $\vec{\jmath}$. La tangente en O à la courbe est parallèle à l'axe des ordonnées.
Au point B où $t = \alpha$, la dérivée de y s'annule mais pas celle de x, la tangente à la courbe en B admet pour vecteur directeur $\vec{\imath}$. La tangente à la courbe en B est parallèle à l'axe des abscisses.

(c) Au point A_3, d'après le cours, un vecteur directeur de la tangente à la courbe est $\overrightarrow{A_2A_3}$ de coordonnées $(1, 4)$, cette tangente a donc pour coefficient directeur 4, son équation réduite sera de la forme $y = 4x + b$.
Comme A_3 appartient à la tangente, ses coordonnées vérifient l'équation de la tangente :

$$5 = 4 \times 2 + b,$$

on en déduit $b = -3$. Une équation de la tangente T en A_3 à la courbe de Bézier est $y = 4x - 3$.

3. La courbe coupe l'axe des abscisses quand $y(t) = 0$ soit $-t(10t^2 - 27t + 12) = 0$, ce qui se traduit par :

$$t = 0 \text{ (il s'agit ici du point } O \text{ non demandé) ou } 10t^2 - 27t + 12 = 0.$$

Le polynôme du second degré admet pour discriminant $\Delta = 27^2 - 4 \times 10 \times 12 = 249$.

$$t' = \frac{27 - \sqrt{249}}{20} \approx 0,56 \quad \text{et} \quad t'' = \frac{27 + \sqrt{249}}{20} \approx 2,1.$$

$t'' \notin [0\,,1]$, cette valeur ne convient pas.

En arrondissant les valeurs trouvées à 10^{-1} près, quand $t = t'$, le point d'intersection, autre que O, de la courbe avec l'axe des abscisses est :

$$D(0.77, 0).$$

4. La figure 64.4 nous donne le tracé de la courbe de Bézier pilotée par les points A_0, A_1, A_2, A_3 et la tangente T en A_3 à la courbe de Bézier.

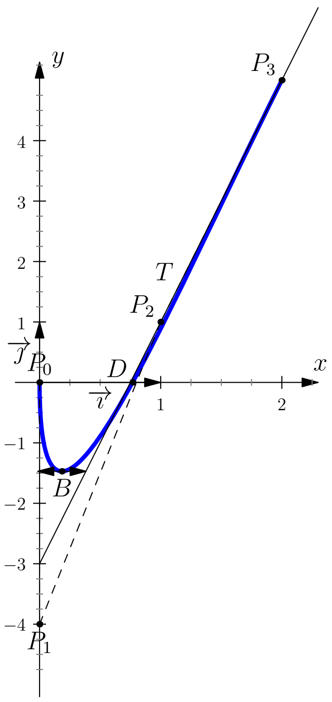


FIGURE 64.4 – Courbe de Bézier pilotée par les points A_0, A_1, A_2, A_3 donnés par l'énoncé

□

3 Construction d'une courbe de Bézier sur Geogebra

On veut construire sur Geogebra la courbe de Bézier pilotée, par exemple, par quatre points : A, B, C, D.

1. Tout d'abord, on place les points A, B, C, D sur le repère avec l'outil « *Nouveau point* ».
2. Ensuite, on crée un curseur de variable t qui prend les valeurs de 0 à 1 par incrément de ε (où $0 < \varepsilon < 1$).
3. On tape les coordonnées du point M qui va nous décrire la courbe de Bézier pilotée par les points A, B, C et D :

```
M = ((1-t)^3*x(A)+3*(1-t)^2*t*x(B)+3*(1-t)*t^2*x(C)+t^3*x(D)
    ,(1-t)^3*y(A)+3*(1-t)^2*t*y(B)+3*(1-t)*t^2*y(C)+t^3*y(D))
```

4. On peut faire bouger le curseur t pour voir comment se déplace P dans l'enveloppe connexe décrite par les points A, B, C, D.
5. En cliquant droit sur le point M, on peut activer l'option « *Trace activée* » pour obtenir une courbe qui est, donc, la courbe de Bézier pilotée par les points A, B, C, D. En cliquant droit sur le curseur t, on peut activer l'option « *Animer* » pour que le point M bouge automatiquement.
6. Plus ε est petit, plus le tracé est « continu ».

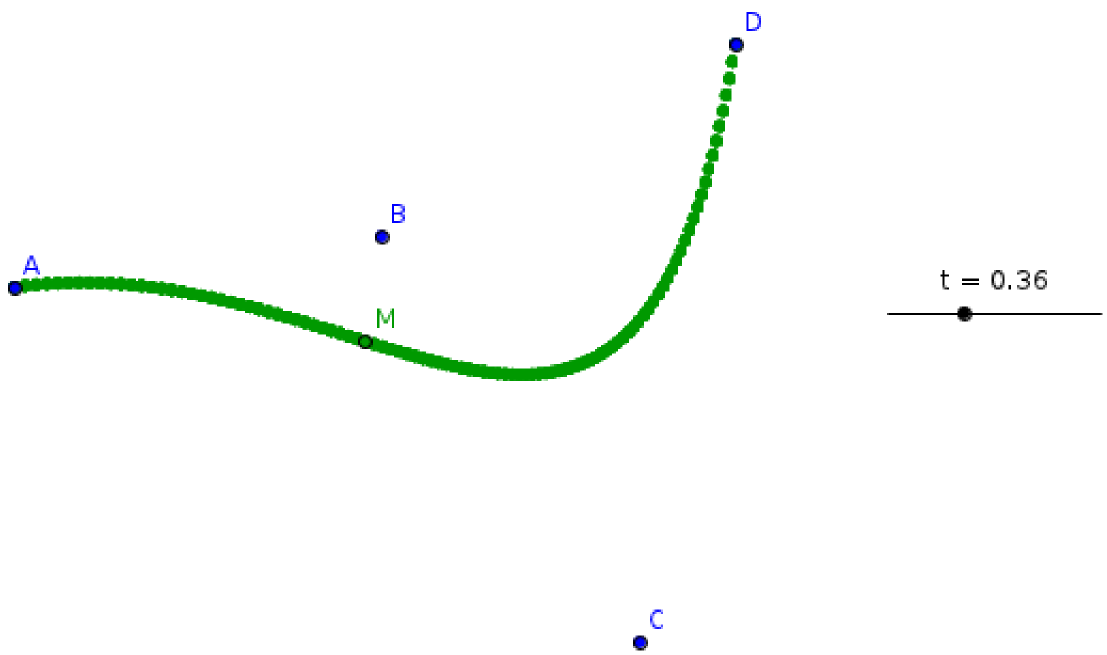


FIGURE 64.5 – Exemple d'une courbe de Bézier pilotée par quatre points construite sous Geogebra

LEÇON

65 Exemples d'études de courbes

Niveau, prérequis, références

Niveau Terminale S - BTS

Prérequis Etude d'une fonction, courbes paramétrées, courbes de Béziers

Références [155, 156]

Contenu de la leçon

Cette leçon est une compilation des exercices posés dans les leçons :
- Leçon n° 54 : Courbes planes définies par des équations paramétriques
- Leçon n° 59 : Problèmes conduisant à l'étude de fonctions
- Leçon n° 64 : Courbes de Bézier

1 Etude d'une fonction

Exercice 65.1. La partie I est l'étude d'une fonction auxiliaire g nécessaire à l'étude de la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}.$$

L'étude de la fonction f fait l'objet de la partie II. La partie III est l'étude de deux suites numériques associées.

Partie I On considère la fonction numérique g définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 2\ln x.$$

1. Etudier le sens de variation de g.
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,,+\infty[$.

Partie II On considère la fonction numérique f définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}.$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm)

1. Déterminer la limite f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
2. (a) Déterminer la limite f en $+\infty$.
   (b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.
   (c) Déterminer la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) sur $]0\,,+\infty[$. Montrer en particulier que (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ en un point A que l'on déterminera.
3. Etudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe $(\mathcal{C})$ où la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ est parallèle à (Δ). Préciser les coordonnées de B.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α. Justifier l'encadrement :

$$0{,}34 < \alpha < 0{,}35.$$

6. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites (Δ) et (T).

Partie III On considère la suite numérique (x_n) définie par $x_n = \mathrm{e}^{(n-2)/2}$ pour tout nombre entier naturel n.

1. (a) Montrer que (x_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
   (b) Montrer que (x_n) est une suite croissante.
2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$a_n = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

   (a) Donner une interprétation géométrique de a_n.
   (b) Montrer que $a_n = \frac{2n+1}{2}$ pour tout nombre entier naturel n. En déduire que (a_n) est une suite arithmétique.

Exercice 65.2. Une entreprise fabrique et vend un liquide L. Une étude a permis de modéliser le coût moyen de production par :

$$f(x) = 0{,}5x + \frac{8}{x}, \qquad \text{où } x > 0.$$

Le coût moyen $f(x)$ est exprimé en milliers d'euros et la quantité produite x en hectolitres. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan (unité 1 cm).

1. **Etude de la fonction coût moyen**
   (a) Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$.
   (b) Déterminer les limites en f en 0 et en $+\infty$.
   (c) Donner le tableau de variations de f.
   (d) Montrer que la droite D d'équation $y = 0{,}5x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$. Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à D.
   (e) Construire $\mathcal{C}$ ainsi que D.
2. **Seuils de rentabilité pour l'entreprise**
   L'entreprise ne peut être bénéficiaire que si le prix de vente de l'hectolitre est supérieur au coût moyen de fabrication. Le prix de vente de l'hectolitre $p(x)$ est fonction de la quantité x vendue :

$$p(x) = \begin{cases} -0{,}8x + 10 & \text{si } x \in]0\,,10[\\ 2 & \text{si } x \in [10\,,+\infty] \end{cases}$$

   où $p(x)$ est exprimé en milliers d'euros et x en hectolitres.
   (a) On note P la représentation graphique de la fonction p. Tracer P dans le repère précédent. La fonction p est-elle une fonction continue ? (Justifier à partir du graphique).
   (b) Déterminer graphiquement l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise soit bénéficiaire.
   (c) Confirmer le résultat précédent par le calcul (on pourra se ramener à une inéquation du second degré).

2 Etude de courbes paramétrées

Exercice 65.3. On considère la courbe (Γ) définie par la représentation graphique :

$$\begin{cases} x = f(t) = \cos(2t) - 2\cos(t) \\ y = g(t) = \sin(2t) - 2\sin(t) \end{cases}$$

où t est un réel appartenant à l'intervalle $[-\pi\,,\pi]$.

1. Montrer que la courbe (Γ) admet un axe de symétrie en calculant $f(-t)$ et $g(-t)$.
2. (a) Calculer $f'(t)$.

(b) Etablir le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0\,,\pi]$, en déduire les variations de f sur $[0,\pi]$.

3. (a) Calculer $g'(t)$.

   (b) Déterminer le signe $g'(t)$ sur l'intervalle $[0\,,\pi]$, en déduire les variations de g sur $[0\,,\pi]$.

4. Dresser sur l'intervalle $[0,\pi]$ le tableau de variations conjointes des fonctions f et g.

5. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe (Γ) aux points B, C et D de paramètres
$$t_B = \frac{\pi}{3},\ t_C = \frac{2\pi}{3} \quad \text{et} \quad t_D = \pi.$$

6. Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm. Tracer les tangentes aux points A, B, C et D puis la courbe (Γ). *On admet que la tangente à la courbe* (Γ) *au point* A *de paramètre* $t_A = 0$ *a pour vecteur directeur* $\vec{\imath}$.

3 Etude de courbes de Bézier

Exercice 65.4. Soit le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les unités étant $\|\vec{\imath}\| = 2$ cm et $\|\vec{\jmath}\| = 1$ cm. On considère les points
$$A_0 = O(0,0)\ ,\ A_1(0,-4)\ ,\ A_2(1,1) \text{ et } A_3(2,5).$$

1. Montrer que la représentation paramétrique de la courbe de Bézier associée aux points A_0, A_1, A_2, A_3 est :
$$\begin{cases} x(t) = -t^3 + 3t^2 \\ y(t) = -10t^3 + 27t^2 - 12t \end{cases} \quad , \quad t \in [0\,,1].$$

2. (a) Déterminer les variations des fonctions x et y. On dressera le tableau des variations conjointes de x et y. Les calculs seront données à 10^{-1} près.

   (b) Préciser les points où la courbe admet une tangente parallèle à l'un des axes de coordonnées.

   (c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point A_3.

3. Déterminer, à 10^{-1} près, l'abscisse du point d'intersection, autre que O, de la courbe de Bézier, avec l'axe des abscisses.

4. Tracer dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe de Bézier ainsi étudiée.

Compléments

Solution à l'exercice 65.1. **Partie I** g est la fonction numérique définie sur $]0\,,+\infty[$ par :
$$g(x) = x^2 - 2\ln x.$$

1. g est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et on a :
$$g'(x) = 2x - 2 \times \frac{1}{x} = 2\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{2(x^2-1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}.$$
Comme $x \in\ ]0\,,+\infty[$, on a $x > 0$ et $x+1 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $(x-1)$. On en déduit que $g'(x) < 0$ pour $x \in\ ]0\,,1[$ et $g'(x) > 0$ pour $x]1\,,+\infty[$. Donc : g est décroissante sur $]0\,,1[$ et croissante sur $]1\,,+\infty[$;

2. On a $g(1) = 1^2 - 2\ln 1 = 1$. D'après le sens de variation de g, on a alors $g(x) \geq 1$ pour tout $x > 0$. Donc $g(x) > 0$ pour tout $x \in\ ]0\,,+\infty[$.

Partie II f est la fonction numérique définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}.$$

$(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).

1. On peut écrire
$$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}(1+\ln x).$$
On sait que
$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty\quad\text{donc}\quad\lim_{x\to 0^+}1+\ln x=-\infty,$$
d'autre part
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty\quad\text{donc}\quad\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}(1+\ln x)=-\infty.$$
De plus $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2}=0$ et par conséquent :
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2}+\frac{1}{x}(1+\ln x)=-\infty.$$
On peut en déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ a pour asymptote verticale la droite d'équation $x=0$ (Axe Oy).

2. (a) On peut écrire :
$$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}.$$
On sait que :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\quad\text{et}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty.$$
Donc
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}=+\infty.$$
(b) On a
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-\frac{x}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}=0.$$
Donc : la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y=\frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

(c) On a
$$f(x)-\frac{x}{2}=\frac{1+\ln x}{x}.$$
Donc :
$$f(x)=\frac{x}{2}\Leftrightarrow 1+\ln x=0\Leftrightarrow\ln x=-1\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{-1}.$$
Donc : $(\mathcal{D})$ coupe $(\mathcal{C})$ au point A d'abscisses e^{-1} et d'ordonnée $\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}$. $x\in\,]0\,,+\infty[$ donc $f(x)-\frac{x}{2}$ est du signe $1+\ln x$. La fonction $\ln$ étant strictement croissante, on a alors :
$$1+\ln x>0\Leftrightarrow\ln x>-1\Leftrightarrow x>\mathrm{e}^{-1}$$
et
$$1+\ln x<0\Leftrightarrow\ln x<-1\Leftrightarrow x<\mathrm{e}^{-1}.$$
On en déduit que $f(x)>\frac{x}{2}$ pour $x>\mathrm{e}^{-1}$ et $f(x)<\frac{x}{2}$ pour $x<\mathrm{e}^{-1}$. Sur $]0\,,\mathrm{e}^{-1}[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessous de $(\mathcal{D})$ et sur $]\mathrm{e}^{-1}\,,+\infty[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessus de $(\mathcal{D})$.

3. Pour tout $x \in]0\,,+\infty[$, on a
$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}.$$
f est donc la somme et le quotient de fonctions dérivables sur $]0\,,+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et on a :
$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{x}x - (1+\ln x)\times 1}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1-1-\ln x}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 2\ln x}{2x^2}.$$
Donc $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$. D'après la partie I, on sait que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0\,,+\infty[$ donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0\,,+\infty[$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$. On peut donner le tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. La tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisses b a pour coefficient directeur $f'(b)$. Cette tangente est parallèle à $(\mathcal{D})$ si et seulement si elle a le même coefficient que $(\mathcal{D})$.
$$f(b) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{b^2 - 2\ln b}{2b^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b^2 - 2\ln b = b^2 \Leftrightarrow \ln b = 0 \Leftrightarrow b = 1.$$
Il existe donc un point B et un seul où la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $\mathcal{C}$ est parallèle à $(\mathcal{D})$. B a pour abscisse 1 et pour ordonnée $f(1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.
5. f est une fonction continue et strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$. Donc pour tout réel k dans l'intervalle $]\beta\,,\gamma[$ où
$$\beta = \lim_{x\to 0^+} f(x) \quad \text{et} \quad \gamma = \lim_{x\to+\infty} f(x),$$
l'équation $f(x) = k$ a une solution unique. Comme $0 \in]\beta\,,\gamma[= \mathbb{R}$, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α. La calculatrice donne $f(0,34) \approx -0,06$ donc $f(0,34) < 0$ et $f(0,35) \approx 0,03$ donc $f(0,35) > 0$. On en déduit que $f(0,34) < f(\alpha) < f(0,35)$ et comme f est strictement croissante : $0,34 < \alpha < 0,35$.
6. Voir la figure 65.1

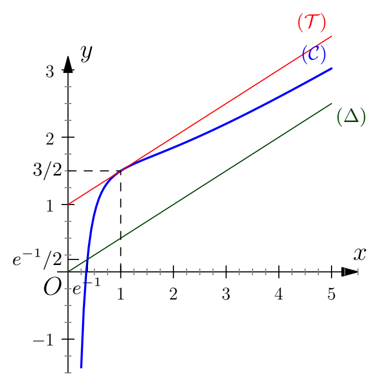


FIGURE 65.1 – Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$ et tangentes

Partie III La suite numérique (x_n) est définie par $x_n = \mathrm{e}^{(n-2)/2}$ pour tout nombre entier naturel n.

1. (a) On peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \exp(n+1-2)/2 = \mathrm{e}^{(n-2)/2+1/2} = \mathrm{e}^{(n-2)/2} \times \mathrm{e}^{1/2} = x_n \times \mathrm{e}^{1/2}.$$

On en déduit que (x_n) est une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{1/2}$. Son premier terme est $x_0 = \mathrm{e}^{(0-2)/2}$ donc $x_0 = \mathrm{e}^{-1}$.

(b) (x_n) est une suite géométrique de premier terme positif et de raison positive, donc (x_n) est une suite à termes positifs. On a $\mathrm{e}^{1/2} \geq 1$ donc $x_n \times \mathrm{e}^{1/2} \geq x_n$, c'est-à-dire $x_{n+1} \geq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite (x_n) est une suite croissante.

2. Pour tout entier naturel n, on a :

$$a_n = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

(a) D'après la partie II, on sait que $f(x) - \frac{x}{2} \geq 0$ pour $x \geq \mathrm{e}^{-1}$. Comme la suite (x_n) est croissante, on a :

$$\mathrm{e}^{-1} \leq x_n \leq x_{n+1}.$$

Donc $\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x$ est l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équations $x = x_n$ et $x = x_{n+1}$. L'unité du repère étant 2 cm, l'unité d'aire est 4 cm^2.

$$a_n = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x$$

est l'aire, en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équation $x = x_n$ et $x = x_{n+1}$.

(b)

$$a_n = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\frac{1+\ln x}{x}\right) \mathrm{d}x = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\ln x\right) \mathrm{d}x$$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour primitive $x \mapsto \ln x$. D'autre part, $\frac{1}{x} \times \ln x$ est de la forme $u'(x) \times u(x)$ donc $\frac{1}{x}\ln x$ a pour primitive $\frac{1}{2}u(x)^2 = \frac{1}{2}(\ln x)^2$. On a donc :

$$a_n = \left[4\ln x + 2(\ln x)^2\right]_{x_n}^{x_{n+1}} = 4\ln x_{n+1} + 2(\ln x_{n+1})^2 - 4\ln x_n - 2(\ln x_n)^2.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
a_n &= 4\ln \mathrm{e}^{(n-1)/2} + 2\left(\ln \mathrm{e}^{(n-1)/2}\right)^2 - 4\ln \mathrm{e}^{(n-2)/2} - 2\left(\ln \mathrm{e}^{(n-2)/2}\right)^2 \\
&= 4 \times \frac{n-1}{2} + 2\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{n-2}{2} - 2\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \\
&= 2n - 2 + \frac{n^2-2n+1}{2} - 2n + 4 - \frac{n^2-4n+4}{2} \\
&= 2 + \frac{n^2-2n+1-n^2+4n-4}{2} = 2 + \frac{2n-3}{2} = \frac{4+2n-3}{2}
\end{aligned}$$

donc $a_n = \frac{2n+1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $a_n = n + \frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$a_{n+1} = n + 1 + \frac{1}{2} = n + \frac{1}{2} + 1 = a_n + 1, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que (a_n) est une suite arithmétique de raison 1.

□

Solution à l'exercice 65.2. 1. **Etude de la fonction coût moyen**

(a) La fonction f est une fonction rationnelle, elle est dérivable sur $]0\,,+\infty[$. On sait que $f(x) = 0,5x + \frac{8}{x}$ donc :

$$f'(x) = 0,5 - \frac{8}{x^2} = \frac{0,5x^2 - 8}{x^2} = \frac{0,5(x^2-16)}{x^2} = \frac{0,5(x-4)(x+4)}{x^2}$$

$x^2 > 0$ pour tout réel x dans $]0\,,+\infty[$, le signe de $f'(x)$ est donc le signe du trinôme $0,5(x-4)(x+4)$. On a donc $f'(x) < 0$ pour tout $x \in\,]0\,,4[$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in\,]4\,,+\infty[$. Donc : f est strictement décroissante sur $]0\,,4[$ et strictement croissante sur $]4\,,+\infty[$.

(b) $\lim_{x\to 0} 0,5x = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{8}{x} = +\infty$ donc :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 0,5x + \frac{8}{x} = +\infty.$$

De plus $\lim_{x\to+\infty} 0,5x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{8}{x} = 0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 0,5x + \frac{8}{x} = +\infty.$$

(c) On a

$$f(4) = 0,5 \times 4 + \frac{8}{4} = 2 + 2 = 4.$$

On peut donner le tableau de variations de f :

x	0			4		1
$f'(x)$	$\|\|$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

(d) On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 0,5x = \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{x} = 0.$$

Donc : la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 0,5x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ quand x tend vers $+\infty$. Pour tout réel x dans $]0\,,+\infty[$, on a $x > 0$ donc $\frac{8}{x} > 0$ donc $f(x) - 0,5x > 0$ donc $f(x) > 0,5x$. On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ se trouve au-dessus de la droite $\mathcal{D}$.

(e) Voir la figure 65.2.

2. **Seuils de rentabilité pour l'entreprise**

(a) P étant la représentation graphique de la fonction ρ, elle est constituée par
– le segment de droite d'équation $y = -0,8x + 10$ pour $x \in\,]0\,,10[$ (on peut tracer ce segment en utilisant les points $A(0,10)$ et $B(10,2)$.
– la demi-droite d'équation $y = 2$ pour $x \in [10\,,+\infty[$.
La représentation graphique de ρ peut être tracée d'un seul trait (sans lever le crayon de la feuille), on en déduit que la fonction ρ est une fonction continue.

(b) L'entreprise est bénéficiaire lorsque le prix est supérieur au coût moyen, c'est-à-dire lorsque la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la courbe P. On obtient graphiquement que l'entreprise est bénéficiaire lorsque $x \in [0.9\,,6.8]$.

(c) Le tableau de variations de f justifie que $f(x) > 2$ pour tout $x \in\,]0\,,+\infty[$. Comme $\rho(x) = 2$ pour tout $x \geq 10$, l'entreprise ne peut pas être bénéficiaire lorsque $x \geq 0$. Pour $x \in\,]0\,,10[$, on peut écrire :

$$f(x) \leq \rho(x) \Leftrightarrow 0,5x + \frac{8}{x} \leq -0,8x + 10 \Leftrightarrow 1,3x - 10 + \frac{8}{x} \leq 0.$$

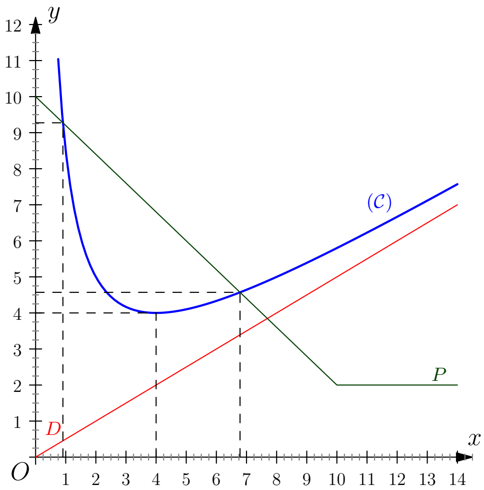


FIGURE 65.2 – Représentation graphique

Sachant que x est strictement positif, on obtient, en multipliant par x :

$$1,3x^2 - 10x + 8 \leq 0$$

$1,3x^2 - 10x + 8$ est un trinôme du second degré dont le discriminant est :

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1,3 \times 8 = 100 - 41,6 = 58,4$$

On a donc $\Delta > 0$. On en déduit que ce trinôme a deux racines qui sont :

$$\alpha = \frac{10 - \sqrt{58,4}}{2,6} \approx 0,9 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{10 + \sqrt{58,4}}{2,6} \approx 6,8.$$

Ces deux racines étant dans l'intervalle $]0\,,10[$, on peut conclure que : $f(x) \leq \rho(x)$ pour $x \in [\alpha\,,\beta]$. On a donc confirmé par le calcul le résultat de la question précédente.

□

Solution de l'exercice 65.3. 1.

$$\begin{cases} f(-t) = \cos(-2t) - 2\cos(-t) = \cos(2t) - 2\cos t = f(t) \\ g(-t) = \sin(-2t) - 2\sin(-t) = -\sin(2t) + 2\sin t = -g(t) \end{cases}$$

Les points $M(t)$ et $M(-t)$ ont pour coordonnées respectives :

$$(f(t), g(t)) \quad \text{et} \quad (f(t), -g(t)).$$

On constate que les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses pour tout $t \in [-\pi\,,\pi]$. (Γ) admet l'axe des abscisses pour symétrie. On pourra donc étudier les fonctions f et g sur l'intervalle $[0\,,\pi]$ et compléter le graphique par symétrie.

2. (a) f est dérivable sur $[0\,,\pi]$ et sa dérivée est définie par :

$$f'(t) = -2\sin(2t) + 2\sin t.$$

On connaît la formule

$$\sin(2t) = 2\sin t\cos t.$$

donc

$$f'(t) = -4\sin t\cos + 2\sin t \Leftrightarrow f'(t) = 2\sin t[1 - 2\cos t].$$

(b) Sur $[0\,,\pi]$, $\sin t \geq 0$ donc $f'(t)$ est du signe de $1-2\cos t$. Dans l'intervalle $[0\,,\pi]$, la fonction cosinus est décroissante.

$$1-2\cos t \geq 0 \Leftrightarrow \cos t \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leq t \leq \pi.$$

Sur $[0\,,\pi/3]$, $f'(t) \leq 0$; f décroît et sur $[\pi/3\,,\pi]$, $f'(t) \geq 0$, f croît.

3. (a) g est dérivable sur $[0\,,\pi]$ et sa dérivée vérifie :

$$g'(t) = 2\cos 2t - 2\cos t,$$

on applique la formule $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$:

$$g'(t) = 2(2\cos^2 t - 1) - 2\cos t = 2(2\cos^2 t - \cos t - 1).$$

La dérivée s'annule si $\cos t = 1$, on peut factoriser $g'(t)$ par $\cos(t) - 1$:

$$g'(t) = 2(\cos(t) - 1)(2\cos(t) + 1).$$

(b) Sachant que $-1 \leq \cos t \leq 1$, on en déduit $\cos t - 1 \leq 0$ donc $g'(t)$ est du signe contraire à celui de $2\cos t + 1$.

$$g'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 2\cos t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \cos t \leq -\frac{1}{2}.$$

Dans l'intervalle $[0\,,\pi]$, la fonction cosinus est décroissante, l'inéquation se traduit par $t \geq \frac{2\pi}{3}$ donc sur $[0\,,\pi]$:
– si $t \in [2\pi/3, \pi]$, $g'(t) \geq 0$, g croît
– si $t \in [0\,,2\pi/3]$, $g'(t) \leq 0$, g décroît.

4. On peut dresser les tableaux de variations de f et g sur $[0\,,\pi]$:

t	0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	$2\sqrt{3}$	$+$	0
$f(t)$	$-1/2$	$\searrow$	$-3/2$	$\nearrow$	$1/2$	$\nearrow$	3
Points	A		B		C		D

t	0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
$g'(t)$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$	4
$g(t)$	0	$\searrow$	$\sqrt{3}/2$	$\searrow$	$-3\sqrt{3}/2$	$\nearrow$	0
Points	A		B		C		D

5. Aux points B et D correspondant respectivement à $t = \frac{\pi}{3}$ et $t = \pi$, la dérivée de f s'annule mais pas la dérivée de g, en chacun de ces points la tangente admet pour vecteur directeur $\vec{\jmath}$. En B et D, la tangente à (Γ) est parallèle à l'axe des ordonnées. Au point C correspondant à $t = \frac{2\pi}{3}$, la dérivée de g s'annule mais pas celle de f. La tangente en C à la courbe admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{\imath}$. En C la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

6. L'étude précédente permet de tracer l'arc de courbe correspondant à l'intervalle $[0\,,\pi]$. La symétrie par rapport à l'axe des abscisses permettra de tracer la courbe (Γ) en entier. On a admis, dans le texte, que la tangente en A est confondue avec l'axe des abscisses.

□

Solution de l'exercice 65.4. 1. On utilise la formule du cours :

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{i=3} \mathrm{C}_3^i t^i (1-t)^{3-i} \overrightarrow{OA_i},$$

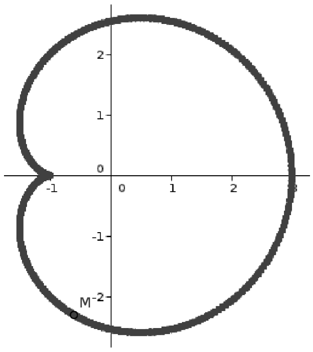


FIGURE 65.3 – Représentation graphique de Γ

on en déduit :

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)^3 \times 0 + 3t(1-t)^2 \times 0 + 3t^2(1-t) \times 1 + t^3 \times 2 \\ y(t) = (1-t)^3 \times 0 + 3t(1-t)^2(-4) + 3t^2(1-t) \times 1 + t^3 \times 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = 3t^2 - 3t^3 + 2t^3 \\ y(t) = -12t(1-2t+t^2) + 3t^2 - 3t^3 + 5t^3 \end{cases}$$

En conclusion, une représentation graphique de la courbe de Bézier demandée est :

$$\begin{cases} x(t) = -t^3 + 3t^2 \\ y(t) = -10t^3 + 27t^2 - 12t \end{cases}.$$

2. (a) Les fonctions x et y sont dérivables sur l'intervalle $[0\,,1]$. On a :

$$x'(t) = -3t^2 + 6t = 3t(-t+2).$$

$x'(t)$ s'annule pour $t = 0$ et $t = 2$. Sur l'intervalle $[0\,,1]$, $3t \geq 0$ et $-t+2 \geq 0$. On en déduit $x'(t) \geq 0$; la fonction x croît sur $[0\,,1]$.

De plus,

$$y'(t) = -30t^2 + 54t - 12 = 6(-5t^2 + 9t - 2).$$

Le polynôme entre parenthèse est un polynôme du second degré dont le discriminant est $\Delta = 81 - 40 = 41$. Donc $y'(t)$ s'annule pour $t' = \alpha = \frac{-9+\sqrt{41}}{-10} \approx 0{,}26$ et $t'' = \frac{-9-\sqrt{41}}{-10} \approx 1,5$. $y'(t)$ est du signe de -5 pour les valeurs de t à l'extérieur des racines et du signe contraire à l'intérieur. On en déduit sur l'intervalle $[0\,,1]$: $y'(t) \leq 0$ sur $[0\,,\alpha]$ et $y'(t) \geq 0$ sur $[\alpha\,,1]$.

On peut dresser le tableau de variations conjointes de x et y.

t	0		α		1
$x'(t)$	0	$+$		$+$	3
$y'(t)$	-12	$-$	0	$+$	12
$x(t)$	0	$\nearrow$	$0,18$	$\nearrow$	2
$y(t)$	0	$\searrow$	$-1,47$	$\nearrow$	5
points	O		B		A_3

(b) Au point O où $t = 0$, la dérivée de x s'annule mais pas celle de y. Un vecteur directeur de la tangente en A_1 à la courbe est $\vec{\jmath}$. La tangente en O à la courbe est parallèle à l'axe des ordonnées.

Au point B où $t = \alpha$, la dérivée de y s'annule mais pas celle de x, la tangente à la courbe en B admet pour vecteur directeur $\vec{\imath}$. La tangente à la courbe en B est parallèle à l'axe des abscisses.

(c) Au point A_3, d'après le cours, un vecteur directeur de la tangente à la courbe est $\overrightarrow{A_2A_3}$ de coordonnées $(1, 4)$, cette tangente a donc pour coefficient directeur 4, son équation réduite sera de la forme $y = 4x + b$.

Comme A_3 appartient à la tangente, ses coordonnées vérifient l'équation de la tangente :

$$5 = 4 \times 2 + b,$$

on en déduit $b = -3$. Une équation de la tangente T en A_3 à la courbe de Bézier est $y = 4x - 3$.

3. La courbe coupe l'axe des abscisses quand $y(t) = 0$ soit $-t(10t^2 - 27t + 12) = 0$, ce qui se traduit par :

$$t = 0 \text{ (il s'agit ici du point } O \text{ non demandé) ou } 10t^2 - 27t + 12 = 0.$$

Le polynôme du second degré admet pour discriminant $\Delta = 27^2 - 4 \times 10 \times 12 = 249$.

$$t' = \frac{27 - \sqrt{249}}{20} \approx 0,56 \quad \text{et} \quad t'' = \frac{27 + \sqrt{249}}{20} \approx 2,1.$$

$t'' \notin [0\,,1]$, cette valeur ne convient pas.

En arrondissant les valeurs trouvées à 10^{-1} près, quand $t = t'$, le point d'intersection, autre que O, de la courbe avec l'axe des abscisses est :

$$D(0.77, 0).$$

4. La figure 65.4 nous donne le tracé de la courbe de Bézier pilotée par les points A_0, A_1, A_2, A_3 et la tangente T en A_3 à la courbe de Bézier.

□

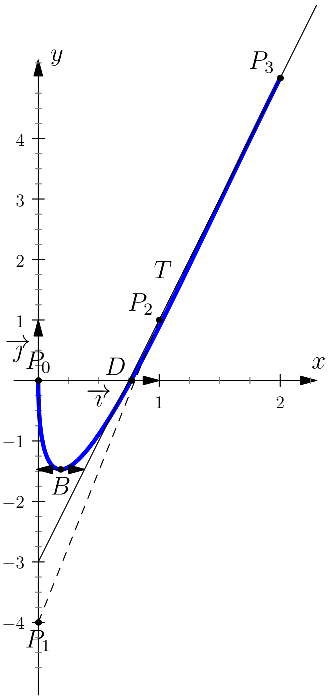


FIGURE 65.4 – Courbe de Bézier pilotée par les points A_0, A_1, A_2, A_3 donnés par l'énoncé

LEÇON

66 Aires

Niveau, prérequis, références

Niveau Sixième - Terminale S (Intégrale et aire)
Prérequis Quadrilatère, fonction
Références [157, 158, 159, 160, 161, 162]

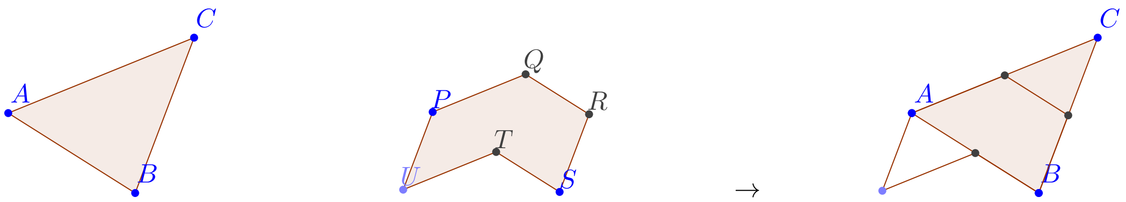
Contenu de la leçon

1 Comparer les aires

1 1 Egalité d'aires

Définition 66.1. *On dit que deux figures ont la même aire si en découpant l'une d'entre elle, on peut recomposer l'autre.*

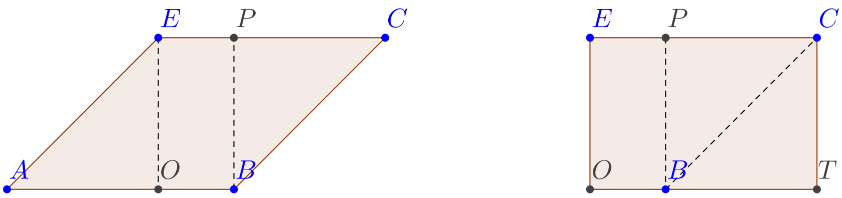
Exemple 66.2. Les polygones ABC et $PQRSTU$ ont la même aire car si on découpe le triangle PTU, et on le place sur le segment $[QR]$, on obtient le triangle ABC.



1 2 Transformer l'aire d'une figure en celle d'un rectangle

Proposition 66.3. *On peut toujours découper un polygone en un rectangle de même aire.*

Exemple 66.4. Dans le parallélogramme $ABCE$, on a découpé le triangle AEO qu'on a collé sur le segment CB. On obtient ainsi le rectangle $OECT$.



Proposition 66.5 (Découpage de Dudeney (1902))**.** *On peut découper un triangle équilatéral en quatre morceaux pour qu'il puisse former un rectangle.*

On va expliciter la construction de Dudeney. On se donne un triangle ABC équilatéral de côté 2. On note E et D les milieux de $[AC]$ et de $[AB]$. On construit I sur $[BC]$ tel que $EI^4 = 3$. Pour cela,

- On construit M le symétrique de A par rapport à (BC). Ainsi $AM = 2\sqrt{3}$.
- On construit le cercle $(\mathcal{C}_2)$ de centre M passant par B, donc de rayon 2. On note P l'intersection de la droite (AM) et du cercle $(\mathcal{C}_2)$ différent de A.
- On note Q le milieu de $[AP]$ et on construit $(\mathcal{C}_1)$ le cercle de centre Q passant par A ($(\mathcal{C}_1)$ a pour rayon $1 + \sqrt{3}$).
- On note O l'intersection du cercle $(\mathcal{C}_1)$ et de la parallèle à (BC) passant par M. On a alors $OM = 2\sqrt[4]{3}$.

– Soit N le milieu de $[OM]$ alors MN est la longueur EI cherchée.

On note F le projeté orthogonal de D sur $[EI]$ et G le point de $[EI]$ tel que $EG = IF$. H est l'antécédent sur $[BC]$ de G par projection orthogonale sur (EI).

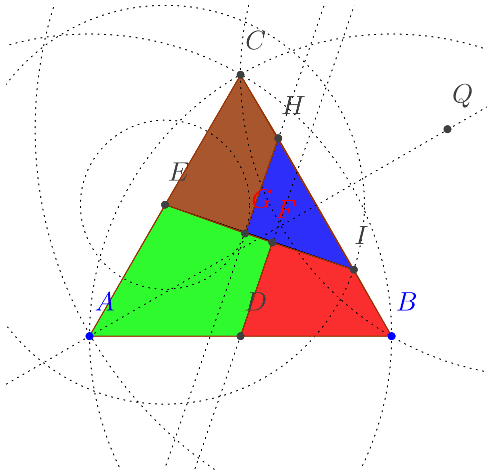


FIGURE 66.1 – Construction de Dudeney

On donne une suite d'instructions à faire sur Geogebra pour réaliser la construction précédente :

```
A = (0,0)
B = (2,0)
Cercle[A,2]
Cercle[B,2]
# On selectionne un des deux points
d'intersection des deux cercles
construits et on le nomme C
Polygone[A,B,C]
D = MilieuCentre[A,B]
E = MilieuCentre[A,C]
# Construction du point I
M = Symetrie[A,a]
C_2 = Cercle(M,B)
Droite[A,M]
# On selectionne le point
d'intersection de (AM) et du cercle
C_2 different de A et on le nomme P
Q = MilieuCentre[A,P]
C_1 = Cercle[Q,A]
Droite[M,a]
# On selectionne un des deux points
d'intersection de la droite
parallele a (BC) passant par M et du
cercle C_1 et on le nomme O
N = MilieuCentre[O,M]
Segment[M,N]
Cercle(E,g)
I = Intersection(a,k)
# Fin de la construction du point I
Segment[E,I]
Perpendiculaire[D,h]
```

```
F = Intersection[i,h]
Segment[I,F]
Cercle(E,j)
G = Intersection[h,p]
Perpendiculaire[G,h]
H = Intersection[a,l]
Segment[G,H]
Segment[D,F]
```

1 3 Inégalité

Définition 66.6. *On dit que deux figures n'ont pas la même aire si en essayant de découper une des figures pour la reconstituer en l'autre figure, les deux surfaces ne sont pas superposables* [a]*.*

a. c'est-à-dire qu'une des deux surfaces « dépassent » l'autre

Exemple 66.7. Dans la figure 66.2, les deux figures n'ont pas la même aire car si on les superpose, la surface d'une des deux figures dépassent l'autre.

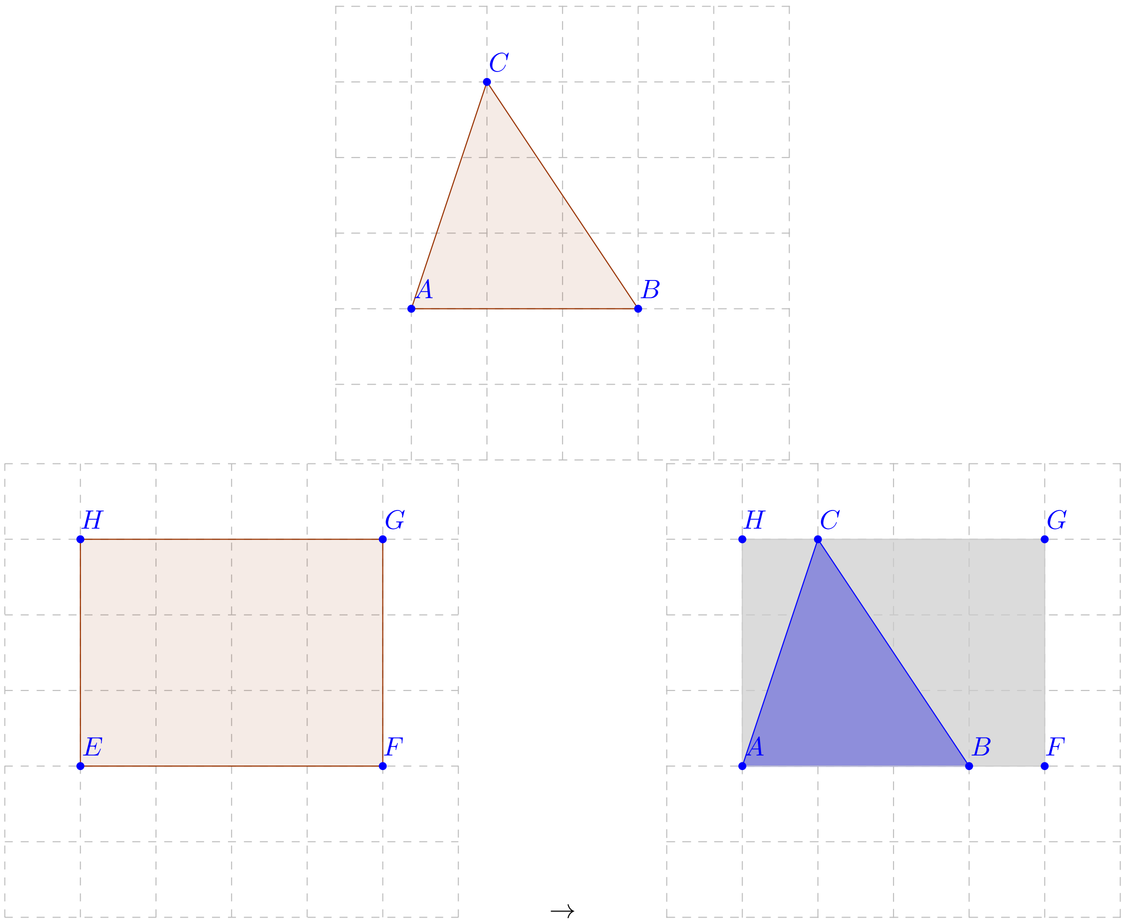


FIGURE 66.2 – Deux figures qui n'ont pas la même aire

1 4 Les multiples

Définition 66.8. *Soit A_1 (resp. A_2) l'aire de deux polygones P_1 (resp. P_2). On dit que les deux aires sont multiples l'un de l'autre s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A_1 = kA_2$.*

Exemple 66.9. La figure 66.3 nous montre deux figures dont les aires sont multiples.

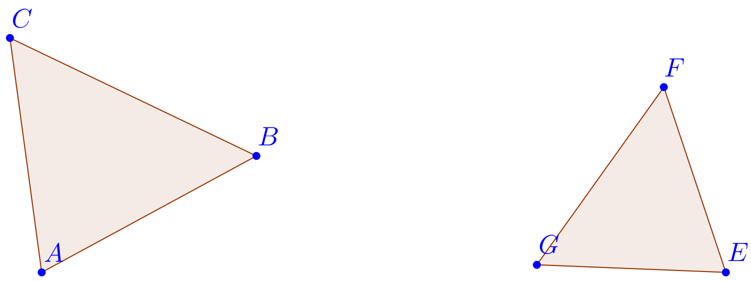


FIGURE 66.3 – Aires multiples

1 5 Les partages

Définition 66.10. *Soit un polygone P et A son aire. On dit qu'on partage le polygone P en des polygones $(P_1, \dots, P_n)$ avec aires $(A_1, \dots, A_n)$ si pour tout $1 \leq i \leq n$, $P_i \subset P$ (les polygones P_i sont dans le polygone P) et il existe $0 < k_i < 1$, tels que $A_i = k_i A$ et $\sum_{i=1}^{n} k_i = 1$.*

Exemple 66.11. Soit $ABCD$ le rectangle de la figure 66.4. On dit que $(P_1, \dots, P_7)$ partage le rectangle.

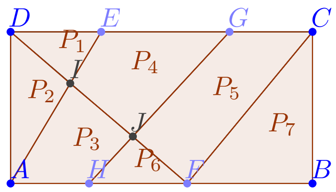


FIGURE 66.4 – Partage du rectangle en polygones $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$

2 Mesurer une aire

2 1 Principe

Définition 66.12 (Aire d'une surface). *L'aire d'une surface est la mesure de sa surface, dans une unité d'aire donnée.*

Définition 66.13. *Mesurer une aire d'un polygone, c'est compter le nombre de carré unité (on précisera l'unité plus tard) qui sont inscrit dans ce polygone.*

2 2 Méthode

Définition 66.14. *On se donne un polygone et un carré unité. Pour calculer l'aire de ce polygone, il faut le partager avec autant de carré unité que l'on peut (quitte à ce que la surface de ce carré dépasse la figure).*

Définition 66.15. *On se donne un polygone et un carré unité. Pour calculer l'aire de ce polygone, on peut le découper pour en faire un rectangle et ensuite compter le nombre de carré unité inscrit dans le rectangle.*

Exemple 66.16. L'aire du triangle ABC de la figure 66.5 est 6 car en le découpant, on peut former un rectangle qui contient 6 carré unité $DEFG$.

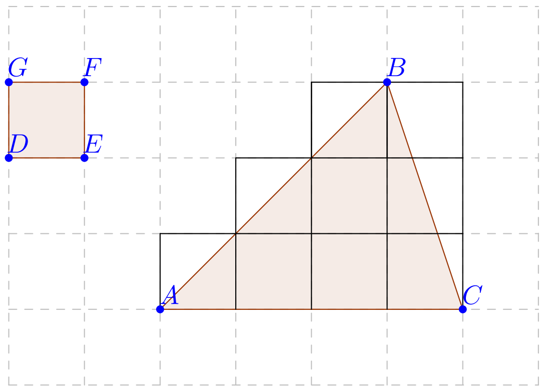


FIGURE 66.5 – Mesurer l'aire d'une figure

3 Calculer une aire

3 1 Aire d'un rectangle

Définition 66.17 (Aire d'un rectangle)**.** *Un rectangle de longueur L et de largeur l a pour aire $L \times l$.*

Démonstration. Soit un rectangle de longueur L et de largeur l. Sur la longueur, on peut inscrit L carré unité et sur la largeur, l carré unité. Donc, le nombre de carrés unité qu'on peut inscrire dans le rectangle est Ll et ainsi, l'aire du rectangle est Ll. □

Exemple 66.18. L'aire du rectangle de la figure 66.6 est de 8.

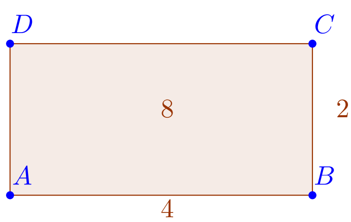


FIGURE 66.6 – Aire d'un rectangle

3 2 Aire d'un triangle rectangle

Définition 66.19. *L'aire d'un triangle rectangle de base b et de hauteur h est $\frac{b \times h}{2}$.*

Démonstration. Un triangle rectangle de base b et de hauteur h ($b > h$) est un rectangle de longueur b et de largeur h qu'on a coupé en deux (l'hypoténuse du triangle rectangle correspond à une des diagonales du rectangle). Donc, comme l'aire du rectangle est $b \times h$, l'aire du triangle rectangle est $\frac{1}{2}(b \times h)$. □

Exemple 66.20. L'aire d'un triangle rectangle de base 4 et de hauteur 2 est :

$$A = \frac{1}{2}(4 \times 2) = 4.$$

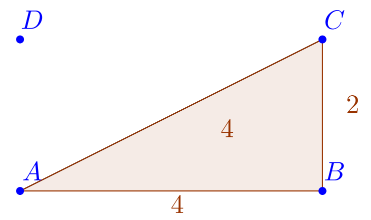


FIGURE 66.7 – Aire du triangle rectangle

3 3 Aire des polygones

On montre dans l'exemple suivant comment transformer certains polygones en rectangle pour pouvoir calculer leur aire.

Exemples 66.21.

1. L'aire d'un parallélogramme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur. Soit $ABCD$ un parallélogramme, E et F les projections orthogonales de C et D sur (AB). Le rectangle $FECD$ a même aire que le parallélogramme, car les triangles ADF et BCE sont isométriques. D'où

$$\text{Aire}(ABCD) = AB \times DF = a \times h \quad \text{où } a = AB = CD \text{ et } h = DF = CE.$$

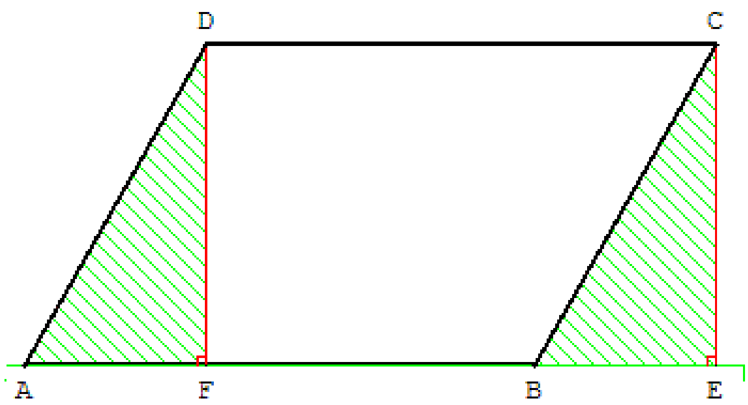


FIGURE 66.8 – Transformation d'un parallélogramme en rectangle

2. La surface d'un trapèze a pour mesure le produit de la moyenne des bases par sa hauteur. Si $b = AB$, $b' = CD$ et $h = HE$ alors

$$\text{Aire}(ABCD) = \frac{b + b'}{2} \times h.$$

Soit $ABCD$ un trapèze de grande base $[AB]$, et de petite base $[CD]$ parallèle à (AB) et I et J les milieux des côtés $[BC]$ et $[AD]$. D'après la propriété de Thalès, IJ est égal à la moyenne des bases. Soient E et F les projections orthogonales de J et I sur (AB) ainsi que G et H les projections orthogonales de I et J sur (CD). Le rectangle $EFGH$ a même aire que le trapèze $ABCD$ car les triangles rectangles IGC et IFB sont isométriques, de même que les triangles JHD et JEA.

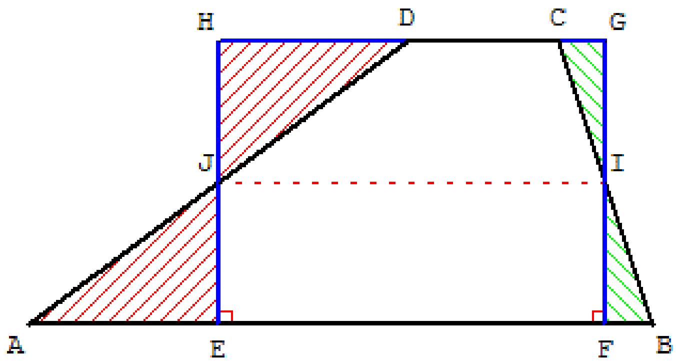


FIGURE 66.9 – Transformation d'un trapèze en rectangle

3.4 Unités

Définition 66.22. *L'unité légale de mesure d'aire est le mètre carré (m²).*

Remarques 66.23.
1. Si les longueurs du polygones sont en cm alors l'aire du polygone s'exprime en cm^2.
2. On peut exprimer aussi l'aire en ares et hectares (ce sont les mesures agraires). On a ainsi :

$$1 \text{ are} = 1 \text{ dam}^2 = 100 \text{ m}^2.$$
$$1 \text{ hectare} = 1 \text{ hm}^2 = 10000 \text{ m}^2.$$

Proposition 66.24 (Conversion d'unités d'aires)**.** *Passer d'une unité supérieure d'aire, c'est multiplier par 100 l'unité d'aire utilisée.*

Pour changer d'unités d'aire, on a alors besoin du tableau de conversions des unités d'aires :

Exemple 66.25.

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
			5	2	0								
							0	0	4	0	3		

Ainsi,

$$520 \text{ ares} = 520 \text{ dam}^2 = 5{,}2 \text{ hm}^2 = 5{,}2 \text{ hectares}.$$
$$0{,}0403 \text{ m}^2 = 4{,}03 \text{ dm}^2 = 403 \text{ cm}^2.$$

3.5 Aire d'un cercle (ou de disque)

Définition 66.26. *Le nombre π est défini comme le rapport entre la circonférence du cercle et son rayon.*

Définition 66.27. *L'aire du disque de rayon R est $\pi \times R^2$.*

4 Intégrale et aire

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, non nécessairement orthonormal.

Définition 66.28 (Aire sous la courbe)**.** *Soit une fonction f, continue et positive sur un intervalle $[a\,, b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.* L'aire sous la courbe *$\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,, b]$ est l'aire du domaine plan $\mathcal{D}$ limité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ cette aire et on lit* l'intégrale *(ou somme) de a à b de f.*

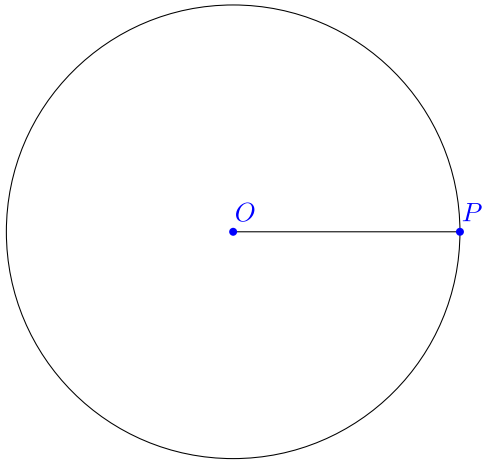


FIGURE 66.10 – L'aire du cercle de rayon 3 cm est 9π cm^2

Remarques 66.29.
1. Le domaine $\mathcal{D}$ peut aussi être considéré comme l'ensemble des points M du plan de coordonées (x, y) telles que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$.
2. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est exprimée en unité d'aire ; une unité d'aire étant l'aire du rectangle construit à partir des vecteurs unités.

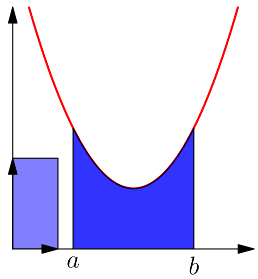


FIGURE 66.11 – Le domaine $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$. L'unité d'aire étant l'aire du rectangle construit à partir des vecteurs unités.

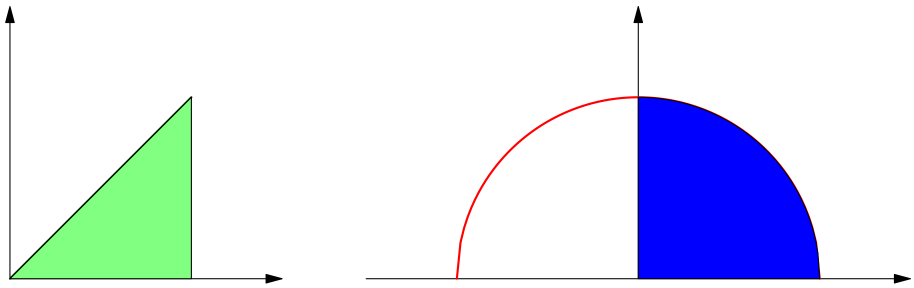
Exemples 66.30.
1. $\int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ car l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f définie par $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0\,,1]$ est l'aire d'un triangle rectangle isocèle dont les deux côtés de l'angle droit ont pour mesure 1.
2. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ car l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ est l'aire d'un quart de cercle de rayon 1.

Propriété 66.31. *Soit une fonction f continue, positive et croissante sur un intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. L'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,,b]$ est égale à la limite commune des deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) définie par :*

$$u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour tout entier n non nul, on divise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$. u_n correspond à l'aire des rectangles sous la courbe. v_n correspond à l'aire des rectangles au-dessus de la courbe. Pour tout n, on a

$$u_n \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq v_n.$$



(a) $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ (b) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

FIGURE 66.12 – Figure pour l'exemple

Lorsque n augment, l'écart entre l'aire des deux séries de rectangles et l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ diminue.

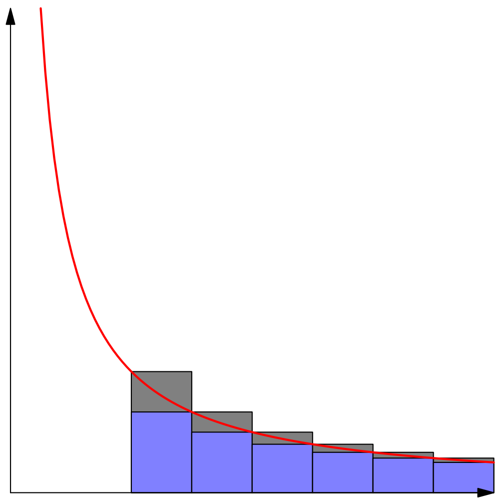


FIGURE 66.13 – Représentation des suites u_n et v_n

Remarques 66.32.
1. La propriété se généralise si f est seulement continue sur l'intervalle $[a, b]$.
2. Si la fonction f est continue, positive et décroissante sur l'intervalle $[a, b]$, on peut construire les deux suites de la même façon, mais c'est alors v_n qui correspond à l'aire des rectangles sous la courbe.

Propriété 66.33 (Relation de Chasles)**.** *Soit une fonction f, continue et positive sur l'intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Pour tout nombre c appartenant à l'intervalle $[a\,,b]$:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On découpe l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,,b]$ en aires sous la courbe sur les intervalles $[a\,,c]$ et $[c\,,b]$.

Exemple 66.34. Soit la fonction f dont la courbe représentative est donnée en figure 66.15. Alors :

$$\int_{-1}^2 f(x) = \mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$$

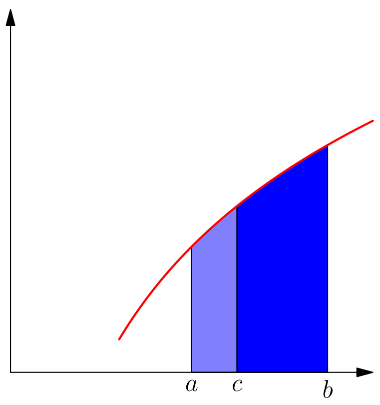


FIGURE 66.14 – Relation de Chasles

(en ajoutant les aires des deux trapèzes).

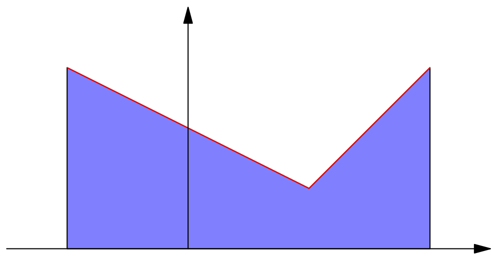


FIGURE 66.15 – Représentation graphique de f pour l'exemple

Définition 66.35 (Valeur moyenne)**.** *Soit une fonction f, continue et positive sur un intervalle $[a\,,b]$. On appelle* valeur moyenne *de la fonction f sur l'intervalle $[a\,,b]$ le nombre réel*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

La valeur moyenne de la fonction f correspond à la valeur qu'il faut donner à une fonction constante g sur l'intervalle $[a\,,b]$ pour que l'aire sous la courbe représentative de g soit égale à l'aire sous la courbe représentative de f. L'aire du domaine hachuré est égale à l'aire du rectangle coloré.

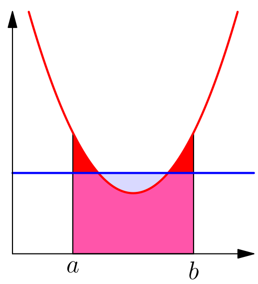


FIGURE 66.16 – Valeur moyenne

Définition 66.36. *Soit une fonction f continue et* négative *sur l'intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Le nombre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égal à* l'opposé *de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.*

Propriété 66.37. *Soit une fonction f, continue et négative sur l'intervalle $[a\,,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à*

$$\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Propriété 66.38. *Soit une fonction f continue et négative sur l'intervalle $[a\,,b]$. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a\,,b]$ est égale à :*

$$-\frac{1}{b-a}\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 66.39. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,,1]$ par $f(x) = -x^2$. Sachant que $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0,1]$ est $-\frac{1}{3}$.

Propriété 66.40. *Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ telles que $f > g$. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par les deux courbes représentatives des fonctions f et g, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est, en unités d'aire,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Compléments

1 Démonstration des propriétés dans la section « Intégrales et aires »

Démonstration de la propriété 66.37. $\mathcal{C}_{-f}$, la courbe représentative de la fonction $-f$, est symétrique par rapport à l'axe des abscisses de $\mathcal{C}_f$, courbe représentative de f. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est égale, par symétrie, à l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_{-f}$. Cette aire est donc $\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$. D'après la définition 66.36, elle est aussi égale à $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. □

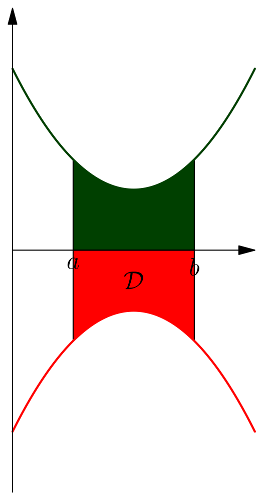


FIGURE 66.17 – Aire d'une fonction négative

Démonstration de la propriété 66.40. On découpe l'intervalle $[a\,,b]$ selon que les fonctions f et g sont toutes deux du même signe ou de signe contraire. Ainsi, dans la figure 66.18, l'aire entre les deux courbes est :

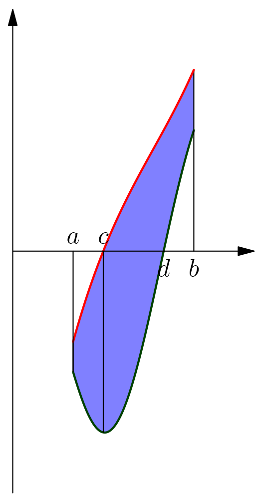


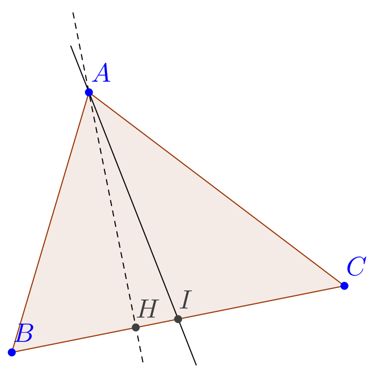
FIGURE 66.18 – Découpage des fonctions f et g selon leurs signes respectifs

- sur l'intervalle $[a\,,c]$:
$$-\int_a^c -f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b -g(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$
- sur l'intervalle $[c\,,d]$:
$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d -g(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$
- sur l'intervalle $[d\,,b]$:
$$\int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_d^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant les propriétés précédentes, on obtient bien
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$
pour la valeur de l'aire du domaine $\mathcal{D}$. □

2 Partage de la médiane

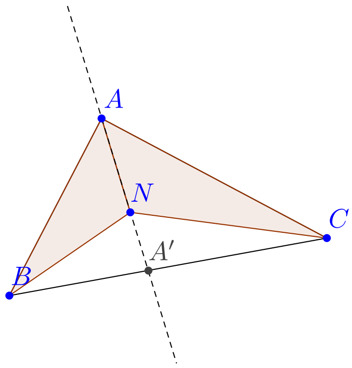
Théorème 66.41. *Soit ABC un triangle et (AI) la médiane issue de A. L'aire du triangle ABI est égale à l'aire du triangle ACI.*



Démonstration. On considère les deux triangles ABI et ACI. On appelle H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC). Comme I est le milieu du segment $[BC]$, on a $BI = CI$. L'aire du triangle ABI est égale à $\frac{BI \times AH}{2}$. L'aire du triangle ACI est égale à $\frac{CI \times AH}{2}$. Comme $BI = CI$, ces deux aires sont égales. [1] □

3 Théorème du chevron

Théorème 66.42. *Soit N un point intérieur au triangle ABC et A' le point d'intersection de la droite (AN) et du segment $[BC]$. Alors le rapport des aires des triangles ANB et de ANC est égal au rapport des distances BA' et CA'.*



Pour démontrer le théorème 66.42, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 66.43. *Si deux triangles ont un sommet commun A et des bases $[BC]$ et $[CC']$ portés par une même droite, alors le rapport de leurs aires est égal au rapport des longueurs de leurs bases.*

Démonstration du lemme 66.43. On doit étudier trois cas :

1. Si l'une des bases est un multiple entier de l'autre, on applique plusieurs fois le partage de la médiane.
2. Si les deux bases sont commensurables (c'est-à-dire sont multiples d'une même grandeur prise comme unité), on applique deux fois le premier cas.
3. Si les deux bases sont incommensurables, on obtient le résultat par passage à la limite (tout irrationnel peut être considéré comme la limite d'une suite de rationnels). Il y a ici un « saut » incontournable (le même celui que l'on fait quand on généralise la formule de l'aire d'un rectangle : aire = base × hauteur).

□

Démonstration du théorème du chevron. On applique le lemme 66.43 aux triangles $AA'B$ et $AA'C$ et ensuite, aux triangles ANB et ANC. □

3 1 Formule de Pick

Théorème 66.44. *Soit un polygone construit sur une grille de points équidistants (c'est-à-dire des points de coordonnées entières) tel que tous ses sommets soient des points de la grille. L'aire A de ce polygone est donnée par :*

$$A = i + \frac{1}{2}b - 1,$$

où i est le nombre de points intérieurs du polygone et b le nombre points du bord du polygone.

---

1. Une autre façon élémentaire de le démontrer est de remarquer que ces deux triangles sont les moitiés de deux parallélogrammes de côté commun (AI) et translatés l'un de l'autre.

Exemple 66.45. Dans la figure 66.19, nous avons $i = 9$ et $b = 14$. Ainsi, l'aire est

$$A = 9 + \frac{14}{2} - 1 = 9 + 7 - 1 = 15.$$

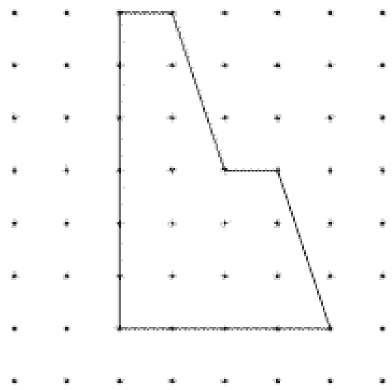


FIGURE 66.19 – Polygone dans un réseau

LEÇON

67 Exemples d'algorithmes

Niveau, prérequis, références

Niveau Lycée

Prérequis Notions d'algorithmique (variables, tests, boucles), loi forte des grands nombres, quelques notions d'arithmétique (PGCD, nombres premiers).

Références [163, 164, 165, 166, 167]

Contenu de la leçon

1 Définition d'un algorithme

Définition 67.1 (Algorithme)**.** *Un algorithme est une suite finie d'opérations et d'instruction permettant de résoudre un problème.*

Dans cette leçon, nous donnons quelques exemples d'algorithmes et nous allons donner la réalisation de ces algorithmes sur le logiciel Algobox qu'on peut télécharger ici :

http://www.xm1math.net/algobox/download.html

Exemple 67.2. L'organigramme suivant est un exemple d'algorithme un peu tordu.

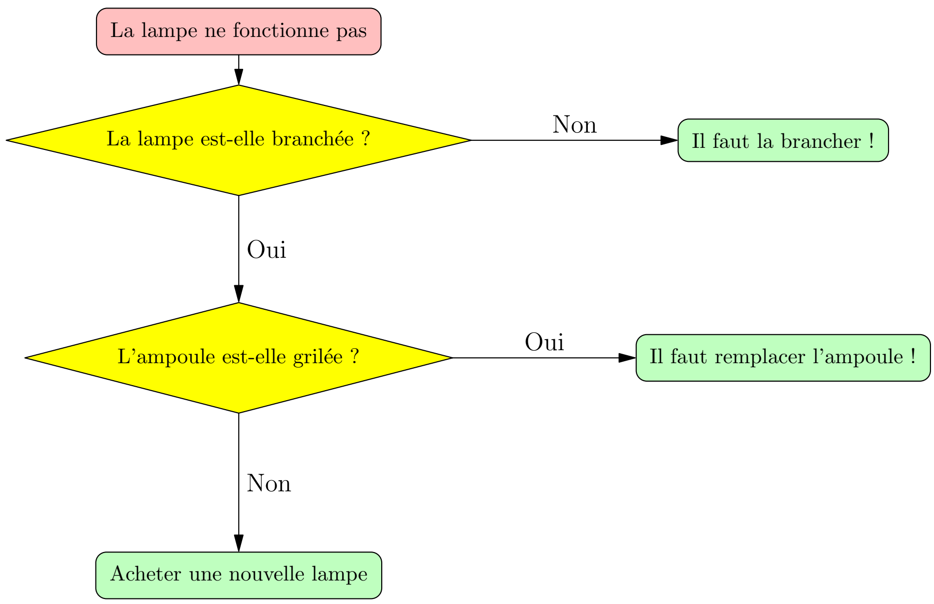


FIGURE 67.1 – Organigramme de la lampe

2 Un algorithme très connu en mathématiques : l'algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide permet de calculer le PGCD de deux nombres entiers. Il s'énonce de la manière suivante (en pseudo-code) :

```
Lire A
Lire B
TANT QUE B <> 0 FAIRE
```

```
   R := mod(A,B)
   A := B
   B := R
FIN TANT QUE
Afficher "PGCD(A,B) = A"
FIN DE L'ALGORITHME
```

Ce qui se traduit dans le logiciel Algobox par l'algorithme suivant :

```
VARIABLES
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  B EST_DU_TYPE NOMBRE
  R EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE A
  LIRE B
  AFFICHER "PGCD de "
  AFFICHER A
  AFFICHER " et "
  AFFICHER B
  TANT_QUE (B!=0) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    R PREND_LA_VALEUR A%B
    A PREND_LA_VALEUR B
    B PREND_LA_VALEUR R
    AFFICHER "= PGCD de "
    AFFICHER A
    AFFICHER " et "
    AFFICHER B
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "= "
  AFFICHER A
FIN_ALGORITHME
```

On donne un exemple d'exécution avec $A = 59$ et $B = 34$.

```
Resultats :
***Algorithme lance***
PGCD de 59 et 34
= PGCD de 34 et 25
= PGCD de 25 et 9
= PGCD de 9 et 7
= PGCD de 7 et 2
= PGCD de 2 et 1
= PGCD de 1 et 0
= 1
***Algorithme termine***
```

3 D'autres algorithmes

3 1 Arithmétique : Test de primalité

Avant de donner l'algorithme de primalité, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 67.3. *Un nombre $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ est premier si et seulement si, il n'admet pas de diviseur différent de ± 1 et tel que $d^2 \leq n$.*

Ce lemme permet de déterminer un critère d'arrêt dans un programme qui recherche si un entier naturel n donné à l'avance est premier ou pas.

On donne un programme codé pour les calculatrices TI-82 et qui permet de déterminer si un nombre est premier ou non :

```
Nbprem(n)
Prgm
Local i,r
   2 -> i
   1 -> r
If n=0 or n=1 Then
Disp "nonpremier"
Else
While i^2<=n and r<>0
mod(n,i) -> r
i+1 -> i
EndWhile
If r<>0 Then
Disp "premier"
Else
Disp "nonpremier"
EndIf
EndIf
EndPrgm
```

Le même algorithme sur Algobox :

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  r EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  i PREND_LA_VALEUR 2
  r PREND_LA_VALEUR 1
  SI (n==0 OU n==1) ALORS
  DEBUT_SI
    AFFICHER "Non premier"
  FIN_SI
  SINON
  DEBUT_SINON
    TANT_QUE (i*i <= n ET r != 0) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
      r PREND_LA_VALEUR n%i
      i PREND_LA_VALEUR i+1
    FIN_TANT_QUE
    SI (r!=0) ALORS
    DEBUT_SI
      AFFICHER "premier"
    FIN_SI
    SINON
    DEBUT_SINON
```

```
      AFFICHER "Non premier"
    FIN_SINON
  FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

On donne un exemple d'exécution avec $n = 80$ sur TI-82 et Algobox.

```
Nbprem(80)
2 -> i
1 -> r
n<>0 et n<>1
On a : 4<80 et r<>0 donc
mod(80,2) = 0 -> r
3 -> i
On a : 9<80 et r=0 donc
on ne fait pas la boucle
et r = 0 donc "non premier"
```

```
#1 Nombres/chaines (ligne 6) -> n:80 | i:0 | r:0
#2 Nombres/chaines (ligne 7) -> n:80 | i:2 | r:0
#3 Nombres/chaines (ligne 8) -> n:80 | i:2 | r:1
La condition n'est pas verifiee (ligne 9)
Entree dans le bloc DEBUT_SINON/FIN_SINON (ligne 14)
Entree dans le bloc DEBUT_TANT_QUE/FIN_TANT_QUE : condition
   verifiee (ligne 16)
#4 Nombres/chaines (ligne 17) -> n:80 | i:2 | r:0
#5 Nombres/chaines (ligne 18) -> n:80 | i:3 | r:0
Sortie du bloc DEBUT_TANT_QUE/FIN_TANT_QUE (ligne 19)
La condition n'est pas verifiee (ligne 20)
Entree dans le bloc DEBUT_SINON/FIN_SINON (ligne 25)
Sortie du bloc DEBUT_SINON/FIN_SINON (ligne 27)
Sortie du bloc DEBUT_SINON/FIN_SINON (ligne 28)
RESULTATS :
***Algorithme lance en mode pas a pas***
Non premier
***Algorithme termine***
```

3 2 Un jeu : Algorithme du lièvre et la tortue

Le jeu du lièvre et la tortue est le suivant :

- A chaque tour, on lance un dé.
- Si le 6 sort, le lièvre gagne la partie, sinon la torture avance d'une case
- La tortue gagne quand elle a avancé 6 fois.

Sous Algobox, on peut programmer le jeu de la manière suivante :

```
    VARIABLES
      face_du_de EST_DU_TYPE NOMBRE
      case_tortue EST_DU_TYPE NOMBRE
    DEBUT_ALGORITHME
      case_tortue PREND_LA_VALEUR 0
      face_du_de PREND_LA_VALEUR 0
      TANT_QUE (face_du_de<6 ET case_tortue<6) FAIRE
        DEBUT_TANT_QUE
```

```
        //Le jeu continue : on lance le de
        face_du_de PREND_LA_VALEUR floor(6*random()+1)
        AFFICHER "Le de donne un "
        AFFICHER face_du_de
        SI (face_du_de<6) ALORS
          DEBUT_SI
          //La tortue avance d'une case
          case_tortue PREND_LA_VALEUR case_tortue+1
          AFFICHER " -> la tortue passe a la case "
          AFFICHER case_tortue
          FIN_SI
        FIN_TANT_QUE
      SI (case_tortue==6) ALORS
        DEBUT_SI
        AFFICHER "La tortue gagne"
        FIN_SI
        SINON
          DEBUT_SINON
          AFFICHER " -> le lievre gagne"
          FIN_SINON
    FIN_ALGORITHME
```

Voici un exemple d'exécution :

```
***Algorithme lance***

Le de donne un 4 -> la tortue passe a la case 1

Le de donne un 2 -> la tortue passe a la case 2

Le de donne un 4 -> la tortue passe a la case 3

Le de donne un 6 -> le lievre gagne

***Algorithme termine***
```

Un peu de mathématique tout de même ! Quelle est la probabilité pour que la tortue gagne ? Notons T l'événement :

$$T_G = \{\text{la tortue gagne la partie}\}.$$

Pour que la tortue avance d'une case, il faut que le dé ne tombe pas sur 6 donc sur 1, 2, 3, 4 et 5. Donc, si on note

$$T_C = \{\text{la tortue avance d'une case}\}$$

, la probabilité que l'événement T_C ait lieu est de :

$$P(T_C) = \frac{5}{6}.$$

Ainsi,

$$P(T_G) = (P(T_C))^6 = \frac{5^6}{6^6} \approx 0,335.$$

On peut vérifier le résultat en lançant un grand nombre de fois l'algorithme et en calculant la proportion de jeux gagnants pour la tortue. La loi forte des grands nombres nous dira que plus le nombre de jeux est grand, plus cette proportion tend vers la probabilité $P(T_G)$.

```
VARIABLES
     face_du_de EST_DU_TYPE NOMBRE
     case_tortue EST_DU_TYPE NOMBRE
     nb_tortues_gagnantes EST_DU_TYPE NOMBRE
     i EST_DU_TYPE NOMBRE
     j EST_DU_TYPE NOMBRE
     proportion_tortues_gagnantes EST_DU_TYPE NOMBRE
     n EST_DU_TYPE NOMBRE
   DEBUT_ALGORITHME
     POUR i ALLANT_DE 1 A 100
       DEBUT_POUR
       nb_tortues_gagnantes PREND_LA_VALEUR 0
       n PREND_LA_VALEUR i*10
       POUR j ALLANT_DE 1 A n
         DEBUT_POUR
         case_tortue PREND_LA_VALEUR 0
         face_du_de PREND_LA_VALEUR 0
         TANT_QUE (face_du_de<6 ET case_tortue<6) FAIRE
           DEBUT_TANT_QUE
           face_du_de PREND_LA_VALEUR floor(6*random()+1)
           SI (face_du_de<6) ALORS
             DEBUT_SI
             case_tortue PREND_LA_VALEUR case_tortue+1
             FIN_SI
           FIN_TANT_QUE
         SI (case_tortue==6) ALORS
           DEBUT_SI
           nb_tortues_gagnantes PREND_LA_VALEUR
              nb_tortues_gagnantes+1
           FIN_SI
         FIN_POUR
       proportion_tortues_gagnantes PREND_LA_VALEUR 100*
          nb_tortues_gagnantes/n
       TRACER_POINT (n,proportion_tortues_gagnantes)
       AFFICHER n
       AFFICHER " jeux : "
       AFFICHER "la tortue gagne dans "
       AFFICHER proportion_tortues_gagnantes
       AFFICHER "% des cas"
       FIN_POUR
   FIN_ALGORITHME
```

Exécution :

```
Resultats :
***Algorithme lance***
10 jeux : la tortue gagne dans 40% des cas
20 jeux : la tortue gagne dans 30% des cas
30 jeux : la tortue gagne dans 40% des cas
40 jeux : la tortue gagne dans 42.5% des cas
50 jeux : la tortue gagne dans 34% des cas
60 jeux : la tortue gagne dans 26.666667% des cas
70 jeux : la tortue gagne dans 32.857143% des cas
```

```
80 jeux : la tortue gagne dans 33.75% des cas
90 jeux : la tortue gagne dans 34.444444% des cas
100 jeux : la tortue gagne dans 38% des cas
110 jeux : la tortue gagne dans 36.363636% des cas
120 jeux : la tortue gagne dans 30% des cas
130 jeux : la tortue gagne dans 27.692308% des cas
140 jeux : la tortue gagne dans 29.285714% des cas
150 jeux : la tortue gagne dans 33.333333% des cas
160 jeux : la tortue gagne dans 27.5% des cas
170 jeux : la tortue gagne dans 32.941176% des cas
180 jeux : la tortue gagne dans 30.555556% des cas
190 jeux : la tortue gagne dans 33.684211% des cas
200 jeux : la tortue gagne dans 32% des cas
210 jeux : la tortue gagne dans 36.190476% des cas
220 jeux : la tortue gagne dans 33.181818% des cas
230 jeux : la tortue gagne dans 34.782609% des cas
240 jeux : la tortue gagne dans 31.666667% des cas
250 jeux : la tortue gagne dans 31.6% des cas
260 jeux : la tortue gagne dans 36.153846% des cas
270 jeux : la tortue gagne dans 33.333333% des cas
280 jeux : la tortue gagne dans 30.714286% des cas
290 jeux : la tortue gagne dans 33.793103% des cas
300 jeux : la tortue gagne dans 32% des cas
310 jeux : la tortue gagne dans 35.806452% des cas
320 jeux : la tortue gagne dans 33.4375% des cas
330 jeux : la tortue gagne dans 28.787879% des cas
340 jeux : la tortue gagne dans 31.764706% des cas
350 jeux : la tortue gagne dans 35.714286% des cas
360 jeux : la tortue gagne dans 35.555556% des cas
370 jeux : la tortue gagne dans 35.675676% des cas
380 jeux : la tortue gagne dans 35% des cas
390 jeux : la tortue gagne dans 30.512821% des cas
400 jeux : la tortue gagne dans 33% des cas
410 jeux : la tortue gagne dans 29.268293% des cas
420 jeux : la tortue gagne dans 32.619048% des cas
430 jeux : la tortue gagne dans 33.255814% des cas
440 jeux : la tortue gagne dans 34.318182% des cas
450 jeux : la tortue gagne dans 34.222222% des cas
460 jeux : la tortue gagne dans 31.521739% des cas
470 jeux : la tortue gagne dans 30% des cas
480 jeux : la tortue gagne dans 33.75% des cas
490 jeux : la tortue gagne dans 33.469388% des cas
500 jeux : la tortue gagne dans 33.8% des cas
510 jeux : la tortue gagne dans 36.078431% des cas
520 jeux : la tortue gagne dans 33.653846% des cas
530 jeux : la tortue gagne dans 34.339623% des cas
540 jeux : la tortue gagne dans 35.37037% des cas
550 jeux : la tortue gagne dans 36% des cas
560 jeux : la tortue gagne dans 30.892857% des cas
570 jeux : la tortue gagne dans 35.087719% des cas
580 jeux : la tortue gagne dans 33.965517% des cas
590 jeux : la tortue gagne dans 29.152542% des cas
600 jeux : la tortue gagne dans 35.5% des cas
610 jeux : la tortue gagne dans 36.557377% des cas
```

```
620 jeux : la tortue gagne dans 36.290323% des cas
630 jeux : la tortue gagne dans 34.444444% des cas
640 jeux : la tortue gagne dans 32.34375% des cas
650 jeux : la tortue gagne dans 31.230769% des cas
660 jeux : la tortue gagne dans 35.30303% des cas
670 jeux : la tortue gagne dans 35.671642% des cas
680 jeux : la tortue gagne dans 33.235294% des cas
690 jeux : la tortue gagne dans 34.202899% des cas
700 jeux : la tortue gagne dans 33.142857% des cas
710 jeux : la tortue gagne dans 32.816901% des cas
720 jeux : la tortue gagne dans 32.638889% des cas
730 jeux : la tortue gagne dans 34.383562% des cas
740 jeux : la tortue gagne dans 30.945946% des cas
750 jeux : la tortue gagne dans 31.466667% des cas
760 jeux : la tortue gagne dans 32.763158% des cas
770 jeux : la tortue gagne dans 35.324675% des cas
780 jeux : la tortue gagne dans 30.897436% des cas
790 jeux : la tortue gagne dans 34.43038% des cas
800 jeux : la tortue gagne dans 31% des cas
810 jeux : la tortue gagne dans 32.962963% des cas
820 jeux : la tortue gagne dans 35.243902% des cas
830 jeux : la tortue gagne dans 36.144578% des cas
840 jeux : la tortue gagne dans 32.619048% des cas
850 jeux : la tortue gagne dans 34% des cas
860 jeux : la tortue gagne dans 32.674419% des cas
870 jeux : la tortue gagne dans 35.862069% des cas
880 jeux : la tortue gagne dans 32.954545% des cas
890 jeux : la tortue gagne dans 33.707865% des cas
900 jeux : la tortue gagne dans 36.888889% des cas
910 jeux : la tortue gagne dans 33.736264% des cas
920 jeux : la tortue gagne dans 32.282609% des cas
930 jeux : la tortue gagne dans 32.688172% des cas
940 jeux : la tortue gagne dans 32.659574% des cas
950 jeux : la tortue gagne dans 30.947368% des cas
960 jeux : la tortue gagne dans 30.833333% des cas
970 jeux : la tortue gagne dans 33.402062% des cas
980 jeux : la tortue gagne dans 36.734694% des cas
990 jeux : la tortue gagne dans 31.818182% des cas
1000 jeux : la tortue gagne dans 34.5% des cas
***Algorithme termine***
```

On obtient ainsi un graphique de fluctuation (voir figure 67.2).

3 3 Probabilités : Simulation de la somme des points obtenus lors de plusieurs lancers de 3 dés

Le principe de la simulation du lancer de 3 dés est le suivant :

- La fonction `random()` permet d'obtenir un nombre décimal pseudo-aléatoire comprise entre 0 et 1.
- Pour simuler le lancer d'un dé, on utilise : `floor(6*random()+1)` (la fonction `floor()` donne la partie entière).
- Pour simuler le lancer de 3 dés et calculer la somme des points obtenus, il faut utiliser

```
floor(6*random()+1)+floor(6*random()+1)+floor(6*random()+1)
```

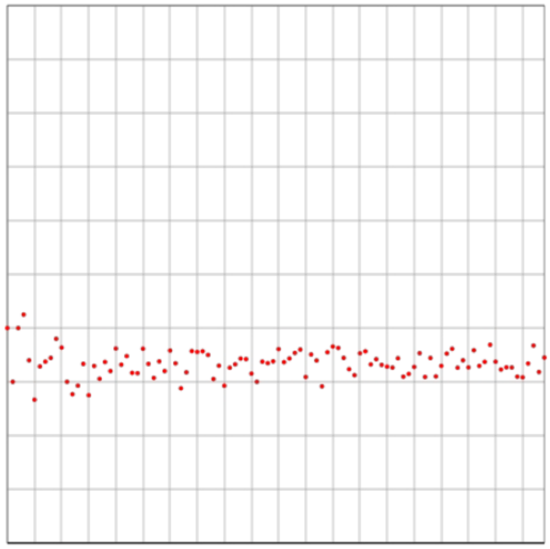


FIGURE 67.2 – Graphique de fluctuation

Remarque : il ne faut pas utiliser `3*(floor(6*random()+1))` car cela reviendrait à supposer que les 3 dés donnent le même nombre de points.

Pour stocker le nombre de fois où apparaît une certaine somme de points, on utilise une liste appelée `issue` dans l'algorithme. Par exemple, `issue[5]` représente le nombre de fois où l'on a obtenu 5 points en simulant les lancers des 3 dés. A chaque fois qu'on obtient une somme de 5 points, on augmente de 1 la valeur de `issue[5]`. Remarque : lors du lancer de 3 dés, la somme des points obtenue est forcément comprise entre 3 à 18.

L'algorithme ci-dessous simule 100000 lancers de 3 dés, calcule les fréquences observées pour la somme des points obtenus et trace le diagramme en bâtons de ces fréquences.

```
VARIABLES
  issue EST_DU_TYPE LISTE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  somme EST_DU_TYPE NOMBRE
  propor EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  POUR i ALLANT_DE 3 A 18
    DEBUT_POUR
    issue[i] PREND_LA_VALEUR 0
    FIN_POUR
  POUR i ALLANT_DE 1 A 100000
    DEBUT_POUR
    somme PREND_LA_VALEUR floor(6*random()+1)+floor(6*random()+1)+
       floor(6*random()+1)
    issue[somme] PREND_LA_VALEUR issue[somme]+1
    FIN_POUR
  POUR i ALLANT_DE 3 A 18
    DEBUT_POUR
    propor PREND_LA_VALEUR issue[i]/1000
    AFFICHER i
    AFFICHER " points -> "
    AFFICHER propor
```

```
    AFFICHER " % des cas observes"
    TRACER_SEGMENT (i,0)->(i,propor)
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Un exemple d'exécution :

```
Resultats :
***Algorithme lance***
3 points -> 0.47 % des cas observes
4 points -> 1.369 % des cas observes
5 points -> 2.789 % des cas observes
6 points -> 4.637 % des cas observes
7 points -> 6.918 % des cas observes
8 points -> 9.806 % des cas observes
9 points -> 11.583 % des cas observes
10 points -> 12.405 % des cas observes
11 points -> 12.458 % des cas observes
12 points -> 11.766 % des cas observes
13 points -> 9.687 % des cas observes
14 points -> 6.955 % des cas observes
15 points -> 4.578 % des cas observes
16 points -> 2.708 % des cas observes
17 points -> 1.397 % des cas observes
18 points -> 0.474 % des cas observes
***Algorithme termine***
```

Le diagramme en bâtons de ces fréquences est représenté en figure 67.3.

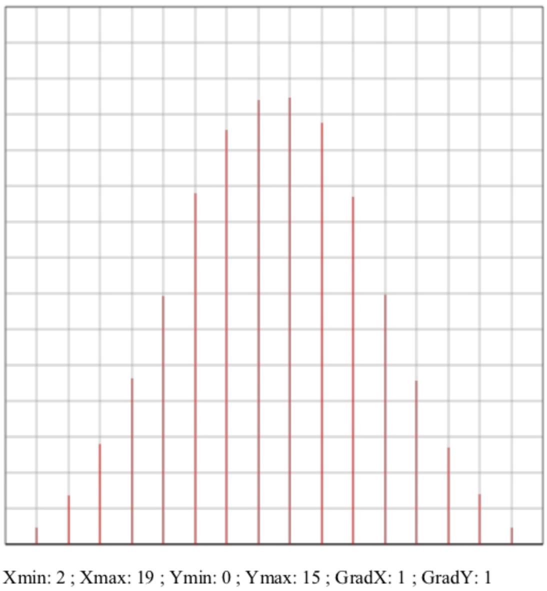


FIGURE 67.3 – Diagrammes en bâtons des sommes de 3 dés pour 10000 lancers

3 4 Conjecture : La suite de Syracuse

Soit a un nombre entier. La suite de Syracuse associé à l'entier a est définie par :

$$u_0 = a, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}, \forall n \geq 0.$$

La conjecture de Syracuse (qui n'a pas encore été démontré à ce jour) prévoir que, quelle que soit la valeur de a, la suite soit périodique de période 3 (qu'on appelle séquence $4, 2, 1$) à partir d'un certain rang.

L'algorithme (sur Algobox) calcule les termes de la suite jusqu'à u_{100}.

```
VARIABLES
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  u PREND_LA_VALEUR a
  AFFICHER "0 -> "
  AFFICHER u
  POUR i ALLANT_DE 1 A 100
    DEBUT_POUR
    SI (u%2==0) ALORS
      DEBUT_SI
      u PREND_LA_VALEUR u/2
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        u PREND_LA_VALEUR 3*u+1
        FIN_SINON
    AFFICHER i
    AFFICHER " -> "
    AFFICHER u
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

On donne un exemple d'exécution avec $a = 250$:

```
Resultats :
***Algorithme lance***
0 -> 250
1 -> 125
2 -> 376
3 -> 188
4 -> 94
5 -> 47
6 -> 142
7 -> 71
8 -> 214
9 -> 107
10 -> 322
11 -> 161
12 -> 484
13 -> 242
```

```
14 -> 121
15 -> 364
16 -> 182
17 -> 91
18 -> 274
19 -> 137
20 -> 412
21 -> 206
22 -> 103
23 -> 310
24 -> 155
25 -> 466
26 -> 233
27 -> 700
28 -> 350
29 -> 175
30 -> 526
31 -> 263
32 -> 790
33 -> 395
34 -> 1186
35 -> 593
36 -> 1780
37 -> 890
38 -> 445
39 -> 1336
40 -> 668
41 -> 334
42 -> 167
43 -> 502
44 -> 251
45 -> 754
46 -> 377
47 -> 1132
48 -> 566
49 -> 283
50 -> 850
51 -> 425
52 -> 1276
53 -> 638
54 -> 319
55 -> 958
56 -> 479
57 -> 1438
58 -> 719
59 -> 2158
60 -> 1079
61 -> 3238
62 -> 1619
63 -> 4858
64 -> 2429
65 -> 7288
66 -> 3644
67 -> 1822
```

```
68 -> 911
69 -> 2734
70 -> 1367
71 -> 4102
72 -> 2051
73 -> 6154
74 -> 3077
75 -> 9232
76 -> 4616
77 -> 2308
78 -> 1154
79 -> 577
80 -> 1732
81 -> 866
82 -> 433
83 -> 1300
84 -> 650
85 -> 325
86 -> 976
87 -> 488
88 -> 244
89 -> 122
90 -> 61
91 -> 184
92 -> 92
93 -> 46
94 -> 23
95 -> 70
96 -> 35
97 -> 106
98 -> 53
99 -> 160
100 -> 80
***Algorithme termine***
```

3 5 Fractales : Courbe de Von Koch

On peut la créer à partir d'un segment de droite, en modifiant récursivement chaque segment de droite de la façon suivante :

1. on divise le segment de droite en trois segments de longueurs égales,
2. on construit un triangle équilatéral ayant pour base le segment médian de la première étape,
3. on supprime le segment de droite qui était la base du triangle de la deuxième étape.

Au bout de ces trois étapes, l'objet résultant a une forme similaire à une section transversale d'un chapeau de sorcière.

Sur Algobox, l'algorithme suivant trace la k^{e} itération de la courbe de Von Koch (pour $1 \leq k \leq 8$).

```
    VARIABLES
      n EST_DU_TYPE NOMBRE
      i EST_DU_TYPE NOMBRE
      j EST_DU_TYPE NOMBRE
      k EST_DU_TYPE NOMBRE
```

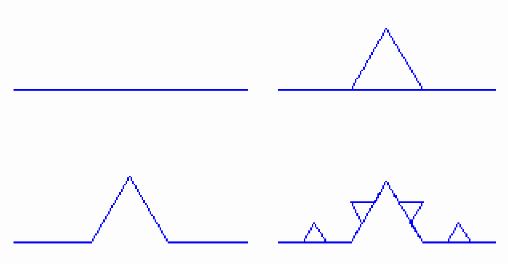


FIGURE 67.4 – Les quatre premières itérations de la courbe de Von Koch

```
    a EST_DU_TYPE NOMBRE
    x EST_DU_TYPE LISTE
    y EST_DU_TYPE LISTE
    max EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Nombre d'iterations="
  LIRE n
  AFFICHER n
  SI (n>=1 ET n<=8) ALORS
    DEBUT_SI
    max PREND_LA_VALEUR pow(4,n)
    POUR i ALLANT_DE 0 A max
      DEBUT_POUR
      x[i] PREND_LA_VALEUR 0
      y[i] PREND_LA_VALEUR 0
      FIN_POUR
    x[max] PREND_LA_VALEUR 450
    POUR i ALLANT_DE 1 A n
      DEBUT_POUR
      k PREND_LA_VALEUR pow(4,n-i)
      POUR j ALLANT_DE 0 A pow(4,i-1)-1
        DEBUT_POUR
        a PREND_LA_VALEUR 4*j*k
        x[a+k] PREND_LA_VALEUR (2*x[a]+x[a+4*k])/3
        y[a+k] PREND_LA_VALEUR (2*y[a]+y[a+4*k])/3
        x[a+3*k] PREND_LA_VALEUR (x[a]+2*x[a+4*k])/3
        y[a+3*k] PREND_LA_VALEUR (y[a]+2*y[a+4*k])/3
        x[a+2*k] PREND_LA_VALEUR (x[a+k]+x[a+3*k]+sqrt(3)*(y[a+
           k]-y[a+3*k]))/2
        y[a+2*k] PREND_LA_VALEUR (y[a+k]+y[a+3*k]+sqrt(3)*(x[a
           +3*k]-x[a+k]))/2
        FIN_POUR
      FIN_POUR
    POUR i ALLANT_DE 0 A max-1
      DEBUT_POUR
      TRACER_SEGMENT (x[i],y[i])->(x[i+1],y[i+1])
      FIN_POUR
    FIN_SI
FIN_ALGORITHME
```

La figure 67.5 présente la cinquième itération de la courbe de Von Koch construit par Algobox.

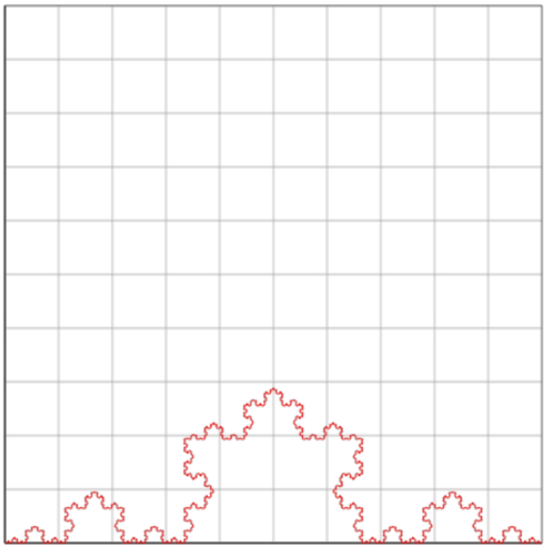


FIGURE 67.5 – Cinquième itération de la courbe de Von Koch

3 6 Cryptographie : Coder un texte dans le Code César

Le code de César est la méthode de cryptographie la plus ancienne communément admise par l'histoire. Il consiste en une substitution mono-alphabétique, où la substitution est définie par un décalage de lettres. Par exemple, si on remplace A par D, on remplace B par E, C par F, D par G, etc... Donnons un exemple à partir de ce décalage de 3 lettres :

Texte clair	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Texte codé	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

On donne un algorithme sous Algobox qui permet de coder un texte en code César :

```
VARIABLES
    textenormal EST_DU_TYPE CHAINE
    textecode EST_DU_TYPE CHAINE
    cle EST_DU_TYPE NOMBRE
    longueur EST_DU_TYPE NOMBRE
    compteur EST_DU_TYPE NOMBRE
    position EST_DU_TYPE NOMBRE
    codeascii EST_DU_TYPE NOMBRE
  DEBUT_ALGORITHME
   AFFICHER "Saisir le texte en majuscule"
   LIRE textenormal
   AFFICHER textnormal
   LIRE cle
   longueur PREND_LA_VALEUR textenormal.length
   AFFICHER longueur
   POUR compteur ALLANT_DE 0 A longueur-1
     DEBUT_POUR
     codeascii PREND_LA_VALEUR textenormal.charCodeAt(compteur)
```

```
        SI ((codeascii+cle)<=90) ALORS
          DEBUT_SI
          textecode PREND_LA_VALEUR textecode+String.fromCharCode(
              codeascii+cle)
          FIN_SI
          SINON
            DEBUT_SINON
            textecode PREND_LA_VALEUR textecode+String.fromCharCode
                (codeascii+cle-26)
            FIN_SINON
        FIN_POUR
      AFFICHER "Le texte traduit est :"
      AFFICHER textecode
    FIN_ALGORITHME
```

Par exemple, on code le texte ”*LECONTERMINE*” en code César avec un décalage de 3 lettres :

```
Resultats :
***Algorithme lance***
Saisir le texte en majuscule
LECONTERMINE
12
Le texte traduit est :
OHFRQWHUPLQH
***Algorithme termine***
```

LEÇON

68 Exemples d'utilisation d'un tableur

Niveau, prérequis, références

Niveau Tous niveaux

Prérequis Aucun

Références [168, 169, 170]

Contenu de la leçon

1 Le tableur pour les collégiens

1.1 Une enquête auprès des 5ᵉ

Un professeur de mathématiques fait une enquête dans son collège qui comporte 520 élèves. Il interroge les cinquièmes qui sont en nombre de 180.

1. Quel est la population étudiée ? *La population est les élèves de 5ᵉ.*
2. Quel est l'effectif total ? *L'effectif total est de 180.*

Voici maintenant les résultats de l'enquête :

Matières	*Effectif*
Français	4
Histoire-Géo	12
Anglais	3
Mathématiques	25
Sciences Phy	25
SVT	11
Arts Plastiques	20
Musique	30
Sports	50
Total	180

1. Regrouper les données sur un tableur. *Pour répondre à cette question, il faut se servir du tableur. On met dans une colonne les matières et dans une autre les sous-effectifs.*

```
A1 : Matieres
B1 : Effectif
A2 : Francais
B2 : 4
A3 : Histoire Geo
B3 : 12
A4 : Anglais
B4 : 3
A5 : Mathematiques
B5 : 25
A6 : Sciences Phy
B6 : 25
A7 : SVT
B7 : 11
A8 : Arts Plastiques
B8 : 20
A9 : Musique
B9 : 30
```

```
A10 : Sports
B10 : 50
A11 : Total
B11 : SOMME(B2:B10)
```

Matières	*Effectifs*
Français	4
Histoire-Géo	12
Anglais	3
Mathématiques	25
Sciences Phy	25
SVT	11
Arts Plastiques	20
Musique	30
Sports	50
TOTAL	180

FIGURE 68.1 – Tableau des résultats sur OpenOffice.org Calc

2. Combien d'élèves aiment le français ? *4*.
3. Quel est la matière préféré des cinquièmes ? *Les Sports*.
4. Combien d'élèves aiment les matières scientifiques (Mathématiques, Sciences Physiques, SVT) ? $25 + 25 + 11 = 61$.
5. Faire un histogramme des données. *Pour cela, il faut sélectionner le tableau avec les effectifs mais sans le total. Ensuite, on va dans les menus* `Insertion > Diagramme` *et on sélectionne* `Colonne`. *Normalement, le logiciel nous livre l'histogramme.*

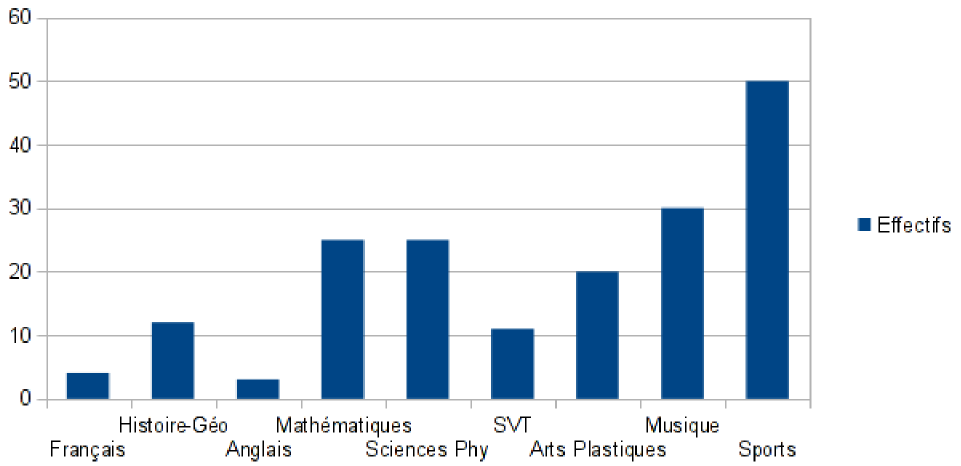


FIGURE 68.2 – Histogramme des données

1 2 Algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide permet de calculer le PGCD de deux nombres.

Théorème 68.1 (Théorème d'Euclide)**.** *Soient a et b deux entiers naturels non nuls. La suite des divisions euclidiennes :*

- *de a par b : $a = bq_0 + r_0$,*
- *de b par r_0 (si $r_0 \neq 0$) : $b = r_0 q_1 + r_1$*
- *de r_0 par r_1 (si $r_1 \neq 0$) : $r_0 = r_1 q_2 + r_2$*
- $\dots$
- *de r_{n-1} par r_n (si $r_n \neq 0$) : $r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1}$.*

Fini par s'arrêter, un des restes r_i étant nul. Le dernier reste non nul est alors le $\mathrm{PGCD}(a, b)$ (si $r_0 = 0$ alors $\mathrm{PGCD}(a, b) = b$).

On peut calculer le PGCD de deux nombres grâce à un tableur. Par exemple, on veut calculer le PGCD de 250 et 110. Pour cela, on suit les instructions suivantes :

```
A1 : 250
B1 : 110
C1 : MOD(250;110)
A2 : =B1
B2 : =C1
```

On fait glisser (déplacer le petit carré en bas à droite de la cellule) la case C1 sur les cases C2—C5, puis on fait glisser la case A2 sur les cases A3—A5 et la case B2 sur les cases B3—B5. On supprime les cases marquées `#VALEUR !` en C5 et les cases B5 et A5.

250	110	30
110	30	20
30	20	10
20	10	0

FIGURE 68.3 – Algorithme d'Euclide sur OpenOffice.org Calc

Ainsi, on obtient que $\mathrm{PGCD}(250, 110) = 10$ (lire la dernière case non nulle de la colonne C).

1 3 Les lapins de Fibonacci

On considère, quand $t = 0$, un couple A de jeunes lapins. Le mois suivant ($t = 1$), les deux lapins sont adultes, le couple est appelé B. A $t = 2$, deux jeunes lapins naissent et on a deux couples B et A. Pour chaque mois suivant, chaque couple A devient B et chaque B devient BA. Les couples sont, successivement, A, B, BA, BAB, $BABBA$, $BABBABAB$ etc. Les nombres de couples de lapins sont

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots.$$

Définition 68.2 (Nombres de Fibonacci)**.** *Ces nombres sont appelés les* nombres de Fibonacci

On construit ainsi la suite F telle que $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ et pour tout entier naturel n, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Définition 68.3 (Suite de Fibonacci)**.** *La suite (F_n) définie par :*

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

est appelé suite de Fibonacci*. Les termes de la suite sont les* nombres de Fibonacci.

On peut représenter ce problème sur un tableur.

```
A1 : 0
B1 : 1
C1 : =A1+B1
A2 : =B1
B2 : =C1
```

On fait ensuite glisser la cellule C1 sur la cellule C2 puis on fait glisser les cellules A2-B2-C2 (ensemble !) jusqu'aux cellules AX-BX-CX où X est un nombre entier que l'on veut. La colonne C nous donne les premiers nombres de Fibonacci.

0	1	**1**
1	1	**2**
1	2	**3**
2	3	**5**
3	5	**8**
5	8	**13**
8	13	**21**
13	21	**34**
21	34	**55**
34	55	**89**
55	89	**144**
89	144	**233**
144	233	**377**
233	377	**610**
377	610	**987**

FIGURE 68.4 – Nombres de Fibonacci dans un tableur OpenOffice.org Calc

2 Le tableur pour les lycéens

2 1 Suite de Syracuse

Soit a un nombre entier. La suite de Syracuse associé à l'entier a est définie par :

$$u_0 = a, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}, \forall n \geq 0.$$

La conjecture de Syracuse (qui n'a pas encore été démontré à ce jour) prévoit que, quelle que soit la valeur de a, la suite soit périodique de période 3 (qu'on appelle séquence $4, 2, 1$) à partir d'un certain rang.

Grâce à un tableur, on peut donner les premiers termes de la suite de Syracuse associé à $a = 250$.

```
A1 : 250
A2 : =SI(MOD(A1;2)=0;A1/2;3*A1+1)
```

Puis on fait glisser la cellule A2 vers la cellule AX où X est un nombre entier que l'on veut (voir la figure 68.5).

On veut maintenant la courbe représentative de la suite, c'est-à-dire en abscisse, le numéro du terme et en ordonnées, la valeur du terme. On utilise toujours le tableur. On fait glisser la colonne des termes de la suite jusqu'à ce qu'on obtienne 1. On sélectionne ensuite la colonne entière des termes et on clique sur `Insertion > Diagramme`. On construit un diagramme `Ligne`. Le logiciel propose un graphique avec ou sans relier les points. On choisit le graphique où on a relié les points (voir la figure 68.6).

Ce n'est pas terminé ! On nous demande maintenant quel est le maximum de la suite de Syracuse associée à $a = 250$ et de le placer dans la cellule D2 (voir la figure 68.7).

250
125
376
188
94
47
142
71
214
107
322
161
484
242
121
364
182
91
274
137
412
206
103
310
155
466
233
700
350
175
526

FIGURE 68.5 – Les premiers termes de la suite de Syracuse associé à $a = 250$ calculés par le tableur OpenOffice.org Calc

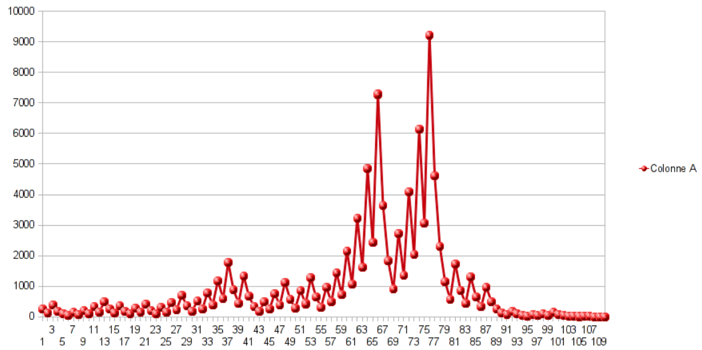


FIGURE 68.6 – Courbe représentative de la suite de Syracuse associée à $a = 250$

```
C2 : Maximum :
D2 : =MAX(A1:A110)
```

Maximum : 9232

FIGURE 68.7 – Maximum de la suite de Syracuse associée à $a = 250$ calculée par le tableur OpenOffice.org Calc

2 2 Tableau de valeurs et courbe de fonction

On veut donner le tableau de valeurs de la fonction $f : x \mapsto x^2$. On va, pour cela, utiliser un tableur. Sur la première ligne, on met les valeurs de 0.5 à 0.5 en partant de -5 à 5.

```
A1 : -5
B1 : -4,5
...
T1 : 4,5
U1 : 5
A2 : A1^2
```

puis on fait glisser la cellule A2 jusqu'à la cellule U2 et on obtient le tableau de valeurs de f.

5	-4,5	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
25	20,25	16	12,25	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25	16	20,25	25

FIGURE 68.8 – Tableau de valeurs de la fonction $f : x \mapsto x^2$

Ensuite, on veut tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[-5\,,5]$. On utilise le tableau de valeurs qu'on a construit précédemment. On sélectionne le tableau entier puis on va construire un graphique (`Insertion > Diagramme`). On sélectionne le graphique `Ligne` et l'option « *Lignes lisses* ». Dans l'onglet « *Plage de données* », il faut sélectionner l'option « *Séries en données en lignes* » et « *Première ligne comme étiquette* ».

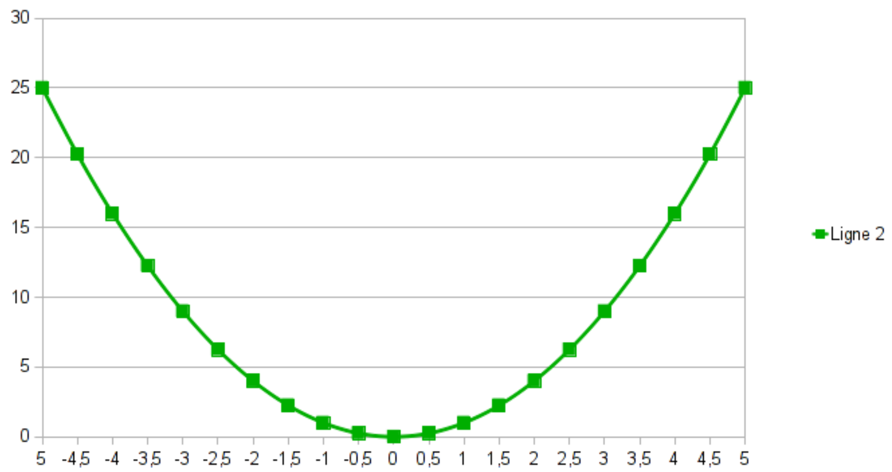


FIGURE 68.9 – Courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[-5\,,5]$

3 Le tableur pour les techniciens supérieurs

3 1 Régression linéaire

Sur un tableur, on donne la masse d'un objet en fonction du temps :

Temps (s)	*Masse (g)*
0	0
5	22
10	53
15	88
20	125
25	163
30	202
35	245
40	296
45	352
50	412

On construit le graphique sans relier les points :
- On sélectionne les deux colonnes du tableau.
- `Insertion > Diagramme`
- On sélectionne le diagramme `Ligne` sans relier les points.
- Dans l'onglet « *Plage de données* », on coche l'option « *Séries de données en colonnes* », « *Première ligne comme étiquette* » et « *Première colonne comme étiquette* ».

On veut ensuite l'ajustement linéaire des données statistiques (c'est-à-dire la droite qui minimise le carré des distances des points). Pour cela, on clique droit sur les points et on sélectionne « *Insérer une courbe de tendance* ». La courbe doit être « *Linéaire* » et on peut afficher l'équation de la droite.

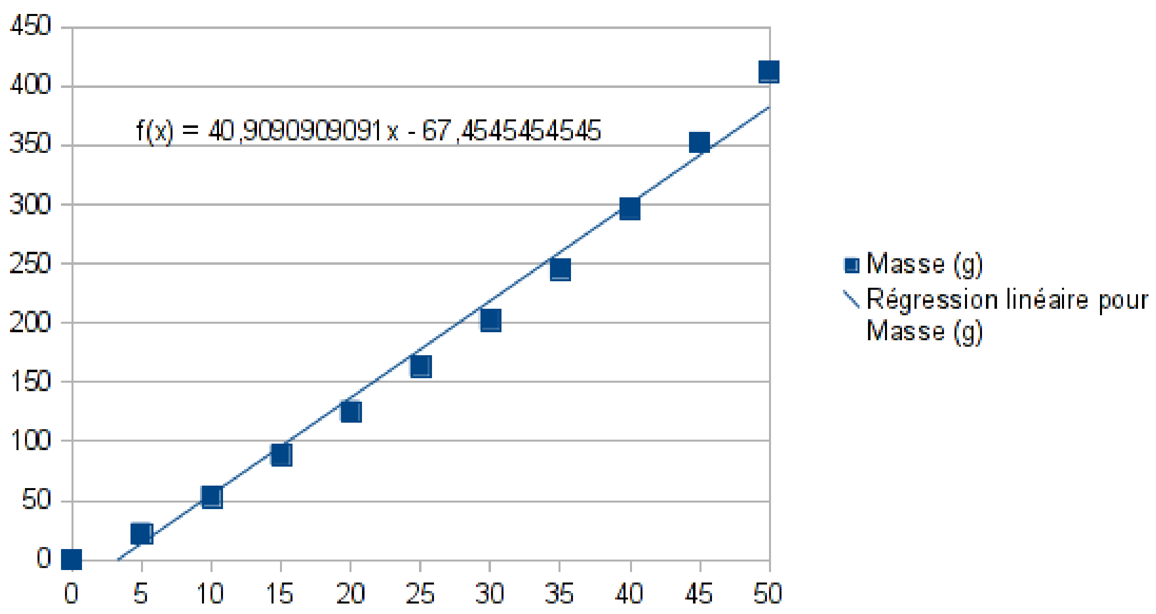


FIGURE 68.10 – Ajustement linéaire sur les données statistiques

LEÇON

69 Les différents types de raisonnement en mathématiques

Niveau, prérequis, références

Niveau Lycée

Prérequis Théorie des ensembles

Références [171, 172]

Contenu de la leçon

1 Outils de base

1 1 Assertions

Définition 69.1 (Assertion)**.** *Une* assertion *est une proposition mathématique qui peut être vraie ou fausse.*

Exemples 69.2.
- « *Il est bleu* » est une assertion *incomplète* car on ne peut pas décider si elle est vraie ou fausse.
- « *Le stylo de Jean est noir* » est par contre une assertion s'il n'y a qu'un seul Jean et qu'il n'a qu'un seul stylo.
- « *x est plus grand que y* » est une assertion incomplète.
- « *Soit x un homme, il est brun* » ou « *Tous les hommes sont bruns* » sont des assertions.

1 2 Connecteurs

Les connecteurs *et* et *ou* sont liés à l'*intersection* et à la *réunion* d'ensembles et la *négation* est liée au *complémentaire* d'un ensemble.

Remarque 69.3. Si $\mathcal{P}$ est une assertion, non $\mathcal{P}$ est l'assertion qui est vraie si $\mathcal{P}$ est fausse et fausse si $\mathcal{P}$ est vraie. On remarque que cette définition contient la règle du tiers exclu : « *Une assertion $\mathcal{P}$ est vraie ou fausse.*

Ce sont des moyens de produire une nouvelle assertion à partir de deux autres : par exemple

Exemples 69.4.
1. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q} \leftrightarrow X \cap Y$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à X *et* à Y
2. $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q} \leftrightarrow X \cup Y$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à X *ou* à Y
3. non $\mathcal{P} \leftrightarrow X^c$ est l'ensemble des éléments qui n'appartiennent pas à X.

1 3 Quantificateurs

Les quantificateurs sont :
- *quelque soit* noté $\forall$,
- *il existe* noté $\exists$.

Remarque 69.5. Les notions de limite et continuité sont définies dans les classes supérieures, par des énoncés mathématiques utilisant des quantificateurs.

Exemples 69.6.
1. « *Tous les guichets sont fermés certains jours* » peut être traduit mathématiquement par :
$$\forall g \in G,\ \exists j \in J,\quad g \text{ est fermé le jour } j.$$
Sa négation est : « *Certains guichets sont ouverts tous les jours* :
$$\exists g \in G,\ \forall j \in J,\quad g \text{ est ouvert le jour } j.$$

2. « *Certains jours tous les guichets sont fermés* peut être traduit mathématiquement par :

$$\exists j \in J,\ \forall g \in G, \quad g \text{ est fermé le jour } j.$$

Sa négation est alors : « *tous les jours, il y a un guichet d'ouvert :* » :

$$\forall j \in J,\ \exists g \in G, \quad g \text{ est ouvert le jour } j.$$

Remarque 69.7. Il faut faire attention dans quel ordre on écrit les quantificateurs. La proposition

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z}, \quad y > x$$

est vraie (on peut prendre $y = x + 1$) mais, par contre, la proposition :

$$\exists x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z}, \quad y > x$$

est fausse (on peut prendre $y = x$).

Exemples 69.8. Soit P l'ensemble des portes d'un lycée qui sont munies d'une serrure et C l'ensemble des clés que possède le concierge de ce lycée. On va traduire en français courant les assertions mathématiques suivantes :

1. « $\forall p \in P$, $\exists c \in C$, c ouvre p » veut dire « *Le concierge possède une clé pour chacune des portes.* »
2. « $\exists c \in C$, $\forall p \in P$, c ouvre p » veut dire « *Le concierge possède un passe-partout qui ouvre toutes les portes.*

1 4 Implication

Définition 69.9 (Implication)**.** « *Une proposition P* implique logiquement *une proposition Q* » *signifie que* « *la proposition non P ou Q est vraie* »*. On note alors $P \Rightarrow Q$.*

En particulier $P \Rightarrow Q$ peut être vraie ou faux, il s'agit d'une assertion.

1 5 Condition nécessaire, condition suffisante

Définition 69.10. *Soient P et Q des propriétés.*
- *Q est une* condition nécessaire *de P si Q est vraie lorsque P est vraie.*
- *Q est une* condition suffisantes *de P si P est vraie lorsque Q est vraie.*

Remarque 69.11. On dit que P est équivalente à Q si Q est une condition nécessaire et suffisante de P.

1 6 Contraposée

Définition 69.12 (Contraposée)**.** *La* contraposée *de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication non $Q \Rightarrow$ non P. C'est une assertion équivalente à l'implication.*

Pour démontrer qu'une implication est vraie, il suffit de démontrer sa contraposée. Il arrive souvent que la propriété contraposée soit plus « évidente » à l'intuition que la propriété elle-même.

Exemple 69.13. Pour montrer que l'implication

$$ab \neq 0 \Rightarrow a \neq 0 \quad \text{et} \quad b \neq 0$$

est vraie, il suffit de vérifier que

$$a = 0 \text{ ou } b = 0 \Rightarrow ab = 0$$

est vraie, ce qui est évident.

L'étude de la contraposée peut aussi éclairer l'affirmation suivante :

$$\text{si } P \text{ est fausse, alors } P \Rightarrow Q \text{ est vraie.}$$

En effet, on admet plus facilement que si P est fausse, c'est-à-dire si non P est vraie, la contraposée non $Q \Rightarrow$ non P est vraie, puisque non P est vraie.

Remarque 69.14. Une implication et sa contraposée ont donc même valeur de vérité.

Il ne faut pas confondre la contraposée d'une implication avec l'implication réciproque.

Exemple 69.15. L'assertion « *S'il pleut, le sol est mouillé* » a pour contraposée : « *Si le sol n'est pas mouillé, il ne pleut pas* » énoncé plus couramment « *Le sol est sec, donc il ne pleut pas.* » Ces deux implications sont vraies et équivalentes.

La *réciproque* est : « *si le sol est mouillé, il pleut* ». Cette implication est fausse, le sol peut être mouillé par le passage du camion municipal de nettoyage ou bien par de la neige a fondu.

Attention à l'exemple suivant :

Exemple 69.16. Si on vous dit : « *Si tu es sage ce matin, tu auras du chocolat cet après-midi* », la contraposée est : « *Si tu n'as pas de chocolat cet après-midi, tu n'as pas été sage ce matin* » et la réciproque « *Si tu as du chocolat cet après-midi, tu as été sage ce matin* ». Enfin, la contraposée de la réciproque est : « *Si tu n'es pas sage ce matin, tu n'auras pas de chocolat cet après-midi.* Ce qui n'est pas équivalent à la première phrase. Mais c'est en général cette dernière affirmation qui est dans la tête de celui qui prononce la première (en appliquant des principes d'éducation positive !).

2 Raisonnements

2.1 Règles de raisonnement

Il y a trois principes qui s'appliquent tout le temps :

Proposition 69.17. *Si P est vraie et $P \Rightarrow Q$ est vraie alors l'assertion Q est vraie.*

Cette règle est en fait une définition de ce que signifie qu'une implication est vraie. On l'emploie tout le temps sans même s'en rendre compte.

Exemple 69.18. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 1$. L'implication

$$\ll f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \gg$$

est vraie. Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 69.19. *Si P est vraie, si $P \Rightarrow Q$ est vraie et si $Q \Rightarrow R$ est vraie alors R est vraie.*

C'est ce qu'on appelle un *syllogisme*.

Proposition 69.20 (Raisonnement par dichotomie ou séparation des cas)**.** *Le raisonnement par séparation des cas consiste à énumérer les cas possibles. On essaye un cas puis l'autre.*

Exemple 69.21. Trois frères Alfred, Bernard et Claude ont des crayons de couleur différente bleu, rouge et vert. De plus, les assertions suivantes sont vraies :

1. Si le crayon d'Alfred est vert, alors le crayon de Bernard est bleu ;
2. Si le crayon d'Alfred est bleu, alors le crayon de Bernard est rouge ;
3. Si le crayon de Bernard n'est pas vert, alors le crayon de Claude est bleu ;
4. Si le crayon de Claude est rouge, alors le crayon d'Alfred est bleu.

Que peut-on conclure sur la courbe respective des crayons d'Alfred, Bernard et Claude ? On suppose que le crayon d'Alfred est vert. Or, d'après la première assertion, si le crayon d'Alfred est vert alors le crayon de Bernard est bleu mais cela ne va pas avec la troisième assertion, le crayon de Claude serait aussi bleu. On suppose alors que le crayon d'Alfred est bleu. D'après la deuxième assertion, le crayon de Bernard serait rouge. Mais d'après la troisième assertion, si le crayon de Bernard est rouge alors le crayon de Claude est bleu, ce qui est impossible. Donc la seule solution est :

- le crayon d'Alfred est rouge,
- celui de Bernard est vert,
- celui de Claude est bleu.

2 2 Raisonnement par récurrence

Proposition 69.22 (Principe de récurrence). *On a une assertion $\mathcal{P}(n)$ pour tout entier n. Il faut d'abord bien l'énoncer.*

1. ***Initialisation en** $n \geq n_0$. On vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ pour un entier n_0 petit.*
2. ***Hérédité de l'assertion** $\mathcal{P}(n)$. On montre que l'assertion $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie pour $n \geq n_0$. L'assertion $\mathcal{P}(n)$ est dite* héréditaire *pour $n \geq n_0$.*
3. ***Conclusion.** On conclut que l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.*

Exemple 69.23 (Dominos). On met 543 dominos sur une table verticalement et proches les uns des autres. On désire montrer que si je fais tomber le premier domino sur le second, le 543^{e} tombe (et tous les dominos tombent !). On pose :

$$\mathcal{P}(n) : \text{le } n^{\text{e}} \text{ domino tombe sur le } n+1\text{-ième domino.}$$

On montre que l'assertion $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie. En effet, si le n^{e} domino tombe vers le $n+1$-ième domino, il le fait tomber sur le suivant.

D'autre part $\mathcal{P}(1)$ est vrai car si je fais tomber le premier domino sur le second. Comme $\mathcal{P}(1)$ et $(\mathcal{P}(1) \Rightarrow \mathcal{P}(2))$ sont vraies, $\mathcal{P}(2)$ est vraie. Ainsi de suite... Comme $\mathcal{P}(542)$ et $(\mathcal{P}(542) \Rightarrow \mathcal{P}(543))$ sont vraies, $\mathcal{P}(543)$ est vraie et le 543^{e} domino est tombé.

Remarquez que si on fait tomber le premier domino de l'autre côté, l'implication $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ serait toujours vraie, mais par contre $\mathcal{P}(1)$ ne le serait pas. Donc $\mathcal{P}(543)$ ne serait pas vraie.

Exemple 69.24 (Somme des n premiers entiers). On veut montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

où $\sum_{k=1}^{n} k$ désigne la somme des n premiers entiers avec $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$\mathcal{P}(n) : « \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} ».$$

Initialisation On vérifie la véracité de $\mathcal{P}(1)$. On a bien :

$$1 = \frac{1 \times 2}{2} = 1.$$

Hérédité On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour un rang n quelconque. On démontre la propriété $\mathcal{P}(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

D'où l'assertion $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple 69.25 (Une inégalité qu'on ne montre pas par récurrence)**.** L'inégalité $2^n \geq n^2$ est vraie pour $0 \leq n \leq 2$. Pour $n = 3$,

$$2^3 = 8 \quad \text{et} \quad 3^2 = 9$$

donc $2^n \ngeq n^2$. Si on voulait faire une démonstration par récurrence, on serait un peu embêté. On supposerait que $2^n \geq n^2$ et :

$$2^n \geq n^2 \Leftrightarrow 2 \times 2^n \geq 2n^2 \Leftrightarrow 2^{n+1} \geq 2n^2 \dots$$

On ne peut aller jusque là et on ne peut donc pas conclure.

Il arrive que l'on fait une mauvaise hypothèse de récurrence ou que la propriété soit fausse pour le n_0 choisi.

Exemple 69.26 (Une récurrence fausse)**.** Dans l'assertion : « *Tous les crayons de couleur d'une même boîte ont la même couleur* », il y a comme une erreur. Proposons une « démonstration ». S'il n'y a qu'un crayon de couleur dans la boîte, c'est vrai. Prenons comme hypothèse de récurrence,

s'il y a k crayons de couleur dans une boîte, ils ont la même couleur.

Prenons $k+1$ crayons de couleur. On en enlève un, la crayon A. Par hypothèse de récurrence, les k crayons de couleur qui restent ont la même couleur. On remet A et on enlève un autre, B. Par hypothèse de récurrence, les k crayons de couleur qui restent ont la même couleur que A et aussi la même couleur que B.

Donc ils ont tous la même couleur.

2 3 Raisonnement par l'absurde

Définition 69.27 (Raisonnement par l'absurde)**.** *Le* raisonnement par l'absurde *consiste à supposer le contraire de ce que l'on veut démontrer, puis par des déductions logiques (utilisant l'hypothèse) à aboutir à une absurdité.*

Exemple 69.28. On veut démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. Pour cela, on va supposer que $\sqrt{2}$ est rationnel. On écrit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q des entiers premiers entre eux. On va ensuite déduire de l'équation $q^2 = 2p^2$ que p et q sont pairs. Ce qui est en contradiction avec le choix de p et q qu'on a fait (ils sont premiers entre eux).

Remarque 69.29. Parfois on traite de raisonnement, par l'absurde, un simple raisonnement utilisant la contraposée. Par exemple,

- on veut démontrer que $P \Rightarrow Q$ est vraie,
- on suppose non Q,
- on fait par démontrer non P et on se dit en contradiction avec P mais P ne nous a pas servi. Il n'y a donc pas de contradiction mais une simple contraposée.

2 4 Raisonnement par disjonction des cas

Définition 69.30 (Raisonnement par disjonction des cas)**.** *Pour montrer une propriété par disjonction des cas, on la prouve dans un nombre* fini *de cas, ces cas couvrant tous les cas possibles.*

Exemple 69.31. On veut montrer qu'il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel. On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Soit $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, soit il ne l'est pas et alors il est irrationnel.

- Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, on a fini. Les nombres $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$ conviennent. Sinon les nombres $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$ sont irrationnels et a^b vaut 2.

Il est peu probable que le premier cas se produise et il ne se produit même pas, mais nous n'avons pas eu besoin de le montrer.

LEÇON 70 Applications des mathématiques à d'autres disciplines

Niveau, prérequis, références

Niveau Lycée

Prérequis Suites, équations différentielles, statistiques, coefficient de proportionnalité, produit scalaire.

Références [173, 174, 175, 176, 177, 178, 179]

Contenu de la leçon

1 Les mathématiques en physique

1.1 Vitesse d'un objet

Définition 70.1. *La vitesse est une mesure censée dire si un objet va plus ou moins vite. Elle permet de mesurer l'évolution temporelle d'une quantité. Elle fait partie des grandeurs cinématiques.*

Définition 70.2 (Définition mathématique de la vitesse)**.** *La vitesse est la dérivée de la position de l'objet par rapport au temps (que l'on notera t). La position d'un objet est la plupart du temps la position de son centre de gravité. La position est donnée par plusieurs coordonnées. Le nombre de coordonnées dépend de la dimension de l'espace dans lequel se déplace l'objet. L'objet peut se déplacer dans un espace à deux dimensions et sera localisé par exemple par ses coordonnées x et y dans un référentiel cartésien. Dans ce cas, sa vitesse sera donné par les deux composantes de son vecteur vitesse :*

$$V(t) = \dot{X}(t) = (v_x, v_y) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right).$$

Exemple 70.3. On lance une balle à l'origine d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Sa trajectoire est donnée par la fonction suivante :

$$X : t \mapsto X(t) = -t^2 + 10t \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 10.$$

Ainsi la vitesse de la balle est donnée par la fonction suivante :

$$V : t \mapsto V(t) = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = -2t + 10.$$

On remarque que la balle a une vitesse nulle quand $x = 5$, c'est le moment où elle retombe au sol.

1.2 Travail d'une force lors d'un déplacement constant

On considère des objets qui subissent des forces dont le point d'application se déplace. Par exemple, on peut faire changer un solide d'altitude : imaginons une grue transportant une palette, la force de tension du fil à son point d'application qui se déplace (puisque le solide se déplace), on arrive à lever le chargement. On dit alors que la force exercée par la grue *travaille*.

Définition 70.4 (Force constante)**.** *Une force est dite constante lorsque sa* valeur*, son* sens *et sa* direction ne varient pas *au cours du temps.*

Définition 70.5. *Le travail d'une force constante $\vec{F}$ pour un déplacement rectiligne $\overrightarrow{AB}$ de son point d'application est le produit scalaire de $\vec{F}$ par $\overrightarrow{AB}$. Il est note :*

$$W_{\overrightarrow{AB}}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \times AB \times \cos\alpha$$

où $W_{\overrightarrow{AB}}(\vec{F})$ est le travail exprimé en Joules, F la valeur de la force en Newton, AB la longueur de déplacement (en mètres) et α l'angle entre $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$ en radiant.

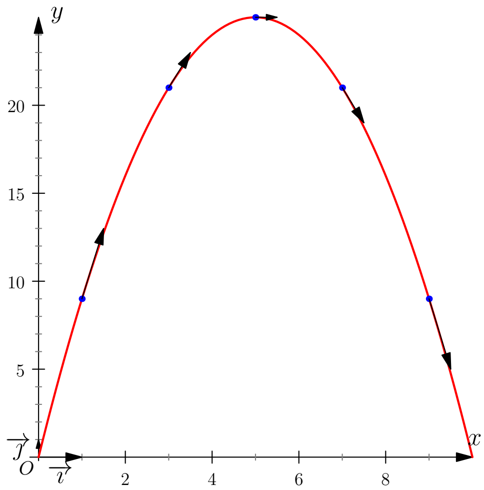


FIGURE 70.1 – Trajectoire de la balle et sa vitesse en certains points

Exemple 70.6. Soit un chariot qui se déplace sur des rails rectilignes. On donne les valeurs numériques suivantes :

- $F = 3\,\mathrm{N}$
- $AB = 2\,\mathrm{m}$
- $\alpha = 30\,^\circ$

Le travail de $\vec{F}$ est :

$$W_{\overrightarrow{AB}}(\vec{F}) = F \times AB \times \cos\alpha = 3 \times 2 \times \cos(30^\circ) = 5{,}2\,\mathrm{J}.$$

Selon la valeur de l'angle α, le travail peut être positif, négatif ou nul, c'est pourquoi on dit que c'est une grandeur algébrique.

Définition 70.7 (Différents types de travail).
1. *Si $\alpha < 90^\circ$ alors $\cos\alpha > 0$ et $W > 0$. On remarque que la force va favoriser le mouvement dans le sens du déplacement $\overrightarrow{AB}$. On dit que le travail est* moteur.
2. *Si $\alpha > 90^\circ$ alors $\cos\alpha < 0$ et $W < 0$. La force va alors s'opposer au mouvement du solide, on dit qu'elle effectue un* travail résistant.
3. *Si $\alpha = 90^\circ$ alors $\cos\alpha = 0$ et $W = 0$. On dira alors que le travail est nul.*

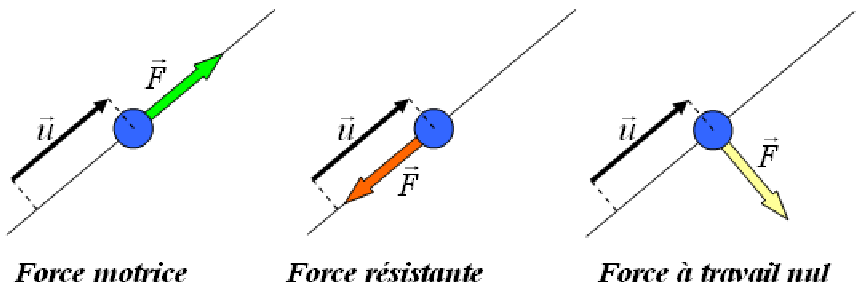


FIGURE 70.2 – Différents types de travail

1 3 Décharge d'un condensateur

Exercice 70.8. On considère un circuit électrique constitué d'un condensateur (de capacité C) se déchargent dans une résistance R. On note $u_C(t)$ la tension au borne du condensateur (en Volts) à l'instant t (en secondes). À l'instant $t = 0$, on sait que $u_C(0) = 3V$. Exprimer $u_C(t)$ en fonction de t.

2 Les mathématiques pour l'étude des populations

Les suites récurrentes ont de très nombreuses applications. Par exemple, intéressons nous à l'évolution à l'effectif d'une population.

Soit p_n l'effectif de la population à l'instant n. On suppose qu'il n'y a aucun flux migratoire. L'évolution de l'effectif de la population résulte donc uniquement des naissances et des décès. On note α le taux de natalité ($\alpha \geq 0$) et ω le taux de mortalité ($0 < \omega < 1$). On a :

$$p_{n+1} = p_n + \alpha p_n - \omega p_n = p_n(1 + \alpha - \omega). \tag{70.1}$$

Cependant, il parait raisonnable de penser que les taux de natalité et de mortalité sont dépendant de l'effectif de la population. En effet, si l'effectif de la population est très important, la compétition entre les individus est accrue. On peut alors imaginer que le taux de natalité diminue et que le taux de mortalité augmente et inversement…

Un modèle un peu plus fin pourrait donc considérer que ω et α sont des fonctions affines dépendantes de p_0 :

$$\begin{aligned} \alpha(p_n) &= \alpha - \alpha' p_n \quad \text{où } \alpha' > 0 \\ \omega(p_n) &= \omega + \omega' p_n \quad \text{où } \omega' > 0. \end{aligned}$$

(70.1) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n(1 + \alpha - \alpha' p_n - \omega - \omega' p_n) \\ &= p_n(1 + \alpha - \omega) \cdot \left(1 - \frac{\alpha' + \omega'}{1 + \alpha + \omega} p_n\right). \end{aligned}$$

On pose $u_n := \frac{\alpha'+\omega'}{1+\alpha+\omega} p_n$. Comme $p_{n+1} > 0$, $p_n > 0$ et $(1 + \alpha - \omega) \geq 0$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

Remarque 70.9. Que caractérise u_n ?

- Si u_n est nul (ou tout au moins très petit) alors on en revient au premier modèle, c'est-à-dire les taux de natalité et de mortalité sont très peu sensibles à l'effectif de la population.
- Si u_n s'approche de 1, l'évolution de l'effectif en ait fortement impacté.

Conclusion : u_n caractérise la sensibilité des taux de mortalité et de natalité à l'effectif de la population.

On remarque que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{\alpha' + \omega'}{a} \cdot p_{n+1} \qquad \text{où } a = 1 - \omega + \alpha \\ &= \frac{\alpha' + \omega'}{a} \cdot a \cdot p_n \cdot (1 - u_n) \\ &= u_n \cdot a \cdot (1 - u_n). \end{aligned}$$

u_n est donc une suite récurrente avec $g(x) = ax(1 - x)$.

Remarque 70.10 (Discussion des valeurs de a). $a > 0$ car $1 - \omega > 0$ et $\alpha > 0$. On peut considérer que a n'est pas très grand, sinon cela signifierait qu'il y a un grand écart entre α et ω. Prenons $0 < a < 4$.

On peut alors montrer que $g([0\,,1]) \subset [0\,,1]$. Les points fixes de g sont $\overline{x_1} = 0$ et $\overline{x_2} = \frac{a-1}{a}$.

Si $0 \leq a < 1$ seul $\overline{x_1}$ est dans $[0\,,1]$ et il est attractif car $g'(x) = a - 2ax$ et $g'(\overline{x_1}) = a$.

Si $1 \leq a < 2$ – $g'(x) = a - 2ax$, $g'(\overline{x_1}) = 0 > 1$ donc $\overline{x_1}$ est répulsif.
– $g'(\overline{x_2}) = a - 2a\frac{a-1}{a} = 1 - a$. Or

$$1 \leq a < 2 \Leftrightarrow -1 \geq -a > -2 \Leftrightarrow 0 \geq 1 - a > -1$$

donc $\overline{x_2}$ est attractif.

3 Les mathématiques en sciences et vie de la Terre

3 1 La loi de Hardy-Weinberg

Proposition 70.11. *La loi de Hardy-Weinberg postule qu'il y a un équilibre de la fréquence des allèles et des génotypes au cours des générations.*

Pour que l'équilibre existe, il faut faire plusieurs hypothèses :
- La population est de taille infinie ($\sim$ grande taille, loi des grands nombres)
- Espèces diploïde et reproduction sexuée
- Equiprobabilité des gamètes (pangamie)
- Rencontre des gamètes au hasard ou formation aléatoire des couples
- Ségrégation aléatoire des gamètes lors de la méiose
- Absence de migration
- Absence de mutation sur les allèles considérés
- Absence de sélection
- Les générations ne se chevauchent pas.

De cet équilibre de Hardy-Weinberg, découle la loi de distribution génotypique :

$$p^2 + q^2 + 2pq = 1$$

Soit A et a, deux allèles de fréquence respectivement p et q :
- p^2 est la fréquence d'un génotype homozygote AA pour deux allèles "A/"
- q^2 est la fréquence d'un génotype homozygote aa pour deux allèles "a/"
- $2pq$ est la fréquence d'un génotype hétérozygote Aa pour une allèle "A/ » et un allèle "a/".

Proposition 70.12. *La loi d'Hardy-Weinberg est :*
- *Dans une population isolée d'effectif illimité, non soumise à la sélection, et dans laquelle il n'y a pas de mutations,* les fréquences alléliques restent constantes.
- *Si les accouplements sont panmictiques, les fréquences génotypiques se déduisent directement des fréquences alléliques et restent également constantes.*

Cette loi décrit la structure génétique de nombreuses populations pour lesquelles les hypothèses de départ ne sont pas prospectées.

Exemple 70.13 (Calcul de fréquences géniques). Le calcul est simple lorsque les gènes sont co-dominants, il suffit de les compter à partir des phénotypes observés, dont le génotype est certain, et nous obtenons immédiatement une estimation des fréquences géniques.

Lorsque nous avons un ou des gènes récessifs, nous devons tenir compte des divers génotypes possibles.

Il en est ainsi du système de groupe sanguin ABO qu'on prend pour exemple de calcul.

Le système ABO comporte 3 allèles, A, B, et O, ce dernier étant récessif. Par souci de simplification, on ne différencie pas les deux allèles A1 et A2 qui déterminent deux sortes différentes de groupe A, A1 étant dominant sur A2. On observe 4 phénotypes possible. On observe, d'après M. Goudemande et Ch. Salmon, les fréquences suivantes en France, arrondies à trois décimales :
- A, fréquence $0{,}437$, génotypes possibles A/A, A/O
- B, fréquence $0{,}092$, génotypes possibles B/B, B/O
- AB, fréquence, $0{,}036$, génotype certain A/B

– O, fréquence $0{,}435$, génotype certain O/O

Soit a, b et o les fréquences géniques respectives des allèles A, B, O. On a, par définition, $a+b+o = 1$. La fréquence du génotype O/O, égale à o^2 étant de $0{,}435$, nous en déduisons la fréquence génique de o, soit $o = \sqrt{0{,}435} = 0{,}659\,5$. On en déduit la fréquence génique de l'allèle A car nous avons la fréquence des sujets :

$$A = 0{,}437 = a^2 + 2ao = a^2 + 1{,}319\,0a$$

d'où $a = 0{,}274\,3$. La valeur de b en découle immédiatement :

$$b = (1 - 0{,}659\,5 + 0{,}274\,3) = 0{,}066\,2.$$

4 Les mathématiques en économie

4 1 Calculer un taux de TVA

Exercice 70.14. Monsieur Hamonou doit appliquer un taux de TVA de 19,6% au PVHT (produit de vente hors taxe) pour vendre, taxe comprise, ses appareils.

Madame Guibert applique un taux de TVA différent au prix de vente hors taxe de ses fruits et légumes.

1. Le PVHT d'un aspirateur est 192 €.
   (a) Calculer le montant de la taxe à la valeur ajoutée (TVA) de l'aspirateur.
   (b) Calculer le prix de vente hors taxe augmenté de la taxe à la valeur ajoutée.
2. Madame Guibert vend sa marchandise 331,49 € toute taxe comprises. Le prix de vente hors taxe est de 314,21 €.
   (a) Calculer le montant de la taxe à la valeur ajoutée.
   (b) En déduire le taux de TVA utilisé par Madame Guibert.

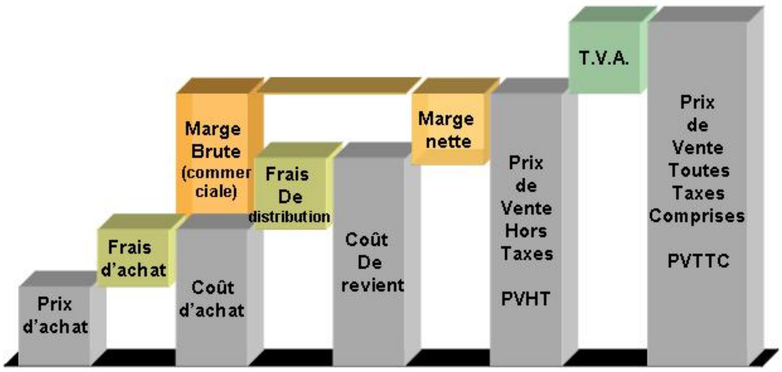


FIGURE 70.3 – Formation des prix

4 2 Monnaies et change

On utilise le « cours achat » ou le « cours vente » suivant les situations (achat de devises, ou vente de devises par la banque).

Définition 70.15 (Cours d'une monnaie)**.** *Le cours d'une monnaie par rapport à une autre définit une relation de proportionnalité.*

Exemple 70.16. Si le cours est tel que 1 \$ = 1,09 € alors

$$53\$ = 53 \times 1,09 = 57{,}77\,€,$$
$$26\,€ = 26 \times \frac{1}{1,09} = 23,85\$$$

Exercice 70.17. Madame Chambrion est responsable d'une entreprise réalisant des exportations. Elle doit se rendre successivement à Milan, Francfort et New-York. Pour organiser son voyage, elle se rend à la banque et effectue les opérations de change.

1. (a) Quelle est la monnaie utilisée à Milan et à Francfort ?
   (b) Doit-elle effectuer des opérations de change pour se rendre dans ces villes ?
   (c) Citer le nom des 12 pays dont la monnaie est l'euro.
2. Madame Chambrion doit séjourner quelques jours à New-York.
   (a) Quel est le nom de la devise utilisée aux Etats-Unis ?
   (b) La banque lui donne les informations suivantes :

dollar US	cours achat	1\$ = 1,096 euro
	cours vente	1\$ = 1,115 euro

   Elle change 900 € contre des dollars. De quelle somme, en dollars, dispose-t-elle ?
   Attention ! Le cours d'achat est la valeur d'achat pour la banque des devises (ici le dollar US).
3. De retour de New-York, il lui reste 45 dollars. Elle les convertit en euros. Quelle somme lui donne la banque ?

4 3 Intérêts composées

Exemple 70.18. Une personne a placé sur un compte le 1er janvier 2005 un capital de 10000 €. Ce compte produit des intérêts de 4% par an. Chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital et deviennent à leur tour générateurs d'intérêts. Pour n entier naturel, on appelle C_n le capital du 1er janvier de l'année $2005+n$. On a ainsi $C_0 = 10000$.

1. On détermine C_1 et C_2. Chaque année le capital génère des intérêts de 4%. Rajouter 4% revient à multiplier par :
$$1+4\% = 1 + \frac{4}{100} = 1,04.$$
   On a donc :
$$C_1 = C_0 \times 1,04 = 10000 \times 1,04 = 10400$$
$$C_2 = C_1 \times 1,04 = 10400 \times 1,04 = 10816.$$
2. On exprime C_{n+1} en fonction de C_n et on en déduit une valeur approchée de C_{10}. C_{n+1} est le capital au 1er janvier de l'année $2005+n+1$. Il est obtenu en rajoutant 4% à C_n, capital au 1er janvier de l'année $2005+n$. On a donc :
$$C_{n+1} = C_n \times 1,04.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
C_3 &= C_2 \times 1,04 = 10816 \times 1,04 = 11248,64 \\
C_4 &= C_3 \times 1,04 = 11248,64 \times 1,04 \approx 11698,59 \\
C_5 &= C_4 \times 1,04 \approx 11698,59 \times 1,04 \approx 12166,53 \\
C_6 &= C_5 \times 1,04 \approx 12166,53 \times 1,04 \approx 12653,19 \\
C_7 &= C_6 \times 1,04 \approx 12653,19 \times 1,04 \approx 13159,32 \\
C_8 &= C_7 \times 1,04 \approx 13159,32 \times 1,04 \approx 13685,69 \\
C_9 &= C_8 \times 1,04 \approx 13685,69 \times 1,04 \approx 14233,12 \\
C_{10} &= C_9 \times 1,04 \approx 14233,12 \times 1,04 \approx 14802,44.
\end{aligned}$$

3. On suppose maintenant qu'au 1er janvier de chaque année, à partir du 1er janvier 2006, la personne rajoute 1000 € sur son compte. On recalcule C_1 et C_2, puis on exprime C_{n+1} en fonction de C_n. Ainsi, on détermine une valeur approchée de C_{10}. Chaque année, le capital génère des intérêts de 4% et de plus il est augmenté de 1000 €. On a donc

$$\begin{aligned}
C_1 &= C_0 \times 1,04 + 1000 = 10000 \times 1,04 + 1000 = 11400 \\
C_2 &= C_1 \times 1,04 + 1000 = 11400 \times 1,04 + 1000 = 12856
\end{aligned}$$

On peut écrire $C_{n+1} = C_n \times 1,04 + 1000$. On obtient alors en utilisant une calculatrice $C_{10} \approx 26808,55$. Avec une TI82, on peut faire :

```
10000 -> C
C * 1.04 + 1000 -> C
```

On obtient alors

```
> 10000-> C
10000
> C*1.04+1000->C
11400
12856
14370.24
15945.0496
17582.85158
19286.16565
21057.61227
22899.91676
24815.91343
26808.54997
```

Avec un tableur (OpenOffice.org Calc), on peut faire :

```
A1 = 10000
B1 = A1*1,04+1000
# Glisser la formule vers la droite autant de fois que
   necessaire
```

On obtient :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	10000	11400	12856	14370,24	15945,0496	17582,85158	19286,16565	21057,61227	22899,91676	24815,91343

4. On donne un algorithme sur Algobox qui détermine à partir de quelle année le capital aura été multiplié par 5.

```
> VARIABLES
     C EST_DU_TYPE NOMBRE
     annee EST_DU_TYPE NOMBRE
> DEBUT_ALGORITHME
     annee PREND_LA_VALEUR 2005
     C PREND_LA_VALEUR 10000
     > TANT_QUE (C < 50000) FAIRE
        DEBUT_TANT_QUE
        annee PREND_LA_VALEUR annee+1
        C PREND_LA_VALEUR C*1.04+1000
        FIN_TANT_QUE
     AFFICHER annee
   FIN_ALGORITHME
```

On donne un algorithme sur TI82 qui détermine à partir de quelle année le capital aura été multiplié par 5.

```
2005 -> N
10000 -> C
While C < 50000
C*1.04+1000 -> C
N + 1 -> N
End
Disp "ANNEE ",N
```

Ainsi, en 2025, on multiplie par 5 le capital initial déposé en 2005.

Compléments

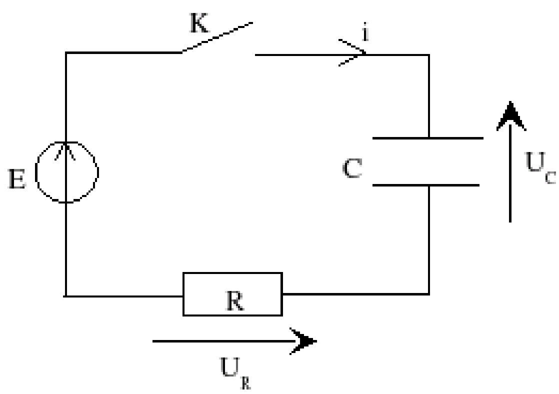


FIGURE 70.4 – Circuit RC

Solution à l'exercice 70.8. D'après la loi d'additivité des tensions, on a :

$$u_C + u_R = 0$$

(u_C et u_R désignent respectivement la tension aux bornes du condensateur et de la résistance). Notons $i(t)$ l'intensité du courant électrique dans le circuit à l'instant t. On sait que :

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} \quad \text{et} \quad u_R(t) = Ri(t) = R\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}.$$

D'où :

$$u_C'(t) = \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{RC}u_R(t) = -\frac{1}{RC}u_C(t).$$

On en déduit :

$$u_C(t) = K\mathrm{e}^{-t/RC} \quad (K \in \mathbb{R}).$$

La condition initiale $u_C(0) = 3$ nous donne $K = 3$, d'où :

$$u_C(t) = 3\mathrm{e}^{-t/RC}.$$

□

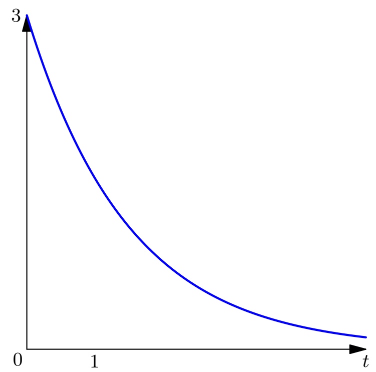


FIGURE 70.5 – Représentation graphique de u_C

Solution à l'exercice 70.14. 1. (a) Le montant de la TVA est le produit du prix de vente hors taxe (PVHT) par le taux de TVA. La taxe à la valeur ajoutée est un impôt. Elle est payée par le consommateur, collectée par le vendeur et reversée à l'Etat.

$$\text{Montant de la TVA} = \text{PVHT} \times \text{Taux de TVA} = 192 \times 0,196 \approx 37{,}63\,€.$$

(b) Le PVTTC est égal au PVHT augmenté de la TVA.

$$\text{PVHT} + \text{TVA} = 192 + 37,63 = 229{,}63\,€.$$

229,63 € est le prix de vente toute taxe comprise (PVTTC).

2. (a)

$$\text{TVA} = \text{PVTTC} - \text{PVGT} = 331,49 - 314,21 = 17{,}28\,€.$$

(b)

$$\text{Taux de TVA} = \frac{\text{TVA}}{\text{PVHT}} = \frac{17,28}{314,21} \approx 0,055.$$

Le taux de TVA utilisé utilisé par Madame Guibert est 5,5%.

Les deux taux de TVA sont :
- 5,5 % (taux réduit) sur les produits alimentaires en particulier ;
- 19,6 % (taux normal) sur les biens et les services.

□

Solution de l'exercice 70.17. 1. (a) La monnaie utilisée en Italie et en Allemagne est l'euro.

(b) L'euro est la monnaie commune de 12 pays en Europe, au 1er janvier 2002. Entre ces pays, aucune opération de change n'est nécessaire aujourd'hui.

(c) Le tableau 70.1 donne le nom des 12 pays concernés et le nom de leur ancienne monnaie.

Allemagne	1,95583	mark allemand
Autriche	13,7603	shilling autrichien
Belgique	40,3399	franc belge
Espagne	166,386	pesta espagnole
Finlande	5,94573	mark finlandais
France	6,55957	franc français
Grèce	340,75	drachme grecque
Irlande	0,787564	livre irlandaise
Italie	1936,27	lire italienne
Luxembourg	40,3399	franc luxembourgeois
Pays-Bas	2,20371	florin néerlandais
Portugal	200,482	escudo portugais

TABLE 70.1 – Parité de l'euro par rapport aux douze monnaies

2. (a) La devise aux Etats-Unis est le dollar US ($)

(b) La banque vend des dollars. Le cours vente pratiqué est : $1\$ = $ 1,115 €. La somme en dollars est proportionnelle à sa valeur en euros.

dollars	1	x
euros	$1,115$	900

$$; \quad \frac{1}{1,115} = \frac{x}{900},$$

d'où $1,115x = 900$, soit

$$x = \frac{900}{1,115} \approx 807,17\$.$$

Madame Chambrion dispose de 807,17$.

3. La banque achète des dollars. Le cours achat pratiqué est : $1\$ = 1,096$ euro (la différence des cours pratiqués (cours achat, cours vente) permet de rémunérer les opérations de change effectués par la banque).

dollars	1	45
euros	$1,096$	y

$$; \quad \frac{1}{1,096} = \frac{45}{y},$$

d'où $y = 45 \times 1,096 =$ 49,32 €. Madame Chambrion obtient $49,32$ euros.

□

Bibliographie

[1] http://www.ac-grenoble.fr/maths/perso/Body/graphes_4.pdf

[2] http://www.normalesup.org/~dconduche/TermES/cours/Dijkstra.pdf

[3] http://www.edunet.tn/ressources/pedagogie/mathematice/HTML/4eg/thgr/probabilistes.pdf

[4] http://web-serv.univ-angers.fr/docs/etudquassi/Theorie_des_graphes.pdf

[5] D. Mouchiroud, *Mathématiques : Outils pour la Biologie*, Ch.1.

[6] *Analyse Combinatoire*, URL : http://vif.com/users/aleves/doc/combinatoire.pdf

[7] G. Connan, *Une année de mathématiques en T^{ale}S*, Ch.14, 2009-2010. URL : http://tehessin.tuxfamily.org/

[8] *Lecon 03 : Coefficients binomiaux, dénombrement des combinaisons, formule du binôme. Applications.* URL : http//www.capes-de-math.com/index.php?page=lecons

[9] *Coefficents binomiaux*, URL :

[10] Contributeurs de Wikipédia, *Coefficient binomial*, Wikipédia.

[11] G. Costantini, *Probabilités (discrètes)*, Cours de Première S, URL : http://bacamaths.net

[12] P. Ribereau, *Cours 5 Probabilités : Notion, probas conditionnelles et indépendance*, URL : http://www.math.univ-montp2.fr/~ribereau

[13] C. Suquet, *Introduction au calcul de probabilités*, 2007–2008. URL : http://math.univ-lille1.fr/~ipeis.

[14] P. Duval, *Probabilités, TS*. URL : http://lcs.werne.lyc14.ac-caen.fr/~duvalp/

[15] G. Costantini, *Probabilités : Généralités, conditionnement, indépendance.*, Cours de Première S, URL : http://bacamaths.net

[16] G. Costantini, *Loi binomiale*, URL : http://bacamaths.net.

[17] L. Lubrano & al., *Mathématiques, BTS Industriels - Groupements B et C*, Dunod, 2011.

[18] C. Suquet, *Intégration et probabilités élémentaires*, 2009–2010.

[19] G. Costantini, *Lois de probabilités continues*, URL : http://bacamaths.net.

[20] J. Levy, *Séries statistiques*, URL : http://jellevy.yellis.net.

[21] P. Brachet, *Statistiques : résumé de cours et méthodes*, Première S.

[22] Contributeurs de Wikipédia, *Série statistiques à deux variables*, Wikipédia.

[23] G. Costantini, *Séries statistiques à deux variables*, URL : http://bacamaths.net.

[24] A. Guichet, *Prépa ECS - Lycée Touchard*, Chap 1. 1.2. URL : http://alainguichet.mathematex.net/ecs-touchard/wiki

[25] N. Daval, *Statistiques inférentielles : estimation*, BTS Domotique. URL : http://mathematiques.daval.free.fr

[26] Anonymous, *Chapitre 9 : Estimations*, Lycée Rostand de Mantes.

[27] C. Parfenoff, *Division euclidienne, division décimale* , Classe de sixième. URL : http://www.parfenoff.org/

[28] Contributeurs de Wikipédia, *Critères de divisibilité*, Wikipédia.

[29] T. Mouaddeb, *PGCD, PPCM de deux nombres entiers, Nombres premiers entre eux, Bézout*, Leçon de Math, S2, Master 1 Ens. Math 2010–2011.

[30] Contributeurs de Wikipédia, *Algorithme d'Euclide*, Wikipédia.

[31] Contributeurs de Wikipédia, *Théorème de Bachet-Bézout*, Wikipédia.

[32] Contributeurs de Wikipédia, *Equation diophantienne* $ax + by = c$, Wikipédia.

[33] J. ONILLON, *Vestiges d'une terminale S — Résolution générale des équations diophantiennes*, URL : http://tanopah.com

[34] ZAUCTORE, *Equations diophantiennes du premier degré*, 3 octobre 2007. URL : http://www.mathforu.com/pdf/equation-diophantienne-premier-degre.pdf

[35] D.-J. MERCIER *Fondamentaux d'algèbre et d'arithmétique*, EPU, Publibook, 2010.

[36] B. BERTINELI & Y. SCHUBNEL, *Leçons de mathématiques*, CRDP de Franche-Conté, 2001.

[37] G. TENENBAUM & M. MENDÈS-FRANCE, *Les nombres premiers*, PUF Editions, 2000.

[38] X. DELAHAYE, *Congruences, Terminale S*, URL : http://xmaths.free.fr.

[39] J.-P. QUELEN, *Petit théorème de Fermat et codage RSA*, 15 janvier 2011.

[40] Contributeurs de Wikipédia, *Equation du second degré*, Wikipédia.

[41] C. BOULONNE, *Notes de Cours, M101 : Fondements de l'algèbre*, L1 Mathématiques, 2006–2007.

[42] *Equations du second degré à une inconnue* URL : http://ww2.ac-poitiers.fr/math_sp/

[43] C. BOULONNE, *Notes de Cours, M101 : Fondements de l'algèbre*, L1 Mathématiques, 2006–2007.

[44] G. COSTANTINI, *Nombres complexes*, Terminale S. URL : http://bacamaths.net.

[45] G. COSTANTINI, *Nombres complexes*, Terminale S. URL : http://bacamaths.net.

[46] J. ONILLON, *Vestiges d'une terminale S — Expressions complexes de transformations*, URL : http://tanopah.com

[47] T. VEDEL, *Similitude et transformation complexe associée*, Terminale S spé

[48] G. COSTANTINI, *Nombres complexes*, Terminale S. URL : http://bacamaths.net.

[49] G. CONNAN, *Une année de mathématiques en Terminale S*, 2009–2010. URL : http://tehessin.tuxfamily.org/

[50] J.-P. DAVALAN, *Algèbre linéaire*, 2001.

[51] C. BOULONNE, *Notes de cours, M104 : Algèbre linéaire*, L1 Mathématiques, 2006–2007.

[52] C. CHERRUAU & F. CHERRUAU, *Maths, BTS Groupement A*, Contrôle Continue Ellipses.

[53] S. PASQUET, *11 - Proportionnalité*, Sixième. URL : http://mathweb.fr

[54] S. PASQUET, *10 - Proportionnalité*, Cinquième. URL : http://mathweb.fr

[55] S. PASQUET, *10 - Applications de la proportionnalité*, Quatrième. URL : http://mathweb.fr

[56] S. PASQUET, *09 - Fonctions linéaires et affines*, Troisième. URL : http://mathweb.fr

[57] ANONYMUS, *Intérêts simples*. URL : http://mathadoc.sesamath.net/Documents/mp/

[58] M. CUAZ, *Pourcentages*, Première L Math-Info. URL : http://mathscyr.free.fr.

[59] ANONYMOUS, *Systèmes d'équations, d'inéquations*, Troisième (Brevet). URL : http://albertimone.voila.net/Brevet/syst.3.html

[60] S. PASQUET, *Systèmes d'équations et inéquations affines*, Première ES. URL : http://mathweb.fr

[61] J. ONILLION, *Systèmes d'inéquations, régionnement du plan*, Seconde. URl : http://tanopah.jo.free.fr/seconde/regionalpha.php

[62] *Leçon 1 : Les droites dans le plan*,

[63] S. MEHL, *Droites du plan, étude analytique élémentaire*. URL : http://chronormath.com

[64] J.-L. ROUGET, *Droites et plans de l'espace*.

[65] *Droites et plans de l'espace*

[66] *Droites remarquables dans un triangle*, 4^{e}-3^{e}, Playermath. URL : http://playermath.com

[67] S. Duchet, *Droites remarquables d'un triangle*, 4e. URL : http://epsilon.2000.free.fr/4C/4C-02.pdf

[68] Contributeurs de Wikipedia, *Droite d'Euler*, Wikipédia.

[69] Contributeurs de Wikipedia, *Cercle*, Wikipédia.

[70] B. Sicard, *Equations cartésiennes dans le plan et dans l'espace*. URL : http://math.sicard.free.fr.

[71] M. Cuaz, *Géométrie dans l'espace, solides de l'espaces*. URL : http://mathscyr.free.fr.

[72] Contributeurs de Wikipédia, *Solide géométrique*, Wikipdéia.

[73] T. Eveilleau, *Les solides de Platon*. URL : http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr.

[74] S. Delaunay, *M302 : Cours de Géométrie I*, 2009–2010.

[75] C. Boulonne, *Notes de cours, M103 : Fondements de l'analyse 2*, 2006–2007.

[76] G. Costantini, *Barycentre d'un système pondéré*, Première S. URL : http://bacamaths.net

[77] P. Brachet, *Barycentres : Résumé de cours et méthodes*. URL : http://www.xm1math.net

[78] P. Brachet, *Produit scalaire : Résumé de cours et méthodes*. URL : http://www.xm1math.net

[79] A. Liétard, *Produit scalaire*. URL : http://maths1s.chez.com

[80] M. Cuaz, *Produit scalaire*. URL : http://mathscyr.free.fr.

[81] E. Suquet, *Théorème de Thalès*, Troisième. URL : http://automaths.com

[82] *Propriété de Thalès*, 3e. URL : http://melusine.eu.org

[83] *Théorème de Thalès - Démonstration*. URL : http://mathadoc.com.

[84] E. Suquet, *Trigonométrie*, Troisième. URL : http://automaths.com

[85] G. Costantini, *Trigonométrie et fonctions circulaires*, Première S. URL : http://bacamaths.net.

[86] G. Costantini, *Trigonométrie, relations métriques dans un triangle*. URL : http://bacamaths.net.

[87] Contributeurs de Wikipédia, *Théorème de Pythagore*, Wikipédia.

[88] Anonymus, *Leçon no 32 : Relations métriques dans le triangle rectangle. Trigonométrie. Applications*. URL : http://capes-de-maths.com.

[89] F. Besnard, *Chapitre 0, Troisième partie : Produit vectoriel, Produit mixte*. URL : http://fabien.besnard.pagesperso-orange.fr.

[90] L. Lubrano & al., *Mathématiques, BTS Industriels Groupements B et C*, Dunod, 2011.

[91] X. Delahaye, *Homothéties, translations, rotations - Première S*, URL : http://xmaths.free.fr.

[92] S. Delaunay, *M302 : Cours de Géométrie I*, 2009–2010.

[93] G. Bontemps, *Fractale, Maths, 1ère S*, Bordas, Programme 2001.

[94] A. Liétard, *Isométries planes*. URL : http://maths1s.chez.com

[95] X. Delahaye, *Similitude, Terminale S Spé*,

[96] A. Luce & O. Deckmyn, *Similitudes planes*, Terminale S. URL : www.maths-france.fr/Terminale/TerminaleS/FichesCours/Similitudes.pdf.

[97] A. Liétard, *Similitudes*, Terminale S. URL : http://maths1s.chez.com/TS/similitudes.pdf. URL : http://xmaths.free.fr.

[98] P. Debart, *Constructions géométriques au collège*. URL : http://debart.pagesperso-orange.fr/.

[99] *Dissections de polygones, la construction de Henry Ernest Dudeney (1857-1930)*, URL : http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/Coniques/Panoplie/Dissect/dudeney.htm.

[100] C. PARFENOFF, *Droites sécantes, perpendiculaires et parallèles*. URL : http://www.parfenoff.org.

[101] P. LUX, *Orthogonalité dans l'espace*. URL : http://lux.lyceefrancais-brasilia.net

[102] MATHTOUS, *Orthogonalité de droites et de plans*. URL : http://mathtous.perso.sfr.fr.

[103] G. COSTANTINI, *Les suites*, Première S. URL : http://bacamaths.net.

[104] X. DELAHAYE, *Suites numériques, limites*, Première S. URL : http://xmaths.free.fr.

[105] S. PASQUET, *Ainsi de suite*. URL : http://mathweb.fr

[106] G. BONTEMPS & al., *Fractale, Maths, 1ère S*, Bordas, Programme 2001.

[107] G. BONTEMPS, *Fractale, Maths, 1ère S*, Bordas, Programme 2001.

[108] M. CUAZ, *Suites arithémético-géométriques*. URL : http://mathscyr.free.fr.

[109] G. COSTANTINI, *Suites numériques*, Terminale S. URL : http://bacamaths.net.

[110] *Etude de suites*, URL : http://mathsplp.creteil.iufm.fr/ht_works/exposes/suites/suites.htm.

[111] G. COSTANTINI, *Suites de nombres réels*, Terminale S. URL : http://mathweb.fr.

[112] P. BRACHET, *Suites : Résumé de cours et méthodes*. URL : http://www.xm1math.net

[113] T. VEDEL, *Suites définies par récurrence*, Terminales.

[114] A. SAMIER & C. RASSON, *Suites*, Leçon de Math, S2, Master 1 Ens. Math 2010–2011.

[115] S. PASQUET, *Ainsi de suite*. URL : http://mathweb.fr

[116] ANONYMOUS, *Définition d'une suite récurrente à l'aide de la fonction* ln, Irem de Lyon, Groupe UPO Lyon.

[117] S. PASQUET, *Ainsi de suite*. URL : http://mathweb.fr

[118] X. DELAHAYE, *Suites numériques, Première S*. URL : http://xmaths.free.fr.

[119] A. SAMIER & C. RASSON, *Suites*, Leçon de Math, S2, Master 1 Ens. Math 2010–2011.

[120] G. COSTANTINI, *Les limites*, Première S. URL : http://bacamaths.net

[121] X. DELAHAYE, *Limites, Première S*, URL : http://xmaths.free.fr.

[122] G. COSTANTINI, *Continuité*, Cours de Terminale S, URL : http://bacamaths.net

[123] G. LEAHPAR, *Image d'un intervalle par une fonction continue, image d'un segment. Continuité de la fonction réciproque d'une focntion continue strictement monotone sur un intervalle.* Leçon 60 du CAPES 2010. URL : http://leahpar.etnalag.free.fr/capes.html.

[124] G. COSTANTINI, *Fonctions dérivables*, Cours de Terminale S, URL : http://bacamaths.net

[125] X. DELAHAYE, *Dérivée*, Terminale S, URL : http://xmaths.free.fr/.

[126] G. BONTEMPS, *Fractale, Maths, 1ère S*, Bordas, Programme 2001.

[127] G. COSTANTINI, *Fonctions logarithmes*, Cours de Terminale S, URL : http://bacamaths.net

[128] G. BONTEMPS, *Fractale, Maths, Terminale S*, Bordas, Programme 2002.

[129] G. BONTEMPS, *Fractale, Maths, Terminale S*, Bordas, Programme 2002.

[130] J.-E. VISCA, *Les croissances comparées*, URL : visca.pagesperso-orange.fr/html/aide/comparees.pdf

[131] R. GALANTE, *Croissance comparée des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto \ln x$ au voisinage de $+\infty$. Application*, URL : http://leahpar.etnalag.free.fr/.}

[132] T. CUESTA, *Cours de mathématiques BTS IRIS*. URL : cuestamath.perso.sfr.fr.

[133] C. CHERRUAU & F. CHERRUAU, *Maths, BTS Groupement A*, Contrôle Continue Ellipses.

[134] G. BONTEMPS, *Fractale, Maths, Terminale S*, Bordas, Programme 2002.

[135] G. COSTANTINI, *Calcul intégral*, Cours de Terminale S, URL : http://bacamaths.net.

[136] G. COSTANTINI, *Calcul intégral*, Cours de Terminale S, URL : http://bacamaths.net.

[137] F. THIRIOUX, *BTS Electronique, Cours de Mathématiques*, Lycée René Perrin, Ugine, Mai 2003.

[138] C. CHERRUAU & F. CHERRUAU, *Maths, BTS Groupement A*, Contrôle Continue Ellipses.

[139] F. THIRIOUX, *BTS Electrotechnique, Cours de Mathématiques*, Lycée René Perrin, Ugine.

[140] G. COSTANTINI, *Exercices sur les équations différentielles*, Terminale S. URL : http://bacamaths.net.

[141] M. CUAZ, *Plan d'étude d'une fonction numérique*, Terminale S. URL : http://mathscyr.free.fr.

[142] X. DELAHAYE, *Exercices d'étude de fonctions, Terminale ES*, URL : http://xmaths.free.fr.

[143] G. COSTANTINI, *Etude de la fonction tangente*, DM de Terminale S, URL : http://bacamaths.net.

[144] C. CHERRUAU & F. CHERRUAU, *Maths, BTS Groupement A*, Contrôle Continue Ellipses.

[145] F. THIRIOUX, *BTS Electrotechnique, Cours de Mathématiques*, Lycée René Perrin, Ugine.

[146] F. THIRIOUX, *BTS Electronique, Cours de Mathématiques*, Lycée René Perrin, Ugine, Mai 2003.

[147] C. CHERRUAU & F. CHERRUAU, *Maths, BTS Groupement A*, Contrôle Continue Ellipses.

[148] F. THIRIOUX, *BTS Electronique, Cours de Mathématiques*, Lycée René Perrin, Ugine, Mai 2003.

[149] P. TAQUET, P. TIREL & J. BANCE, *Mathématiques, BTS secteur industriel, groupement A*, Hachette Education, 2006.

[150] Contributeurs de Wikipédia, *Transformation de Laplace*, Wikipédia.

[151] M.-N. SANZ & al., *Physique, Tout-en-Un, PSI-PSI*, 2e année*, Dunod, 2010.

[152] T. CUESTA, *Cours de mathématiques BTS IRIS*. URL : cuestamath.perso.sfr.fr.

[153] C. CHERRUAU & F. CHERRUAU, *Maths, BTS Groupement A*, Contrôle Continue Ellipses.

[154] G. CONNAN, *Une année de MAPLE en MPSI*, Ch. 4, 2010-2011. URL : http://tehessin.tuxfamily.org/

[155] X. DELAHAYE, *Exercices d'étude de fonctions, Terminale ES*,

[156] C. CHERRUAU & F. CHERRUAU, *Maths, BTS Groupement A*, Contrôle Continue Ellipses.

[157] G. BONTEMPS, *Fractale, Maths, Terminale S*, Bordas, Programme 2002.

[158] *Dissections de polygones, la construction de Henry Ernest Dudeney (1857-1930)*, URL : http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/Coniques/Panoplie/Dissect/dudeney.htm.

[159] URL : http://www.maths.ac-aix-marseille.fr/debart/college/aire_college_classique.html.

[160] Contribuateurs de Wikipédia, *Médiane (géométrie)*, Wikipédia.

[161] APMEP, *Démontrer par les aires*, Journée régionale de Grenoble, 17 mars 2004.

[162] Contributeurs de Wikipédia, *Théorème de Pick*, Wikipédia.

[163] Contributeurs de Wikipédia, *Algorithmique*, Wikipédia.

[164] ALGOBOX, *Gallerie d'algorithmes*, URL : http://www.xm1math.net/algobox/gallerie.html.

[165] Contributeurs de Wikipédia, *Flocon de Koch*, Wikipédia.

[166] F. BAYART, *Code César*, URL : http://www.bibmath.net/crypto/substi/cesar.php3

[167] Codage en code César : http://www.ac-noumea.nc/maths/spip.php?article295.

[168] J. HERNANDO, *Activités sur un tableur*, URL : http://juliette.hernando.free.fr/tableur.php.

[169] X. DELAHAYE, *Utilisation d'un tableur*, URL : http://xmaths.free.fr/tice/tableur/.

[170] ANONYMOUS, *Régression linéaire à l'aide d'un tableur Excel*, URL : www-physique.u-strasbg.fr/~udp/articles.

[171] M.-C. DAVID & B. PERRIN-RIOU, *Raisonnements*, URL : http://wims.unice.fr/wims/

[172] C. BOULONNE, *Notes de cours : Fondements de l'algèbre*, L1 Mathématiques.

[173] S. HANNETON, *Vitesse (d'un objet dans l'espace)*, URL : www.hanneton.org/temp/vitesse.pdf

[174] J. GEADOT, *Chapitre 5 : Le travail d'une force*, Classe de 1ère S, URL : http://www.physagreg.fr/accueil.php.

[175] Contributeurs de Wikipédia, *Principe de Hardy-Weinberg*, Wikipedia.

[176] G. COSTANTINI, *Exercices sur les équations différentielles*, Terminale S. URL : http://bacamaths.net.

[177] A. SAMIER & C. RASSON, *Suites*, Leçon de Math, S2, Master 1 Ens. Math 2010–2011.

[178] X. DELAHAYE, *Suites numériques, Première S*.

[179] J.-D. ASTIER & al., *Mathématiques, BEP Tertiaire*, Nathan Technique.